415

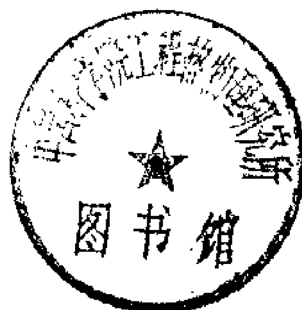
王 斌 俞衡毅 编译

地球物理流体动力学导论

海洋出版社

地球物理流体动力学导论

王 斌　　翁衡毅 编译



海 洋 出 版 社

1981年 北京

内 容 简 介

本书主要根据 J.Pedlosky 教授著的《Geophysical Fluid Dynamics》一书及有关文献编译。

书中采用物理推理和数学推导相结合的方法，系统地总结了海洋与大气大尺度运动动力学的理论基础，对旋转参考系中的运动方程、位势涡度和地转运动等概念，以及作为研究准地转运动理论框架的无粘浅水理论、粘性运动理论和大洋环流的均质模式作了充分的讨论。详细论述了罗斯贝波、惯性边界流、斜压与正压不稳定、波动传播与波动相互作用等理论。推导了球面上中纬度准地转位涡方程，并讨论了它对海洋与大气运动的应用。

本书可供海洋、气象、地球物理、流体力学等方面的科学工作者、高等院校教师、研究生和高年级大学生在学习和工作中参考。

本书还编译了有关数学基础和奇异摄动理论简介，以助读者理解书中内容。

地球物理流体动力学导论
王斌 翁衡毅 编译

★

海洋出版社出版
(北京复兴门外海贸大楼)
国防科委印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

★

1981年7月第一版　　1981年7月第一次印刷
开本：787×1092 1/16　　印张：35
字数：480,000　　印数：1,536
统一书号：13193·0070　　定价：5.80元

编译者的话

海洋与大气是同处于旋转地球上、且在重力场作用下形成稳定密度层结的流体。因此，发生在海洋与大气中的大尺度运动，都遵循旋转层结流体运动的普遍规律，从而可用统一的理论方法加以研究。地球物理流体力学现阶段的主要研究对象是海洋与大气大尺度运动动力学问题。由于海洋与大气具有许多共同的流体力学特性，所以对于其中一方所作的研究，往往可以加深我们对另一方的了解；掌握了地球物理流体力学的基本概念，对于研究海洋动力学和大气动力学来说，都是一个最好的起点。

地球物理流体力学是近年来迅速兴起的一门边缘学科。我们在中国科技大学研究生院学习期间，在大气物理研究所朱抱真先生指导下，阅读了一些地球物理流体力学方面的有关论著，其中，J.Pedlosky教授的有关著作是主要内容。鉴于国内有关地球物理流体力学的研究正在日益开展，而尚无一本系统专著，我们将1979年底出版的 Pedlosky 的《Geophysical Fluid Dynamics》一书译出，其中对原文公式和图中有误的地方作了一些修改，对个别章节的某些部分作了一些删节；同时，为了使有兴趣的读者能了解该学科的其它一些重要概念和课题，又从郭晓岚、G.Verones和S.Pond 与G.Pickard的有关论著中增补了下述内容：包辛内斯克近似、地转适应过程、大气和海洋中波动的分类与特征、大洋环流的数值模式。为便于阅读正文中的数学推导，还编译了有关的数学基础和奇异摄动理论简介，作为本书的附录。增补的内容均在标题中用星号标出以与 Pedlosky 的原书区分。

本书对地球物理流体力学的主要问题作了比较系统的叙述。全书共分八章：第一章与第二章概括叙述了某些重要的基本概念，如旋转坐标系中的基本运动方程、位势涡度、地转运动和地转适应，线性波动的分类与特征等。三至五章专门讨论均质旋转流体动力学。其中第三章详细考察了一个既忽略层结效应、又不考虑粘性的最简单的均质旋转流体模式，为建立准地转理论提供了一个有用的动力学框架。这对阐明准地转运动的性质、深入了解位涡动力学的基本概念来说，颇有裨益。用这个简单模式简明论述了罗斯贝波、惯性边界流、β 平面、能量传播和波动相互作用等重要课题。第四章用均质模式研究了摩擦影响大尺度运动的某些基本概念，提出了描写粘性运动的最简单的湍流混合模式。第五章运用第三、四章的结果，讨论一个重要的地球物理问题——大洋风生环流。第六章进一步考察层结流体在旋转球面上的运动规律。首先，用推理和直观的方法建立球面上中纬度准地转位涡方程；然后，用它讨论层结流体中的罗斯贝波、大气中的强迫驻波、波动与纬向流的相互作用、层结海洋中的地形波及温跃层等课题。第七章专门阐述不稳定理论。这一理论不仅在动力气象学中占有中心地位，而且在海洋动力学中也有重要作用。该章系统地讨论了斜压不稳定和正压不稳定的线性理论，以及斜压不稳定的非线性理论。第八章讨论的是难以归并到前几章中的某些课题，用以说明对前几章中提出的某些基本概念进行推广的方法。

由于我们水平有限，编译中难免有错误与不妥之处，恳请读者给以指正。

1980年10月

目　　录

第一章 预 备 知 识

1.1 地球物理流体力学

大气和海洋具有许多共同的流体力学性质。所以，对其中一方所作的研究，可使我们加深对另一方的了解.经验表明,掌握了既可应用于大气、又可应用于海洋的基本动力学概念,对于研究大气和海洋都是最好的起点。地球物理流体力学的主旨就是研究对于理解大气和海洋所必需的基本动力学概念。原则上，地球物理流体力学研究一切天然发生的流体运动。这些运动的时空尺度范围很大：从柔和微风之短暂扰动，直到大型持久的海洋与大气流系。事实上，即使“固体”地球本身，在数百万年的时间尺度上也有类似流体的内部环流，其表观现象是海底扩张和大陆漂移。所有这些现象当然都可以包括在地球物理流体力学的范畴内。然而，部分是出于历史原因，地球物理流体力学集中研究的对象还是大气和海洋大尺度现象的动力学问题。正是在大尺度运动中，大气和海洋的共同特性表现得最明显；同时，象海洋中的湾流和大气中的急流这样一些引人注目的流动，激发人们把注意力集中在大尺度运动上，并得到了一些令人满意的研究结果。所以，我们在此只对大气与海洋的大尺度动力学提供一个导论性的、而不是包罗万象的论述。尤其是，书中并不讨论气象学与海洋学的观测特征和描述性特征。当然，熟悉这类事实对于恰当地提出新的流体力学理论是必要的。为了阐明某些特定研究方法的基本思想，在书中适当地方给出描述特殊问题的参考文献。

本书推导的原理，基本上是用于了解自然现象的理论概念。这些原理大多数来自模式问题之研究，这些研究旨在建立基本概念，而不是详细地模拟具体的地球物理现象。地球物理流体力学通过研究日益复杂的模式体系而取得了历史性的进展，其中每一阶段都建立在正确分析简化模式所形成的直觉认识上。

1.2 罗斯贝数

对“大尺度”一词，需要有一个比较确切的定义。特征长度尺度为50公里的现象，在大气中也许是小尺度的，但在海洋中，正是这个尺度的运动可以确认为是大尺度运动。一个现象是否为大尺度的，在动力学上并不只取决于它的大小。

在本书中，大尺度运动是指那些显著地受到地球自转影响的运动。对于一个特定现象，表示旋转影响程度的一个重要量是罗斯贝数，其定义如下。令L为运动的特征长度尺度。例如，图1.2.1表示对流层气压场中实测的一种典型波型。运动的典型而适当的长度尺度，即表征动力场水平空间变化的长度尺度，可以是气压脊与相邻气压槽之间的距离。类似地，令U为运动的水平特征速度尺度。在图1.2.1中，L为O(1,000公里)，而U为O(20米/秒)。[1]

---

(1) 符号O( )在本书中用于两种完全不同的场合。表示函数f(x)和g(x)之间关系的表达式f(x)=O(g(x))(在某极限下)，意味着f(x)/g(x)在该极限下渐近地趋于常数。这个符号还用来表示一个变量（在本情况下为U）具有以括号内的量级符号值所例示的大小。在后一种情况下，它并不隐含取极限或近似判据。两种用法非常不同，通过上下文关系会清楚地看出该符号指哪种情况。

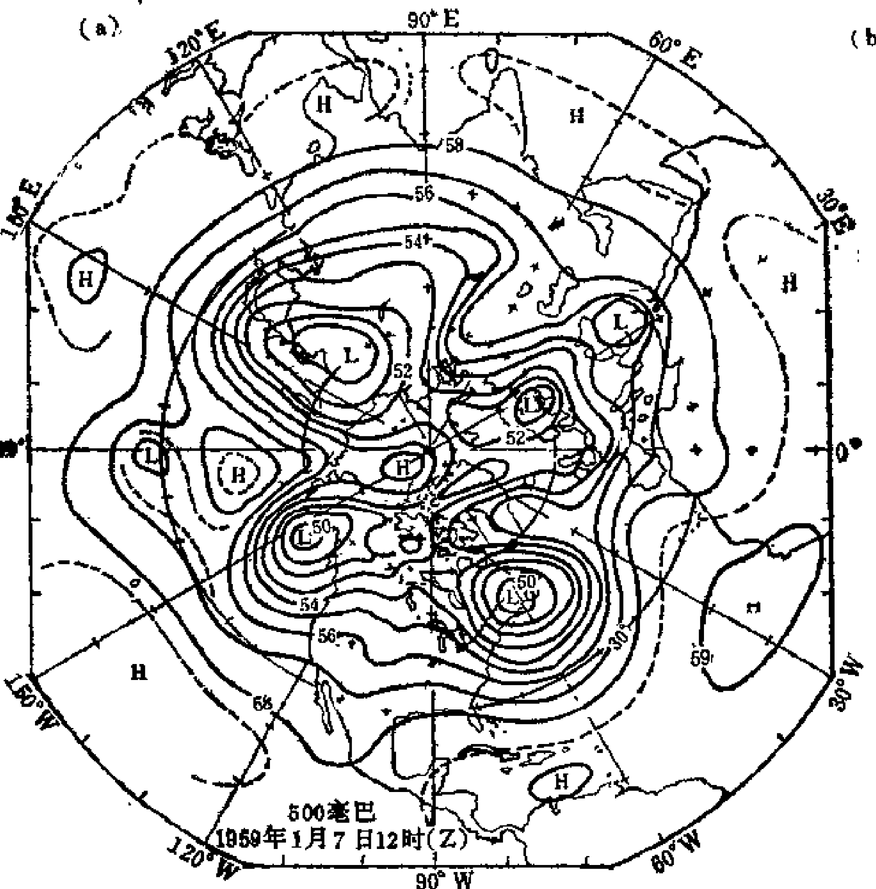


图1.2.1 (a)约5.5公里高度处的等压线。等压线大体上可以表示运动的流线(Palmén和Newton,1969)。

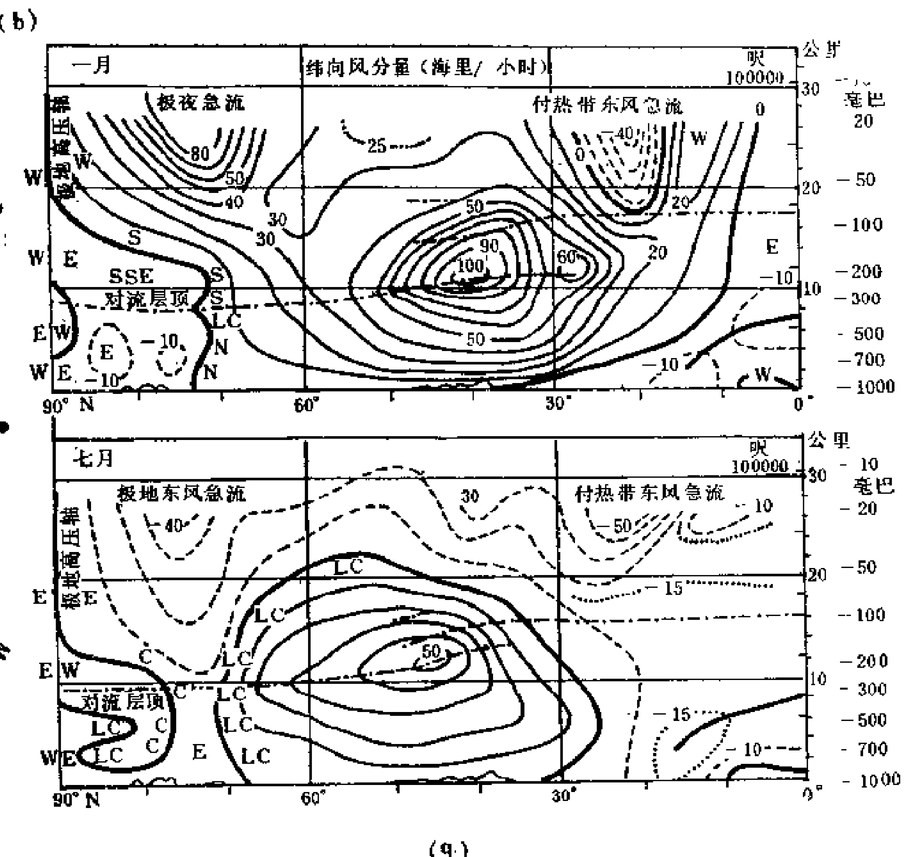


图1.2.1 (b)表示风速分布的纬向风（即沿纬圈的风）剖面。(1节—50厘米/秒)(Palmén和Newton,1969,根据Kochanski,1955)。

流体元以速度 U 运动，经过距离L所需的时间为L/U。如果这一时间周期远小于地球自转周期，那么在运动的时间尺度内，流体几乎不能感到地球的自转。如果自转是重要的，那末我们可预料

$$\frac{L}{U} \geqslant \Omega^{-1} \tag{1.2.1}$$

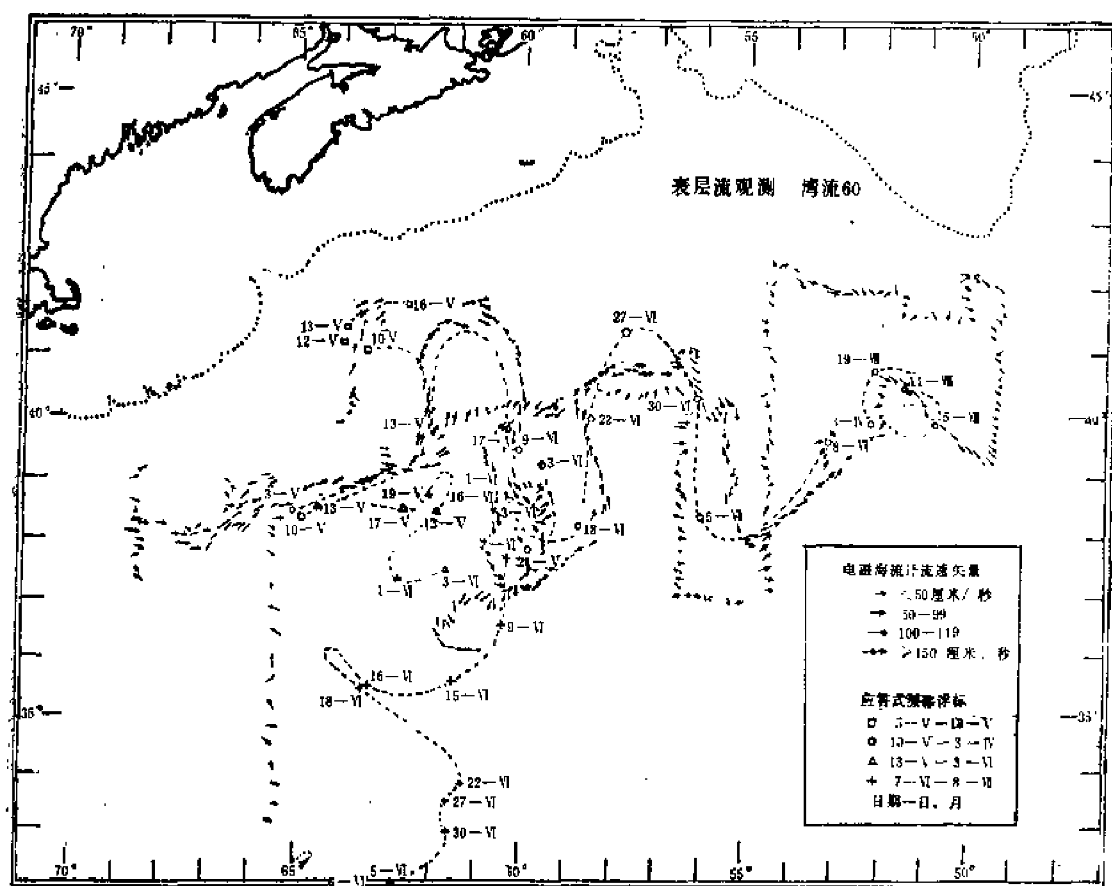
或等价地有

$$\varepsilon = \frac{U}{2\Omega L} \leqslant 1 \tag{1.2.2}$$

无量纲参数ε是罗斯贝数。我们把那些L足够大、致使ε之量级等于或小于1的运动，定义为大尺度运动。对于地球来说，$\Omega = 7.3\times10^{-5}$/秒。若取上面给出的$L$和$U$，则有$\varepsilon = 0.137$，因而我们可以想象到地球的自转是重要的。

这样的估计，往往需要作进一步的修正。对行星运动而言，我们将看到，事实上只用垂直于地面的行星自转分量来估计ε。因此，对于低纬运动，(1.2.2)式估计的罗斯贝数可能是过低的。详尽的细节和限制将在以后讨论。

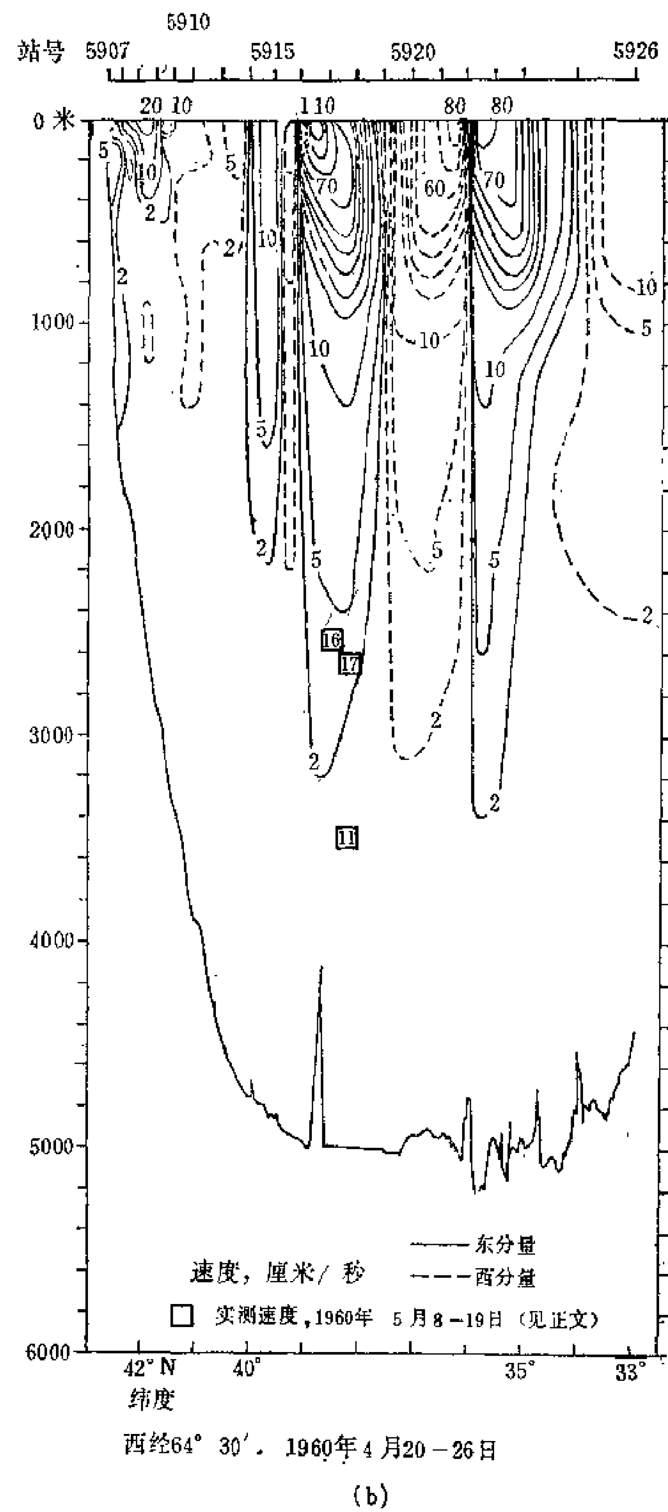
注意，特征速度越小，就越可以把具有较小L的运动也看作是大尺度运动。湾流的速度量级为 100 厘米/秒。尽管它的特征水平尺度（如图1.2.2所示）只有O（100公里），而它的罗斯贝数却为0.07，使用地球自转的局部法向分量值，虽然会使ε值在纬度30°处增加一倍，但



(a)

这样的运动显然仍符合大尺度运动的判据。

上述考虑基本上是运动学方面的.然而,一个适度小量的罗斯贝数之重要的动力学后果,可从下述事实看出:小ε意味着大尺度运动远比地球作固体旋转所引起的速度慢。取一级近似——即精确到$O(\varepsilon)$——大气和海洋随地球一起旋转,但它们与刚体旋转又有小而重要的偏差,我们(也与地球一起旋转)把这偏差视为风和海流。在旋转坐标系(它在运动学上消除了刚体旋转)中描述运动时,有意义的重要的运动是相对于刚体旋转的小偏差,清楚地认识到这一点是很有益的。在以速率Ω旋转的坐标系中,我们所看到的只是相对于旋转刚体之偏差。由于这种旋转坐标系是一个有加速度的坐标系,而不是惯性坐标系,因此要考虑一些众所周知的"惯性力",即离心力和微妙而重要的科氏力。我们将看到,只要罗斯贝数是小量,则科氏力在力的平衡中总是一个主要分量。大尺度的海洋或大气运动的动力学研究,必须考虑有重要地球物理学意义的科氏力。一旦考虑了科氏力,许多难以捉摸的动力学现象便可迎刃而解。



(b)

图1.2.2 (a)海面观测揭示的湾流路径;
(b)说明流速结构的湾流截面图(Fuglister,1963)。

1.3 密度层结

太阳造成的地面不均匀加热，在大气和海洋中都引起了显著的密度变化。事实上，除了太阴潮之外，上述加热是造成大气和海洋中一切运动的基本原因。层结的一个重要观测性质是，在通常的意义(即重流体位于轻流体之下)上，大尺度运动几乎总是重力稳定的。图1.3.1给出大洋中典型的密度深度廓线。除了较薄的表面混合层(其中的水不断受到风作用的搅动)外，密度随深度增加。图1.3.2给出大气中类似的密度廓线。由于空气有可压缩性，所以环境密度随高度的递减在量度垂直移动的流体元之重力稳定性方面多少有些虚假性。后面将讨论对此需作哪些修正。尽管如此，大气密度之递减仍足以表明其重力稳定性。

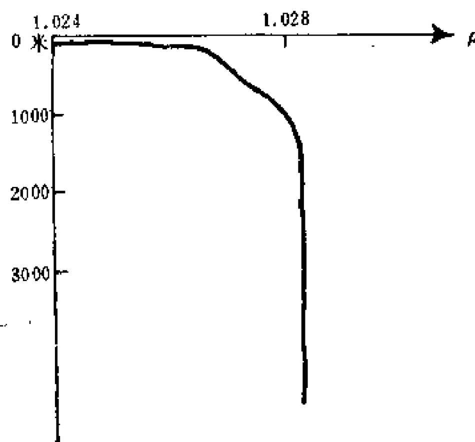


图1.3.1 大洋中密度随深度的典型分布。注意密度剧烈变化的地带，它在一公里左右的深度处，叫作密度跃层。

稳定层结的一个重要后果是，抑制平行于局部重力方向的运动，而这个约束有助于产生准水平的大尺度运动。以后将看到，由于旋转的作用，在密度场和速度场的结构之间，存在

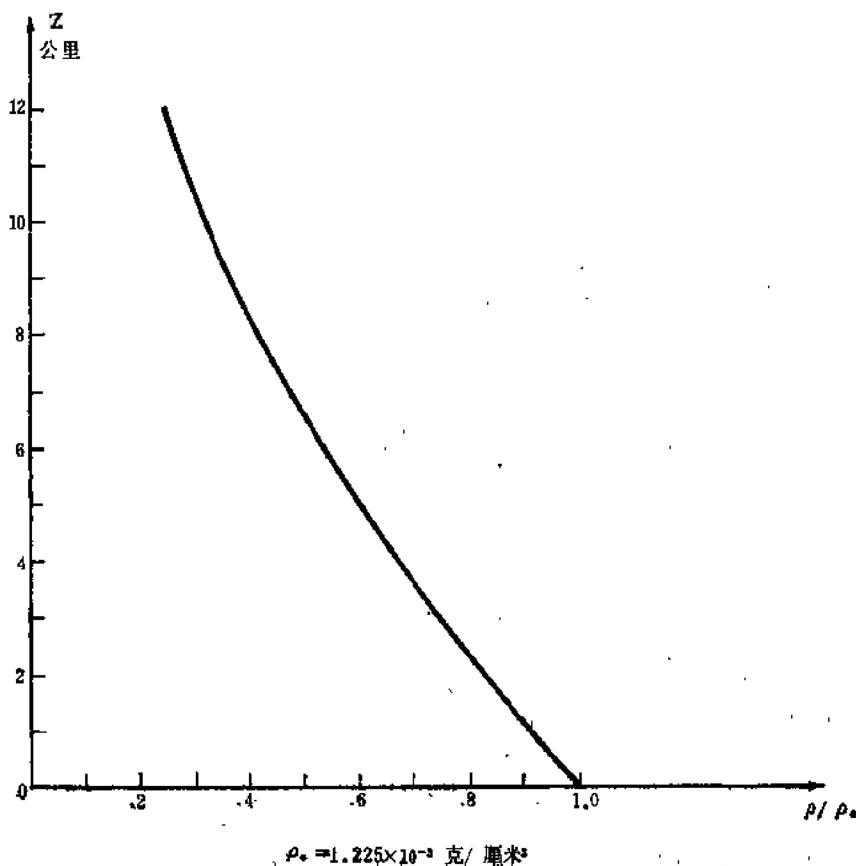


图1.3.2 大气中密度随高度的分布(根据NASA1962年标准大气)。

直接的密切关系。

度量层结的一个有用的无量纲数为布格数：

$$S=g\frac{\Delta\rho}{\rho}\ \frac{D}{4\Omega^2L^2}, \tag{1.3.1}$$

其中$\Delta\rho/\rho$是流体在其运动的垂直尺度D上的特征相对密度差，g是重力加速度。参数 S可以用长度尺度之比写成

$$S=\left(\frac{L_D}{L}\right)^2, \tag{1.3.2}$$

其中长度

$$L_D=\frac{1}{2\Omega}\ (g\frac{\Delta\rho}{\rho}D)^{1/2} \tag{1.3.3}$$

叫作罗斯贝变形半径。S取决于变形半径与几何尺度L之比，但不取决于速度尺度U。

与罗斯贝数的情况一样，布格数实际上必须用地转角速度的局部法向分量来表示，这意味着在其他因子都相同的情况下，低纬运动将具有较大的S值。

与稳定密度场有关的大尺度海洋和大气运动的另一个重要性质是，运动的水平尺度与垂直尺度相差很大。大洋的深度很少超过六公里，而且，主要流系的垂直范围一般远小于六公里。然而水平尺度都是几百公里，甚至几千公里。同样，象图1.2.1所示的那种主要的大尺度现象，具有十公里的垂直尺度，但L为$O(1,000$公里)。

一般说来，大尺度的海洋和大气运动发生在非常薄的流体层内，而其水平尺度却很大，这个几何约束使流体运动轨迹几乎位于一水平面内，即运动的形态比

$$\delta=\frac{D}{L} \tag{1.3.4}$$

一般是非常小的量。

1.4 非旋转坐标系中的运动方程

大尺度海洋与大气运动动力学的出发点是，假定海洋和大气运动的动力学建立在系统应用连续流体运动方程的基础上。描述运动所需要的动力学变量是，密度ρ、压力p、速度$\mathbf{u}$，以及某些热力学变量，如温度T、单位质量的内能e和比熵s。根据流体物理性质之不同，在某些特殊情况下，也许还需要附加诸如盐度之类的变量，或者，在热力学状态关系可以简化的情况下，可略去某些状态变量。我们全部用欧拉方法描述运动，在此框架内，动力学变量是时间t和位矢坐标矢量$\mathbf{r}$的函数。

在本节中，我们将给出惯性坐标系或非旋转坐标系中的运动方程。它们的推导可以在任何一本基础流体力学教科书中找到。

当流体内部无质量源汇时，质量守恒条件可用连续方程表示为

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\rho\mathbf{u}=0. \tag{1.4.1}$$

这个方程说明，密度随时间的局部变化，必与质量通量$\rho\mathbf{u}$的散度相平衡。上式也可以写成

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\nabla\cdot\mathbf{u}=0, \tag{1.4.2}$$

其中

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla \tag{1.4.3}$$

是个别流体元的任意属性对时间的全导数（通常叫作实质导数）。

用于连续流体的牛顿运动定律的形式为

$$\rho\frac{d\mathbf{u}}{dt}=-\nabla p+\rho\nabla\phi+\mathscr{F}(\mathbf{u}), \tag{1.4.4}$$

或单位体积的质量乘以加速度等于压力梯度力、彻体力$\rho\nabla\phi$、与力$\mathscr{F}$之和，这里ϕ是用来表示诸如重力之类的保守彻体力之位势，$\mathscr{F}$原则上可为任意的非保守力，但实际上在将要讨论的所有情况中，它表示流体内的摩擦力。对于象空气和水这样的牛顿流体[1]，

$$\mathscr{F}=\mu\nabla^2\mathbf{u}+\frac{\mu}{3}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}), \tag{1.4.5}$$

其中μ是分子粘性系数。当μ(大体上是热力学状态变量的函数）在运动场中被设为常数时，$\mathscr{F}$的上述表达式是准确的。这种近似适合于我们所要讨论的问题。

一个特别麻烦的问题是，如果状态变量只描述大尺度运动，那么$\mathscr{F}$的这个表达式是否能用？从(1.4.1)和(1.4.4)的形式已清楚地看出，运动方程是非线性二次方程，即包含动力学变量的乘积。这意味着原则上不能简单地叠加方程的解。用物理术语来说，就是一种空间尺度的运动与其他尺度的运动有相互作用。因此存在一种先验的可能性，即我们不大感兴趣的小尺度运动，也可能影响大尺度运动。一个普遍但并不很确切的见解是，在较长时间尺度中（随机出现）的小尺度运动，通过类似于分子扩散的输运过程，对较大尺度运动的性质起着平滑和混合的作用。关于这个问题的进一步讨论可见第四章，但是考虑到$\mathscr{F}$表达式的可能的合乎逻辑的改进，我们把(1.4.4)视为基本运动方程，而(1.4.5)可以看作一个摩擦力的模式（当然，它对实验室试验来说是精确的）。

除非把密度看作常数（对于许多重要现象，这是一个有用的理想化方法），否则，动量方程和连续方程不能使运动方程闭合。所以，还必须考虑热力学第一定律，它可以写为

$$\rho\frac{de}{dt}=-p\rho\frac{d}{dt}\rho^{-1}+k\nabla^2T+\rho Q, \tag{1.4.6}$$

其中e是单位质量的内能，T是温度，k是热传导系数，Q是内热源引起的单位质量的加热率。

为方便起见，我们引入热力学状态属性s(比熵)。熵与其他状态属性有关，其关系式为

$$T\Delta s=\Delta e+p\Delta\left(\frac{1}{\rho}\right) \tag{1.4.7}$$

其中Δs、Δe和$\Delta(1/\rho)$是s、e和$1/\rho$的任意增量。尤其是

$$T\frac{ds}{dt}=\frac{de}{dt}+p\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right), \tag{1.4.8}$$

故(1.4.6)式可写为

(1) 在牛顿流体中应力与相应的速度切变成正比，比例系数μ与速度场无关，但可为温度和压力的函数。

$$T\frac{ds}{dt}=\frac{k}{\rho}\nabla^2T+Q. \tag{1.4.9}$$

为使方程组闭合，还需要有表示流体物理性质的状态关系。在最简单的情况下（如干空气和纯水），状态关系的一般形式为

$$\rho=\rho(p,T) \tag{1.4.10}$$

和

$$s=s(p,T). \tag{1.4.11}$$

利用(1.4.11)，我们可把(1.4.9)重新写成如下形式：

$$C_p\frac{dT}{dt}+T\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T\frac{dp}{dt}=\frac{k}{\rho}\nabla^2T+Q, \tag{1.4.12}$$

其中用了定压比热的定义：

$$C_p=T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p\ .$$

进一步利用热力学关系[1]

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T=\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p\ , \tag{1.4.13}$$

则(1.4.12)变为

$$C_p\frac{dT}{dt}-\frac{T}{\rho}\alpha\frac{dp}{dt}=\frac{k}{\rho}\nabla^2T+Q \tag{1.4.14}$$

其中α是由关系式

$$\alpha=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p \tag{1.4.15}$$

定义的热膨胀系数。例如，大气中干空气的状态关系可以很好地由理想气体定律来表示：

$$\rho=\frac{p}{RT}, \tag{1.4.16}$$

其中R是干空气的气体常数。对于这样一种理想气体，比熵可表示为

$$s=C_p\ln T-R\ln p, \tag{1.4.17}$$

在此情况下，$\alpha=1/T$，因此(1.4.14)变为

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{\theta}{C_pT}\left\{\frac{k}{\rho}\nabla^2T+Q\right\} \tag{1.4.18}$$

而

$$\theta=T\left(\frac{p_0}{p}\right)^{R/C_p} \tag{1.4.19}$$

叫做位温，这里p_0是一个固定的参考压力。注意，在没有热传导和内部加热的情况下，对每个流体元来说，θ是一个保守属性。对于可压缩性之影响很小的纯液体，采用简单的状态关系

$$\rho=\rho_0[1-\alpha(T-T_0)] \tag{1.4.20}$$

（1） 如见Batchelor(1967)，第一章。

往往是适当的。在这种情况下，(1.4.14)式左边第二项也可忽略。此时，热量方程，或热力学第一定律，可取如下形式：

$$\frac{dT}{dt}=\kappa\nabla^2T+\frac{Q}{C_p},\tag{1.4.21}$$

其中$\kappa=k/\rho C_p$是热扩散系数。借助于(1.4.20)，也可把方程(1.4.21)完全用密度来表示，即

$$\frac{d\rho}{dt}=\kappa\nabla^2\rho-\frac{\alpha\rho_0}{C_p}Q.\tag{1.4.22}$$

必须注意，(1.4.2)式和(1.4.22)式表示两个完全不同的物理原理，前者表示质量守恒，而后者对于液体是近似地表示了能量守恒。

对于不可压液体，或者非常近于不可压的液体，密度差很小，以致它对质量平衡的影响可以忽略，故对于不可压液体，(1.4.2)式可近似地写为

$$\nabla\cdot\mathbf{u}=0.\tag{1.4.23}$$

这并不意味$d\rho/dt$为零；事实上，$d\rho/dt$由(1.4.22)式给出，仅当热传导和内部加热可忽略时，即仅当运动是绝热的情况下，它才为零。(1.4.23)式的正确性，必须用系统的尺度分析方法对各种情况加以考察，我们将在第六章中再来讨论这个问题。暂时可把(1.4.23)式取为不可压缩的定义。

对于象海水这种盐度影响密度的比较复杂的液体，必须用密度、盐度、温度和压力之间的一个比较复杂的关系，来代替(1.4.20)的简单形式[1]。在相当好的近似程度上(Bryan和Cox 1972)，有

$$\rho=\rho_0[1-\alpha_T(T-T_0)+\alpha_s(S-S_0)],\tag{1.4.24}$$

其中S是海水的盐度（克/千克），α_T和α_s是由经验确定的深度之函数。在这种情况下，我们还需要一个表示盐度平衡的附加方程，其形式为

$$\frac{dS}{dt}=F(S),\tag{1.4.25}$$

其中必须给定$F(S)$，以表示盐度的源、汇或扩散的再分布。

1.5 旋转坐标系

我们早已注意到，描写海洋和大气运动最自然的坐标系，是以行星角速度Ω旋转的坐标系。当然，现象本身并不受坐标系选择的影响，但我们必须承认这样一个事实，即对现象的描述取决于我们对坐标系的选择。对于旋转坐标系中的一个观察者来说，固定在惯性空间中的物体似乎是在旋转，并且，由于其视轨迹之弯曲，因而它们是有加速度的。注意到牛顿运动定律及其导出形式(1.4.4)只在惯性坐标系中才适用，这便可以解释上述现象。如果要全部用旋转坐标系中直接观测的量来表示的话，那末我们必须建立一个新形式的适当的运动方程。

首先考虑一个大小不变、但以角速度$\mathbf{\Omega}$旋转的矢量$\mathbf{A}$(图1.5.1)。设$\mathbf{A}$与$\mathbf{\Omega}$之间的夹角为γ。在很小的时间间隔Δt内，$\mathbf{A}$转动了一个角度$\Delta\theta=|\mathbf{\Omega}|\Delta t$，其中$|\mathbf{\Omega}|$是$\mathbf{\Omega}$的大小。但从图1.5.2上显而易见，$\mathbf{A}$的微小变化为

---

(1) 参见1.8节的详细讨论。

$$\mathbf{A}(t+\Delta t)-\mathbf{A}(t)\approx\Delta\mathbf{A}=\mathbf{n}|\mathbf{A}|\sin\gamma\Delta\theta+O((\Delta\theta)^2),\tag{1.5.1}$$

其中$\mathbf{n}$是$\mathbf{A}$变化方向的单位矢量，它必垂直于$\mathbf{A}$(由于它的长度固定)，且垂直于$\mathbf{\Omega}$(根据旋转的定义)。因此，

$$\mathbf{n}=\frac{\mathbf{\Omega}\times\mathbf{A}}{|\mathbf{\Omega}\times\mathbf{A}|}.\tag{1.5.2}$$

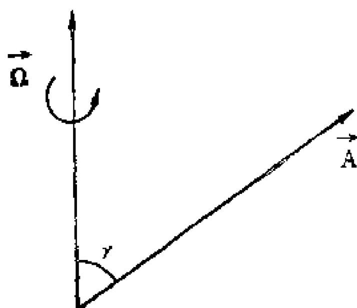


图1.5.1 $\mathbf{A}$是一个大小不变、而与旋转轴的夹角为γ的矢量。

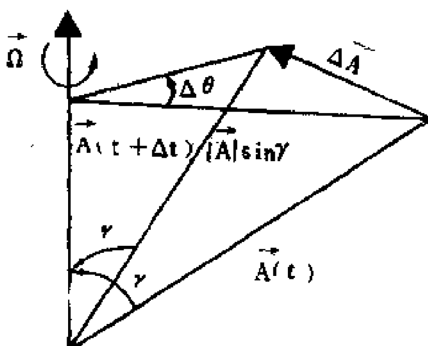


图1.5.2 t和$t+\Delta t$时刻的$\mathbf{A}$给出无限小变化量$\Delta\mathbf{A}$。

当$\Delta t\to 0$时，

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{A}}{\Delta t}=\frac{d\mathbf{A}}{dt}=|\mathbf{A}|\sin\gamma\frac{d\theta}{dt}\ \frac{\mathbf{\Omega}\times\mathbf{A}}{|\mathbf{\Omega}\times\mathbf{A}|},\tag{1.5.3}$$

但因

$$|\mathbf{\Omega}\times\mathbf{A}|=|\mathbf{\Omega}||\mathbf{A}|\sin\gamma,\tag{1.5.4}$$

所以，对于一个大小不变的矢量，我们最后得到

$$\boxed{\frac{d\mathbf{A}}{dt}=\mathbf{\Omega}\times\mathbf{A}}\ .\tag{1.5.5}$$

一个固定在旋转坐标系中的观察者看不到 $\mathbf{A}$ 的变化，而在非旋转坐标系中的观察者会看到 $\mathbf{A}$ 有如(1.5.5)式所描述的变化。两个观察者看到的是同一矢量 $\mathbf{A}$，这是因为根据定义，矢量 $\mathbf{A}$ 与描述它时所用的坐标系无关。然而，人们感觉到的 $\mathbf{A}$ 的变化率却显然不同。注意，尽管有上述的不同，但

$$\frac{d|\mathbf{A}|^2}{dt}=2\mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{A}}{dt}=2\mathbf{A}\cdot(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{A})=0,\tag{1.5.6}$$

所以，两个观察者都看到 $\mathbf{A}$ 的大小没有改变。

现在来考虑一个任意矢量 $\mathbf{B}$ 和一个以角速度 $\mathbf{\Omega}$旋转的坐标系(图1.5.3)。为简便起见，设该坐标系是直角坐标系，沿每个轴的单位矢量为 $\mathbf{i}_1$、$\mathbf{i}_2$ 和 $\mathbf{i}_3$。在该旋转坐标系中，矢量 $\mathbf{B}$ 可表示为

$$\mathbf{B}=B_1\mathbf{i}_1+B_2\mathbf{i}_2+B_3\mathbf{i}_3,\tag{1.5.7}$$

其中

$$B_j=\mathbf{i}_j\cdot\mathbf{B},\quad j=1、2、3.\tag{1.5.8}$$

对于一个与旋转坐标系相对静止的观察者来说，$\mathbf{B}$ 随时间的

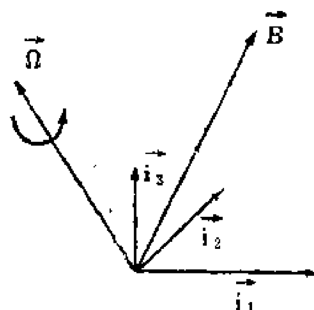


图1.5.3 基矢为 $\mathbf{i}_1$、$\mathbf{i}_2$和$\mathbf{i}_3$ 的直角坐标系及矢量$\mathbf{B}$。坐标系绕如图所示的轴以角速度$\mathbf{\Omega}$旋转。

变化率可直接写为

$$\left(\frac{d\mathbf{B}}{dt}\right)_R=\frac{dB_1}{dt}\mathbf{i}_1+\frac{dB_2}{dt}\mathbf{i}_2+\frac{dB_3}{dt}\mathbf{i}_3, \tag{1.5.9}$$

因为在该坐标系中，单位矢量的长度和方向都是固定的。((1.5.9)式中的下标 R 将提醒我们，该式适用于旋转坐标系中的观察者。) 另一方面，对于一个非旋转观察者，$\mathbf{B}$ 的分量和单位矢量都随时间变化。标量分量 B_1、B_2 和 B_3 的变化率对于两个观察者是相同的，所以

$$\left(\frac{d\mathbf{B}}{dt}\right)_I=\frac{dB_1}{dt}\mathbf{i}_1+\frac{dB_2}{dt}\mathbf{i}_2+\frac{dB_3}{dt}\mathbf{i}_3$$

$$+B_1\frac{d\mathbf{i}_1}{dt}+B_2\frac{d\mathbf{i}_2}{dt}+B_3\frac{d\mathbf{i}_3}{dt}, \tag{1.5.10}$$

其中下标 I 表示在非旋转的惯性坐标系中的观察者所看到的变化率。把(1.5.5)式应用于每个单位矢量，即得

$$\begin{aligned}B_1\frac{d\mathbf{i}_1}{dt}+B_2\frac{d\mathbf{i}_2}{dt}+B_3\frac{d\mathbf{i}_3}{dt}&=B_1\mathbf{\Omega}\times\mathbf{i}_1+B_2\mathbf{\Omega}\times\mathbf{i}_2+B_3\mathbf{\Omega}\times\mathbf{i}_3\\&=\mathbf{\Omega}\times(B_1\mathbf{i}_1+B_2\mathbf{i}_2+B_3\mathbf{i}_3)\\&=\mathbf{\Omega}\times\mathbf{B},\end{aligned} \tag{1.5.11}$$

故(1.5.10)式变成

$$\boxed{\left(\frac{d\mathbf{B}}{dt}\right)_I=\left(\frac{d\mathbf{B}}{dt}\right)_R+\mathbf{\Omega}\times\mathbf{B}}\ 。 \tag{1.5.12}$$

因此，同一个矢量 $\mathbf{B}$ 随时间的变化率，在旋转坐标系和非旋转坐标系中看起来是非常不同的。为准确描述在非旋转惯性坐标系中所看到的 $\mathbf{B}$ 的变化率，必须把旋转坐标系中所看到的 $\mathbf{B}$ 的时间变化率加一项 $\mathbf{\Omega}\times\mathbf{B}$. 注意，由于 $\mathbf{\Omega}\times\mathbf{\Omega}$ 恒等于零，所以在两个坐标系中观测到的 $\mathbf{\Omega}$ 的时间变化率是一致的，因此，当 $\mathbf{\Omega}$ 的大小和方向发生变化的情况下，(1.5.12) 式仍然适用。

1.6 旋转坐标系中的运动方程

设 $\mathbf{r}$ 是一任意流体元的位置矢量。按照(1.5.12)式有

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_I=\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_R+\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}\ , \tag{1.6.1}$$

所以，在非旋转坐标系中看到的速度 $\mathbf{u}_I$，等于在旋转坐标系中看到的速度加上刚体旋转 $\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}$ 施于流体元上的速度。我们可把它写为

$$\mathbf{u}_I=\mathbf{u}_R+\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}, \tag{1.6.2}$$

其中 $\mathbf{u}_R$ 叫作相对速度。而牛顿运动定律所描述的是单位质量所受的力与惯性加速度（即在惯性坐标系中所看到的 $\mathbf{u}_I$ 的变化率）之间的关系。我们把(1.5.12)用于 $\mathbf{u}_I$，得

$$\left(\frac{d\mathbf{u}_I}{dt}\right)_I=\left(\frac{d\mathbf{u}_I}{dt}\right)_R+\mathbf{\Omega}\times\mathbf{u}_I\ . \tag{1.6.3}$$

然而，我们的目的是得到一个全部用旋转坐标系中直接观测的量来描述的运动方程。为此，

可用(1.6.2)式消去(1.6.3)式右端的$\mathbf{u}_I$，结果得到

$$\left(\frac{d\mathbf{u}_I}{dt}\right)_I=\left(\frac{d\mathbf{u}_R}{dt}\right)_R+\frac{d\mathbf{\Omega}}{dt}\times\mathbf{r}+\mathbf{\Omega}\times\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_R+\mathbf{\Omega}\times(\mathbf{u}_R+\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r})$$

$$=\left(\frac{d\mathbf{u}_R}{dt}\right)_R+2\mathbf{\Omega}\times\mathbf{u}_R+\mathbf{\Omega}\times(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r})+\frac{d\mathbf{\Omega}}{dt}\times\mathbf{r}。\qquad(1.6.4)$$

在不同坐标系中所观测到的加速度之差，等于(1.6.4)式右边三个附加项之和。这些项是科氏加速度$2\mathbf{\Omega}\times\mathbf{u}_R$、向心加速度$\mathbf{\Omega}\times(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r})$、以及由旋转速率本身变化所引起的加速度。

除了时间尺度极长的现象外，上式最后一项对于大多数海洋和大气现象并不重要。在我们要讨论的问题中，可以认为$\mathbf{\Omega}$是不变的。向心加速度可以用$\mathbf{r}_\perp$来重写，$\mathbf{r}_\perp$是从旋转轴到位于$\mathbf{r}$处流体元位置的垂直距离的量（图1.6.1），即，由于

$$\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}=\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}_\perp,$$

借助于三重矢量乘积公式

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B}-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C},$$

我们得到

$$\mathbf{\Omega}\times(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r})=-|\mathbf{\Omega}|^2\mathbf{r}_\perp.\qquad(1.6.5)$$

由此看出，向心加速度可以用位势函数ϕ_c来表示，

$$\mathbf{\Omega}\times(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r})=-\nabla\phi_c,$$

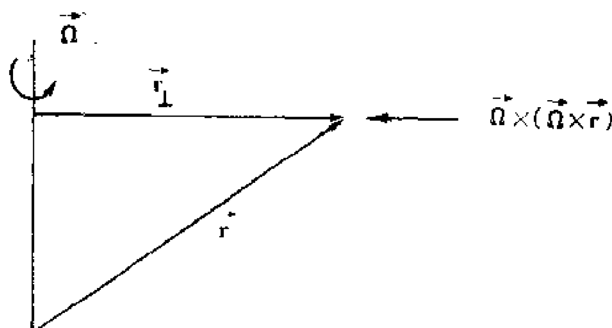


图1.6.1 向心加速度$\mathbf{\Omega}\times(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r})$。

其中

$$\phi_c=\frac{|\mathbf{\Omega}|^2|\mathbf{r}_\perp|^2}{2}=\frac{|\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}|^2}{2}.\qquad(1.6.6)$$

这使我们可以根据达朗培尔原理，把向心加速度看作一个与(1.6.5)式反号的、施于单位质量上的附加力。由于这个视离心力可以写成一个有势力，所以，它可包括在(1.4.4)式的力势中，结果得到一个总的力势：

$$\Phi=\phi+\phi_c\ 。$$

剩下的加速度是科氏加速度$2\mathbf{\Omega}\times\mathbf{u}_R$。这是唯一显含流体速度的新项，并且当动量方程写在一个均匀旋转坐标系中时，只有该项引起动量方程的端构变化，因为离心力只不过使力势稍有改变。

如果我们注意到，在旋转坐标系和非旋转坐标系中所出现的空间梯度是相同的，那末，对于均匀旋转坐标系中的观察者，动量方程(1.4.4)变为

$$\rho\left[\frac{d\mathbf{u}}{dt}+2\mathbf{\Omega}\times\mathbf{u}\right]=-\nabla p+\rho\nabla\Phi+\mathscr{F},\qquad(1.6.7)$$

其中$\mathbf{u}$是旋转坐标系中观测到的速度。虽然p、Φ及其变化显然与坐标系无关，但$\mathscr{F}$从一个坐标系到另一个坐标系的不变性，却取决于$\mathscr{F}$与速度场的函数关系。对于可用(1.4.5)式描写的牛顿流体，容易证明：

$$\mathscr{F}(\mathbf{u}_I)=\mathscr{F}(\mathbf{u}_R).\qquad(1.6.8)$$

由于我们总是用旋转坐标系来描述流体运动，因此可以约定，若无特别说明，所有动力学变量都是在旋转坐标系中观测到的。

如果把科氏加速度移到(1.6.7)式右端，对于旋转坐标系中的观察者来说，这是一个附加

力。这个科氏力总是与速度方向垂直，因此它不作功．对于北半球的观察者，科氏力$-2\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{u}$（图1.6.2）似乎是一个使运动的流体元向右偏转的力。

必须注意，任意一个象温度这种标量的总的时间变化率，在旋转坐标系与非旋转坐标系中是相同的．所以，质量守恒方程(1.4.2)和从(1.4.6)到(1.4.25)的各种形式的热力学方程不受坐标系选择的影响，因而可直接用来描述旋转坐标系中的运动。

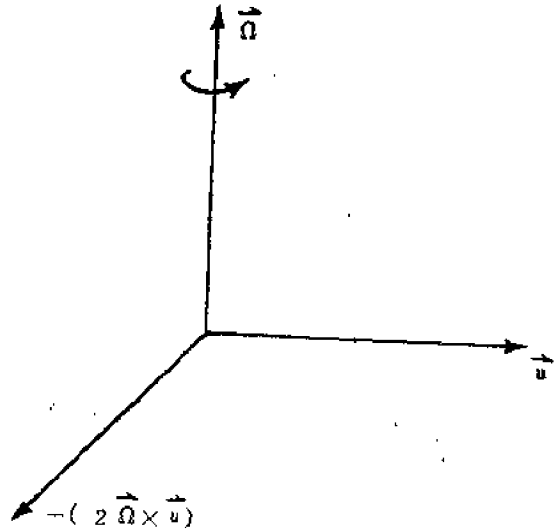


图1.6.2 u、Ω和单位质量的科氏力$(-2\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{u})$之间的关系。

应该强调指出，虽然标量的全导数在两种坐标系中相同，但实质导数的个别分量并非是不变的。尤其是对于任一标量属性 P，可以直接给出

$$\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)_I=\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)_R-(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r})\cdot\nabla p, \quad (1.6.9)$$

而

$$\mathbf{u}_I\cdot\nabla P=(\mathbf{u}_R+\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r})\cdot\nabla P, \tag{1.6.10}$$

由此可以验证：

$$\left(\frac{dP}{dt}\right)_I=\left(\frac{dP}{dt}\right)_R. \tag{1.6.11}$$

1.7 科氏加速度与罗斯贝数

动量方程(1.6.7)右端各项之和，必须同旋转坐标系中观测到的相对加速度与科氏加速度之和（每项乘以密度）相平衡．观测到的加速度之性质，取决于这两种加速度的相对大小。考察两种加速度之比的量级，可对科氏加速度之重要性作出初步估计。为此，我们用特征速度尺度U和特征长度尺度L来表示这两种加速度大小的量级。

科氏加速度可估计为

$$2\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{u}=O(2\Omega U), \tag{1.7.1}$$

而相对加速度为

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt}=O\left(\frac{U^2}{L}\right), \tag{1.7.2}$$

在(1.7.2)式中，我们已假定$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}$与$\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}$的量级相同。

科氏加速度与几何尺度无关，而线性地依赖于U。相对加速度的大小随尺度增加而减小，并与U的平方成正比。相对加速度与科氏加速度之比是

$$\varepsilon=\frac{U}{2\Omega L}. \tag{1.7.3}$$

称它为罗斯贝数．我们在1.3节中曾注意到，对于大尺度运动，ε是个小量．现在也可明显地看出，对于大尺度运动，外力主要产生科氏加速度．当然，加速度必须与合力的方向一致，所以，如图1.7.1所示，为了产生科氏加速度，相对速度必须指向外力的右方。对于大尺度运动，科氏加速度之所以占优势，并非因为科氏加速度变大，而是因为当运动尺度很大对，相对加速度变得很小。以及1.3节中的运动学讨论，我们得出结论，当运动的时间尺度大于旋转周期时，科氏层速度的重要性超过相对加速度。垂直于外力方向运动的流体元的旋转趋势，实际上形成了海洋与大气大尺度运动动力学的特点。

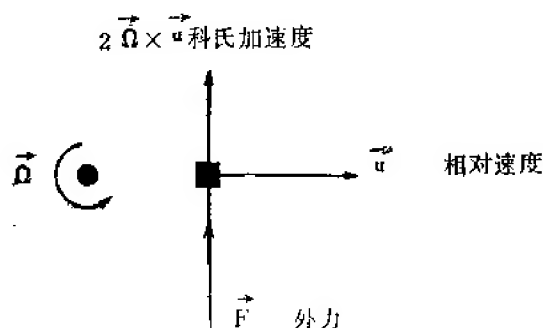


图1.7.1　科氏加速度占优势时力与速度之间的关系。

1.8　包辛内斯克近似*

我们在1.4节中曾经给出过简化的海水状态方程．本节中，我们将从简要讨论海水的热力学性质出发，引进大尺度海洋运动的重要的热力学简化——包辛内斯克近似。这种简化是非常有用的，因为它把方程简化为易于处理的形式。在此给出推导包辛内斯克方程组的分析，并指出简化方程的某些限制。

海水含有许多溶解盐，其中氯化钠占首位。各类盐分在海水中的相对浓度是不变的，所以对动力学性质的讨论来说，只要把它们归并在一起，定义一个盐度S作为盐分浓度的总量度即可。因此海水密度既是温度、压力的函数，也是盐度的函数：

$$\rho=\rho(S,T,p). \tag{1.8.1}$$

Sverdrup(1942)和Fofonoff(1962a)归纳出用S,T和p确定ρ的经验公式。低盐高温区的表层海水密度低达1.02克/厘米^3。在最深的海沟中海水受到的压力最大，密度高达1.07克/厘米^3。所以密度的最大相对变率仅为5%左右，故在ρ作为系数出现的地方，可以用它的平均值ρ_m来代替，这样产生的最大误差不超过2.5%。但是，当密度的变化成为运动场的驱动力项时，用ρ_m代替ρ，意味着完全忽略了密度变化的动力学效应。以下提出的包辛内斯克近似，使我们能够在密度变化只引起微小的修正时可以把它略掉，同时在那些密度变化有动力学意义的地方又能保持它。

1.8.1　绝热静力场　在没有运动对，动量守恒简化为静力方程

$$\nabla p=-g\rho. \tag{1.8.2}$$

所以，等密度面和等压面都是水平的，而ρ,p只能在重力方向，即z方向上变化[1]。

为了描述无运动状态，有必要规定状态方程、控制状态变量的热力过程，和状态变量在某些水平面上的已知值。但是，即使在这种情况下，仍有无数个系统可以满足这些约束，因

* 本节摘译自 G.Verones 的《Large Scale Ocean Circulation》. Advances in Applied Mechanics, 1973. Vol. 13.

(1) 若考虑动量和热量的扩散，则对于旋转系统可以没有相对静止状态。因为一般说来，描写等位势面的方程，不是定常的扩散方程的解，此时产生的缓慢运动叫 Sweet-Eddington 流。这里隐含的假设是，这种运动与系统之驱动力所产生的运动相比可以忽略不计。

为海水是多成分的流体（盐度与温度可以变化）为了规定唯一的静止状态，这里把盐度取为常数 $S=34.85‰$。因此 S 的变化，只发生在与边界介质（大气和洋底等）相互作用的情况下，而且通常与流体的运动有关。

在 S 取为已知常数时，密度只是 T 和 p 的函数。现在热力学第一定律(1.4.12)式可改写为

$$\Delta Q=Td\eta=C_p dT+T(\partial\eta/\partial p)_T dp, \tag{1.8.3}$$

其中η是比熵，C_p是定压比热，ΔQ是单位质量流体得到的加热。对于绝热过程，$\Delta Q=0$，并由(1.8.3)式得出状态变量的垂直变化之间的关系为

$$\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_\eta=-\frac{T}{C_p}\left(\frac{\partial\eta}{\partial p}\right)_T\frac{\partial p}{\partial z}=g\rho\frac{T}{C_p}\left(\frac{\partial\eta}{\partial p}\right)_T, \tag{1.8.4}$$

其中已使用了静力方程以给出各边项。利用热力学关系(1.4.13)，即

$$(\partial\eta/\partial p)_T=-(\partial v/\partial_T)_p, \tag{1.8.5}$$

式中v是比容，则(1.8.4)式可写为

$$(\partial T/\partial z)_\eta=-g\alpha T/C_p, \tag{1.8.6}$$

式中$\alpha=1/v(\partial v/\partial T)_p$是热膨胀系数。

在此只需注意，对于 $S=34.85‰$，$(\partial T/\partial z)_\eta$值的范围从温度为$-2$℃的表面处的0.016℃/1000米，到温度为4℃的10,000米处的0.209℃/1000米。从表面到4,000米处绝热温度变化的典型范围是0.6℃。因此，在海洋上层，绝热温度梯度对于实测的垂直温度梯度是小量，而在深层中二者是可比拟的。

作为 S，T和 p 的函数计算密度的公式，曾由Fofonoff总结过(1962)。所以，根据静力关系(1.8.2)、绝热温度梯度(1.8.6)，和ρ作为T、p之函数($S=34.85‰$)的公式，我们可以在给定的一个水平面上由p和T计算绝热密度场。如前所述，ρ 值的实测范围从表面处的1.02克/厘米^{3}到10,000米处的1.07克/厘米^3。因此绝热密度变化的范围和观测的范围可以比拟。所以，与温度变化不同，密度变化与绝热密度变化差别不大，即引起密度变化的主要影响来自压力场的变化。绝热的静力状态将用有下标 a 的变量表示。

1.8.2 **包辛内斯克方程** 流体的动量守恒方程现在可表示为

$$\rho\frac{d\mathbf{V}}{dt}+2\rho\mathbf{\Omega}\times\mathbf{V}=-\nabla\tilde{p}-\mathbf{g}\tilde{\rho}, \tag{1.8.7}$$

式中压力和密度都已分为绝热部分和扰动（用～标记）部分，且$p=p_a+\tilde{p}$，$\rho=\rho_a+\tilde{\rho}$。绝热的静力场已从右边扣除。在左边，密度作为一个系数出现。利用密度的总变化远小于其平均值这一事实，可将(1.8.7)式近似表示为

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt}+2\mathbf{\Omega}\times\mathbf{V}=-\frac{1}{\rho_m}\nabla\tilde{p}-\mathbf{g}\frac{\tilde{\rho}}{\rho_m}, \tag{1.8.8}$$

式中 $\rho_m\approx1.035$是大洋密度的平均值。(1.8.8)式成立的正式要求是

$$(|\rho-\rho_m|/\rho_m)=\delta\ll1. \tag{1.8.9}$$

状态方程对于绝热状态是线性化的，如下所述。于是有

$$\rho=\rho_a+\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_{p,s}\tilde{T}+\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_{T,s}\tilde{p}+\left(\frac{\partial\rho}{\partial s}\right)_{p,T}\tilde{S}+\cdots\cdots. \tag{1.8.10}$$

所以扰动密度可以写为

$$\tilde{\rho}/\rho_a \approx \tilde{\rho}/\rho_m = -\alpha\tilde{T} + \kappa\tilde{p} + \gamma\tilde{S}, \tag{1.8.11}$$

式中

$$\alpha = \frac{1}{\rho_a}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_{p, S}, \qquad \kappa = \frac{1}{\rho_a}\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_{T, S}, \qquad \gamma = \frac{1}{\rho_a}\left(\frac{\partial\rho}{\partial s}\right)_{p, T}, \tag{1.8.12}$$

若把(1.8.11)代入(1.8.8)式右端，则(1.8.8)的垂直分量在其右端有如下形式

$$-\frac{1}{\rho_m}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial z} + g\alpha\tilde{T} - g\kappa\tilde{p} - g\gamma\tilde{S}. \tag{1.8.13}$$

对于海洋运动，变化的垂直尺度H是10^5厘米，所以第一项的大小是$|\tilde{p}|/H$。等温可压缩系数κ的大小（用cgs值）为4.5×10^{-11}，所以$g\kappa\tilde{p}$项之大小为$|\tilde{p}|/H_s$，这里$H_s\equiv 1/g\kappa$是海水的标高。它的值是2×10^7厘米，即远大于垂直尺度H，所以在状态方程中，气压变化项在动力学上是不重要的，这意味着状态方程(1.8.11)可近似为

$$\tilde{\rho}/\rho_m \approx -\alpha\tilde{T} + \gamma\tilde{S}. \tag{1.8.24}$$

质量守恒方程取以下形式

$$w\frac{\partial\rho_a}{\partial z} + \frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial t} + \mathbf{V}\cdot\nabla\tilde{\rho} + (\rho_a + \tilde{\rho})\nabla\cdot\mathbf{V} = 0. \tag{1.8.15}$$

第一项和第三项与最后一项相比为$O(\delta)$,所以均可略去。第二项包含一个必须规定的时间尺度，若速度尺度和长度尺度分别选为V和L，且$\partial/\partial t$取为$O(V/L)$（即局部变化是由平流引起的),则第二项和第三项之量级相同。另一种方法是根据其他物理过程规定时间尺度，如根据浮力振荡规定时间尺度。在这两种情况下，第二项相对于最后一项均可忽略。所以精确到最低阶时，(1.8.15)式取如下形式：

$$\nabla\cdot\mathbf{V} = 0. \tag{1.8.16}$$

盐度守恒方程可以用它的原始形式：

$$d\tilde{S}/dt = 0. \tag{1.8.17}$$

热力学第一定律是

$$\rho(de/dt) = -p\nabla\cdot\mathbf{V}, \tag{1.8.18}$$

式中e是单位质量的内能。对流体静力绝热状态，第一定律被表示为(1.8.3)的形式，以给出绝热温度梯度(1.8.6)。为方便起见，在此对定压过程用比容、温度和盐度的增量表示内能的变化：

$$\rho\frac{de}{dt} = C_p\frac{d\tilde{T}}{dt} - p\nabla\cdot\mathbf{V} + C_s\frac{d\tilde{S}}{dt}, \tag{1.8.19}$$

式中C_s是盐度变化一个单位所需要的比热。把(1.8.19)式代入(1.8.18)式得到

$$C_p\frac{d\tilde{T}}{dt} + C_s\frac{d\tilde{S}}{dt} = 0. \tag{1.8.20}$$

考虑到盐度守恒(1.8.17),方程(1.8.20)简化为

$$d\tilde{T}/dt = 0. \tag{1.8.21}$$

因为盐度变化只出现在扰动状态，且因为已经计算过绝热温度梯度(1.8.6),所以方程(1.8.17)和(1.8.21)可以适用于扰动温度和盐度。

总之，使用包辛内斯克近似时，方程取如下形式。对于绝热的流体静力状态，有



$$S = 常数, \quad \nabla p = -g\rho, \tag{1.8.22}$$
$$\partial T/\partial z = -g\alpha T/C_p, \quad \rho = \rho(T, p, S),$$

对于扰动状态，有

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} + 2\mathbf{\Omega}\times\mathbf{V} = -\frac{1}{\rho_m}\nabla\tilde{p} - g\frac{\rho_\theta}{\rho_m},$$
$$\nabla\cdot\mathbf{V} = 0, \quad \rho_\theta/\rho_m = -\alpha\theta + \gamma S, \tag{1.8.23}$$
$$\frac{dS}{dt} = 0, \quad \frac{d\theta}{dt} = 0, \quad \frac{d\rho_\theta}{dt} = 0,$$

式中 θ 是位温；S 是盐度相对于某个常值的偏差；ρ_θ 是位势密度，它是 θ 和 S 的线性组合。

1.8.3 包辛内斯克近似的使用及局限性 方程组(1.8.22)和(1.8.23)有时称为包辛内斯克方程组，因为它是用包辛内斯克近似推导出来的，在实验室试验和其他很浅的流体层中，包辛内斯克方程组，对某些类型的运动是很好的近似。

包辛内斯克方程组最大的好处在于：(*i*)滤掉了声波以及其他直接与可压缩现象有关的现象；(*ii*)状态方程对扰动变量来说是线性化的；(*iii*)能量方程的形式也比较简单。位势密度是密度场中有动力学意义的部分，并假定当流体元垂直位移时，其余部分是经过绝热调整的。包辛内斯克近似在海洋研究中有广泛的应用，但是在大尺度海洋环流问题中使用这一近似时有一些局限性。

只要考察深海流体的性质立即可以明白这个问题。表1.8.1给出4,000米深度上两个海水样品的 T，S 和计算的物理量。两个水样的密度值都是1.04593[1]，但是温度和盐度却不同。注意，两个水样有不同的 σ_θ 值和相同的 σ 值。因为现场密度测定说明两个水样有相同的密度，所以只研究位势密度会使人得出下述错误结论：水样1比水样2重，从而根据无粘重力稳定性理论，水样1会沉到较低的水平面上。

表1.8.2也是对位于4,000米处两个水样给出的典型的 T、S 值和计算的物理量，但密度稍有不同，而 T、S 值很不一样。在此情况下，很据现场密度测定，水样2实际上比水样1重，但是根据 σ_θ 值，则水样1似乎比水样2重。值据现场密度，无粘重力稳定性理论予测水样2应下沉，水样1应上升（相对运动）；而根据位势密度，同样的判据给出水样1下沉，水样2上升。在本值中流体质点的密度差很小，但它是深海中典型的实测差异。

表1.8.1

	水 样 1	水 样 2
T(℃)	2.30	2.09
S(‰)	34.90	34.85
σ(克/升)	45.93	45.93
θ(℃)	1.95	1.74
σ_θ(克/升)	27.92	27.89

表1.8.2

	水 样 1	水 样 2
T(℃)	2.21	1.89
S(‰)	34.90	34.85
σ(克/升)	45.95	45.97
θ(℃)	1.86	1.55
σ_θ(克/升)	27.92	27.91

图1.8.1给出Lynn和Reid(1968)由实测资料计算的西大西洋垂直剖面的 σ_θ 的分布。很据位势密度之分布，在赤道以南大值围纬度带上，海底附近1公里左右的海水层结是不稳定的。现场稳定度计算表明，实际上海水是重力稳定的。因此可以得出，在深海中用位势密度确定

(1) 为了避免不必要的小数位，海洋学者习惯上用量 σ，定义为 $\sigma = 1000(\rho - 1)$，这里 ρ 是以克作单位的单位体积的质量。

海水的重力稳定度可能导致错误的结果。

这种深海海水的谬不稳定可以解释如下。在图1.8.2上给出 0 米、2,000米和4,000米处的海水等密度线，当深度（或压力）减小时，等密度线的整个图型反时针旋转．所以，若以顶

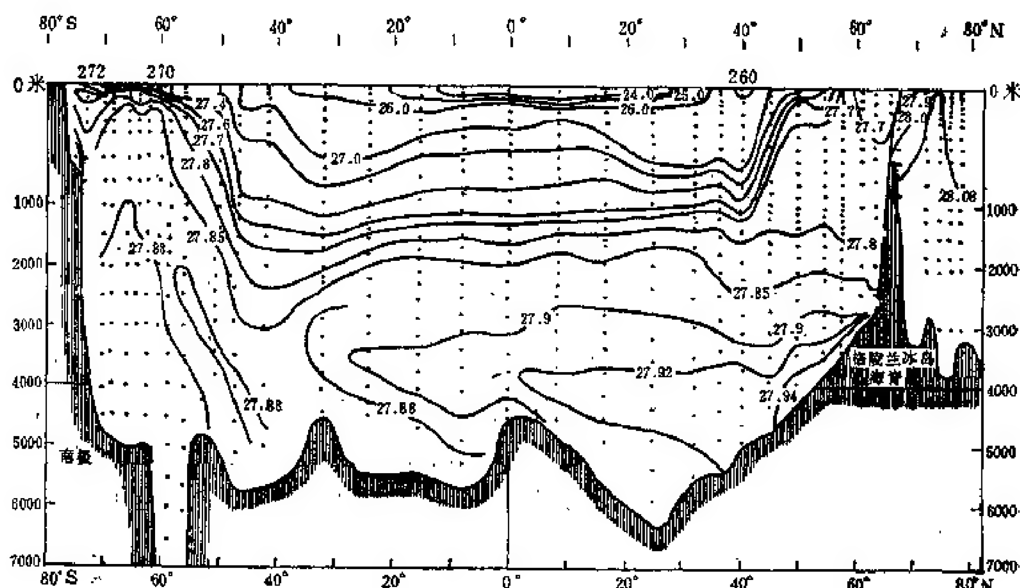


图1.8.1　在大西洋中部脊的经向剖面上，作为纬度与深度之函数的位势密度σ_θ图〔根据 Lynn 和 Reid(1968)〕．

面为参考面（位势密度即如此），则4,000米左右处中性稳定、甚至弱稳定的流体层，似乎是不稳定的。

应当注意，甚至当状态方程是高度非线性（用每层上 σ 的完整表达式来绘出图 1.8.2的曲线）时，仍存在明显的不稳定。要克服这一困难，只有借助于使可变系数（不论它们是 σ 的完整表达式，还是线性化包辛内斯克形式的系数）为压力的函数．如果把(1.8.14)中的 α 和 γ 取为深度的函数来近似考虑压力效应，其误差可以忽略。这时状态方程比α和γ是常数的形式复杂；但它至少是线性的。

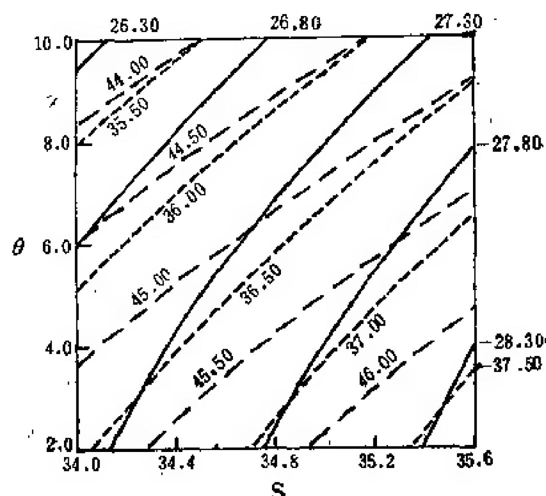


图1.8.2　在位温-盐度面上，深度为 0 米(实线)、2,000米（虚线）和4,000米（断点线）的等密度线。

本节讨论的问题，对象内波这样的流体质点局限于局部地区的运动来说是无关紧要的。但对大尺度环流问题（在这些问题中，流体在极地表面下沉，并最终到达洋底），使用最简单形式的包辛内斯克近似会排除通过理论与观测之比较而直接检验质点轨迹的可能性。这是压力影响不同温度和盐度的海水密度的直接后果。

第二章 基础知识

2.1 涡 度

在任一特定问题中，有适当初、边条件的基本方程的精确解，原则上将给出欲求的全部信息。但是，运动方程是如此复杂，以致难得能找到精确解，而任何简化方程的近似方法，首先需要了解广泛、普遍的物理原理，所作的任何近似必须与这些原理相符。

关于流体运动，有几个对海洋和大气来说是足够普遍和重要的基本事实。这些事实的重要性，在于它们能提醒我们注意某些基本的动力学机制，而这些机制常常以不同的形式出现在我们感兴趣的特定问题中。必须记住，所要描述的事实或定理只是从基本微分方程导出的关系式。在推导一般定理或关系式时，要预先给出有关运动性质的许多条件，并从运动方程中得出某些结果。当然，预先所作的假设越严格，得到的结果就会越可靠。

海洋与大气动力学中一个非常重要的、导出的动力学变量，是涡度矢量 $\boldsymbol{\omega}$，其定义为速度场的旋度，即

$$\boldsymbol{\omega}=\nabla\times\mathbf{u}. \tag{2.1.1}$$

在坐标为 (x,y,z) 和相应的速度分量为 u、v、w 的直坐条标系(图2.1.1)中，从(2.1.1)式得出的涡度分量与速度分量之间的关系为

$$\omega_x=\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}, \tag{2.1.2a}$$

$$\omega_y=\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}, \tag{2.1.2b}$$

$$\omega_z=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{2.1.2c}$$

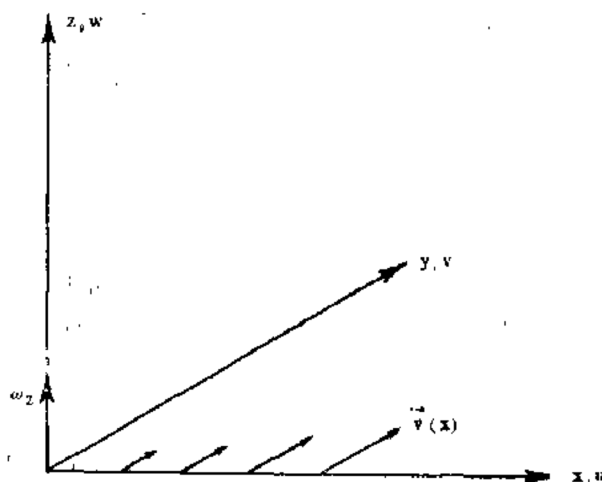


图2.1.1 切变运动的涡度。

作为一个例子，在图 2.1.1 中只有 $v(x)$ 不为零．它产生一个沿 z 轴方向、大小为 $\partial v/\partial x$ 的涡度矢量。对于作均匀旋转的流体，即象固体那样以均匀角速度 $\boldsymbol{\Omega}_0$ 旋转的流体，有

$$\mathbf{u}=\boldsymbol{\Omega}_0\times\mathbf{r}, \tag{2.1.3}$$

而涡度为

$$\boldsymbol{\omega}=2\boldsymbol{\Omega}_0. \tag{2.1.4}$$

在这种简单的情况下，涡度仅是流体旋转角速度的两倍。

这个概念在普遍情形下的推广，由下述斯托克斯定理得出，即

$$\iint_A \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{n}\,dA=\oint_c \mathbf{u}\cdot d\mathbf{r}, \tag{2.1.5}$$

其中 C 是包围面积 A 的一条封闭曲线，A 上每一点的法线方向为$\mathbf{n}$（图 2.1.2）.在小面元δA范围内，我们可用中值定理写出

$$\overline{\omega}_n=\frac{\overline{u}_c l}{\delta A}, \tag{2.1.6}$$

图2.1.2 用于计算角速度与涡度之关系的回路。

其中 $\overline{\omega}_n$ 是垂直于面元 δA 的涡度矢量之平均值，而 $\overline{u}_c$是绕长度为 l 的封闭曲线 C 的平均切向速度。如果 δA 是一个半径为 r_0 的小圆，则

$$\overline{\omega}_n=\overline{u}_c\frac{2\pi r_0}{\pi r_0^2}=2\frac{\overline{u}_c}{r_0}, \tag{2.1.7}$$

所以，平均涡度 $\overline{\omega}_n$ 是平均角速度 $\overline{u}_c/r_0$ 的两倍。必须注意，流体运动有涡度，并不一定要求其轨迹是曲线。图 2.1.1 所示的方向相同的切变流就是一个例子。在非旋转的惯性坐标系中所观测到的涡度 $\boldsymbol{\omega}_a$，叫作绝对涡度，它可直接定义为非旋转坐标系中所观测到的速度之旋度，即

$$\boldsymbol{\omega}_a=\nabla\times\{\mathbf{u}+\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}\}=\boldsymbol{\omega}+2\boldsymbol{\Omega}, \tag{2.1.8}$$

其中 $\boldsymbol{\omega}$ 是相对涡度，即相对速度的旋度。因此，每个流体元的绝对涡度等于行星涡度 2Ω 与相对涡度 ω 之和。这两种涡度的相对大小可以初步估计如下。垂直于地表面的行星涡度分量为科氏参数

$$f=2\Omega\sin\theta, \tag{2.1.9}$$

其中 θ 是我们讨论的流体元所在的纬度。相对涡度垂直分量的相应的估计值，为与地面相切的速度之特征值（水平速度）除以 L,或

$$\omega_n=O\left(\frac{U}{L}\right), \tag{2.1.10}$$

它与 f 之比为

$$\frac{\omega_n}{f}=\frac{U}{fL}=\frac{U}{2\Omega L\sin\theta}=\frac{\varepsilon}{\sin\theta}=R_0, \tag{2.1.11}$$

其中 R_0 定义为局部罗斯贝数。在赤道以外地区，$\sin\theta$ 为 $O(1)$，所以，小罗斯贝数运动之性质是相对涡度远小于行星涡度。这个事实的一个直接后果是，大尺度运动几乎总是存在着涡度，并且它们的涡度主要是行星涡度。

因涡度定义为速度场的旋度，由此可知，

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\omega}=\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{u})=0, \tag{2.1.12a}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\omega}_a=\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{u}_I)=0, \tag{2.1.12b}$$

所以涡度矢量是无辐散的。如图 2.1.3 所示，涡线或涡丝是流体内的这样一种线，其中每一点的切线方向与该点的涡度矢量相平行。与行星涡度相联系的涡丝是处处平行于旋转轴的直线。与绝对运动有关的涡丝使这种均匀涡丝场变形的程度，取决于相对运动的强度。

通过一条闭曲线的所有涡丝所组成的曲面构成涡管（图 2.1.4）。由于涡丝的方向随地点而改变，因此，在涡管的两个不同位置处，涡管边界曲线 C' 的长度和方向都将与 C 不同。但是根据定义，在涡管表面的所有点，都不可能有穿过管面的涡度分量。并且，由于 $\boldsymbol{\omega}_a$ 是无辐散的，对于任意体积 V，有

$$\iiint_V dV\nabla\cdot\boldsymbol{\omega}_a=0 \tag{2.1.13}$$

现在我们来考虑有限长涡管所构成的积分体积，如图 2.1.5 所示，涡管在 C 和 C' 处分别被面积为 A 和 A' 的平面截断。根据散度定理，有

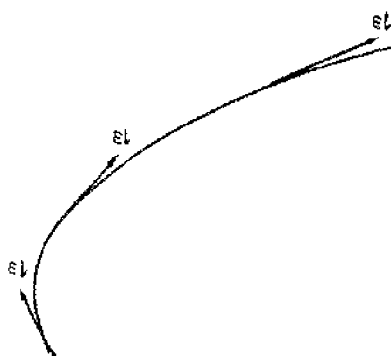


图2.1.3 涡丝

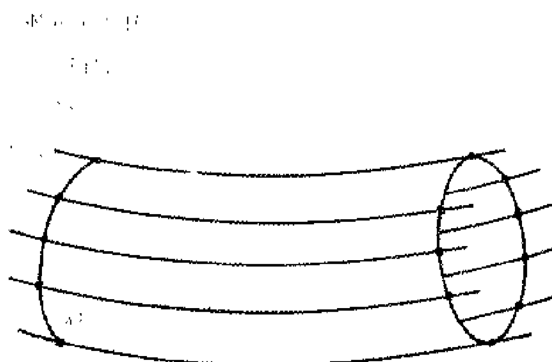


图2.1.4 涡管

$$\iiint_V dV\nabla\cdot\boldsymbol{\omega}_a=\iint_A \boldsymbol{\omega}_a\cdot\mathbf{n}dA, \tag{2.1.14}$$

其中 $\mathbf{n}$ 是 V 的边界面上各点的外法线。在涡丝组成的圆柱面上 $\boldsymbol{\omega}_a\cdot\mathbf{n}$ 恒为零，故从(2.1.13) 式和(2.1.14)式可得出

$$0=\iint_A \boldsymbol{\omega}_a\cdot\mathbf{n}dA+\iint_{A'} \boldsymbol{\omega}_a\cdot(-\mathbf{n}')dA, \tag{2.1.15}$$

其中 $-\mathbf{n}'$ 是面 A' 的外法线，或

$$\iint_A \boldsymbol{\omega}_a\cdot\mathbf{n}dA=\iint_{A'} \boldsymbol{\omega}_a\cdot\mathbf{n}'dA. \tag{2.1.16}$$

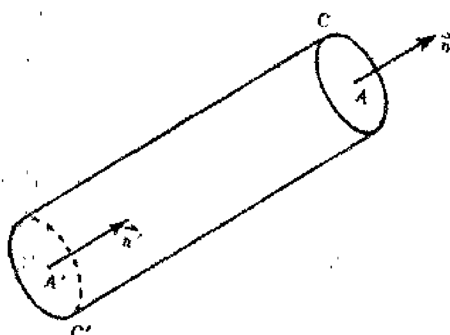


图2.1.5 在面积为 A 和 A' 的两个截面处被截断的涡管，用它来计算每一截面处的涡度通量。

注意，$\mathbf{n}$ 和 $\mathbf{n}'$ 与涡管轴具有相同的方向。我们定义涡管的绝对强度或绝对通量为

$$\Gamma_a=\iint \boldsymbol{\omega}_a\cdot\mathbf{n}dA\ , \tag{2.1.17}$$

并且，根据上述纯运动学的考虑，由 (2.1.16) 式得出，涡管的强度沿涡管是常数。因此，绝对涡管和组成涡管的涡丝，不可能终止于流体内部。相对涡度的涡丝也可用来定义相对涡管，并应用完全类似于上述无辐散矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 的论证，可说明相对涡管的强度沿其涡管也是个常数。而且，相对涡度的涡丝也一定穿过流体，并只能终止在包围流体的界面上，或自身闭合。

通过曲面 A 的绝对涡度通量 Γ_a，与相对涡度通量 Γ 的关系为

$$\Gamma_a=\iint_A \boldsymbol{\omega}_a\cdot\mathbf{n}dA=\iint_A \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{n}dA+\iint_A 2\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{n}dA=\Gamma+\iint_A 2\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{n}dA. \tag{2.1.18}$$

由于 $\boldsymbol{\Omega}$ 是不随空间变化的矢量，所以

$$\Gamma_a=\Gamma+2\Omega A_n, \tag{2.1.19}$$

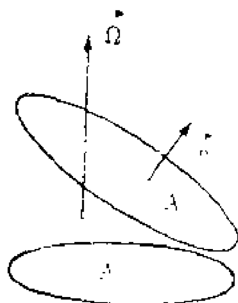


图2.1.6 A_n是面积A在垂直于$\boldsymbol{\Omega}$的平面上的投影。

其中 A_n（如图 2.1.6 所示）是 A 投影在垂直于 $\boldsymbol{\Omega}$ 的平面上的面积。如果我们把行星涡度场视为每条涡丝都平行于 $\boldsymbol{\Omega}$ 的一个均匀的直线涡丝场，那末，Γ_a 与 Γ 之差与穿过面积 A 的行星涡丝的数量成正比，或等价地，与 A 的周线 C 所包围的涡丝数量成正比。

2.2 环流

根据斯托克斯定理，通过一个由完全可伸缩的曲线 C 所包围的开曲面 A 的绝对涡度通量为

$$\Gamma_a=\iint_A \boldsymbol{\omega}_a\cdot\mathbf{n}dA=\oint_C \mathbf{u}_I\cdot d\mathbf{r}. \tag{2.2.1}$$

$\mathbf{u}_I$ 沿 C 的线积分叫作速度 $\mathbf{u}_I$ 的环流。同样，相对速度环流为

$$\oint_C \mathbf{u}\cdot d\mathbf{r}=\iint_A \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{n}dA=\Gamma. \tag{2.2.2}$$

因此，环流是衡量涡管强度的另一种方法。现在考虑当 C 是一条物质曲线（即它总是由同样一些流体元组成，因而是随流体一起移动的曲线）时，环流 Γ 的变化率：

$$\frac{d\Gamma}{dt}=\frac{d}{dt}\oint_C \mathbf{u}\cdot d\mathbf{r}=\oint_C \frac{d\mathbf{u}}{dt}\cdot d\mathbf{r}+\oint_C \mathbf{u}\cdot\frac{d}{dt}(d\mathbf{r}). \tag{2.2.3}$$

（2.2.3）式中最后一项包含连结 C 上相邻流体元的微分线元的变化率。如图 2.2.1 所示，考虑 C 上位置差为 $\Delta\mathbf{r}$ 的两个流体元。显然，在 Δt 时间内，只有当 Q 点的速度与 P 点的速度不同时，$\Delta\mathbf{r}$ 的长度和方向才会改变，即

$$\Delta\mathbf{r}(t+\Delta t)-\Delta\mathbf{r}(t)=(\Delta\mathbf{u})\Delta t, \tag{2.2.4}$$

或在 $\Delta t\to 0$ 时，

$$\frac{d}{dt}d\mathbf{r}=d\mathbf{u}. \tag{2.2.5}$$

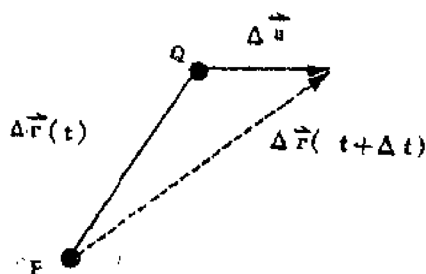


图2.2.1 无限小线元端点之速度差确定该线元的变化。

这一步完全取决于 C 是一条物质曲线，所以 $d\mathbf{r}$ 的变化率由流体速度唯一确定。于是我们可把（2.2.3）式写为

$$\frac{d\Gamma}{dt}=\oint_C \frac{d\mathbf{u}}{dt}\cdot d\mathbf{r}+\oint_C \mathbf{u}\cdot d\mathbf{u}=\oint_C \frac{d\mathbf{u}}{dt}\cdot d\mathbf{r}+\frac{1}{2}\oint_C d|\mathbf{u}|^2$$

$$=\oint_C \frac{d\mathbf{u}}{dt}\cdot d\mathbf{r}, \tag{2.2.6}$$

其中第二个积分因是全微分沿一闭曲线的积分，故该项为零。因此，相对环流的变化率等于相对加速度沿 C 的线积分。从（1.6.7）式得出

$$\frac{d\Gamma}{dt}=-\oint_C(2\mathbf{\Omega}\times\mathbf{u})\cdot d\mathbf{r}-\oint_C\frac{\nabla p}{\rho}\cdot d\mathbf{r}+\oint_C\frac{\mathscr{F}}{\rho}\cdot d\mathbf{r},\tag{2.2.7}$$

这是因为，若力势 ϕ 为单值函数，则 $\nabla\phi$ 沿闭曲线 C 的线积分一定为零。

根据 (2.2.7) 式，引起 Γ 变化的机制（即在运动过程中可以改变相对涡管强度的机制）有三种。它们是：(1)单位质量流体所受的科氏力的环流；(2)单位质量流体所受的压力梯度力的环流；(3) $\mathscr{F}$ 的环流。

(1) 科氏力的效应，容易用下例来说明。考虑一条如图 2.2.2 所示的曲线 C，其 Ω 的方向是从里朝外。假定 C 上的相对速度矢量处处指向曲线的外法线方向。于是，若暂不考虑其他因子的影响，则科氏力效应将使各流体元向右偏转。这有助于产生一个沿顺时针方向绕 C 的相对环流，即 $\frac{d\Gamma}{dt}<0$，这是(2.2.7)式的要旨。

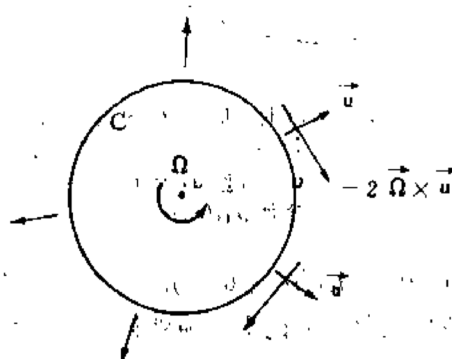


图2.2.2 辐射状流 u 一般引起顺时针方向的科氏力和顺时针环流。

描写科氏力对相对环流变化之贡献的另一个方法是利用下面这个恒等式：

$$-(2\mathbf{\Omega}\times\mathbf{u})\cdot d\mathbf{r}=-2\mathbf{\Omega}\cdot(\mathbf{u}\times d\mathbf{r})$$
$$=-2\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{n}_A u_\perp dr,\tag{2.2.8}$$

其中 $u_\perp$ 是垂直于 $d\mathbf{r}$ 的速度分量的大小，$\mathbf{n}_A$ 是平行于 $\mathbf{u}\times d\mathbf{r}$ 的单位矢量。在 dt 时间内，$u_\perp$ 对 $d\mathbf{r}$ 的影响是使与 $d\mathbf{r}$ 邻接的面积增加，其大小为

$$\delta A=dr\,dl,\tag{2.2.9}$$

其中

$$dl=u_\perp dt.\tag{2.2.10}$$

垂直于该微分面元的单位矢量为 $\mathbf{n}_A$；因此，C 所包围的面积在 C 上 P 点处的增加率为

$$\frac{d}{dt}\delta A=u_\perp dr,\tag{2.2.11}$$

所以 (2.2.8)式变为

$$-(2\mathbf{\Omega}\times\mathbf{u})\cdot d\mathbf{r}=-2\Omega\frac{d}{dt}\delta A_n,\tag{2.2.8'}$$

其中 δA_n 是 C 所包围的、垂直于 $\mathbf{\Omega}$ 的面积增量。沿着 C 对所有的线元积分，得

$$-\oint_C 2\mathbf{\Omega}\times\mathbf{u}\cdot d\mathbf{r}=-2\Omega\frac{dA_n}{dt},\tag{2.2.12}$$

其中 A_n 是被 C 包围的总面积在垂直于 $\mathbf{\Omega}$ 的平面上的投影。因此，行星涡度 $\mathbf{\Omega}$ 之存在和面积 A_n 之增加，导致相对环流减小。通过回路 C 的相对涡度通量（在不存在其他影响时）的减小量，与该回路包含的行星涡丝数的增加量成正比。在图 2.2.3 所示的例子中，由 C 包围的面积扩大了，它所包含的行星涡丝增多，因此有产生绕 C 的负相对速度（顺时针）环流之趋势。如果回路包围的面积不增大，但是该面倾向于与 Ω 相垂直，致使更多的行星涡丝被 C 包围，那末也能得到同样的结果。这个现象恰如金属线圈在均匀磁场中运动时生成感应电流的情况。在我们的例子中，是回路 C 在均匀的行星涡度场中运动时，生成绕 C 的感应相对涡

度。相对运动通过行星涡度的诱生而得到涡度的能力，对于大尺度运动具有特别重要的意义，并且解释了为什么大尺度运动（其自然边界内包含着许多行星涡丝）几乎总是存在着相对涡度。

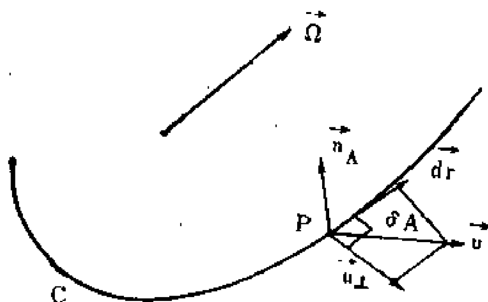


图2.2.3 在时间间隔 dt 内，对于 C 上每一个线元 dr，垂直于 C 的 $\mathbf{u}$ 之分量 $\mathbf{u}_\perp$ 使 C 包围的面积增加 $u_\perp drdt$。

（2） 对相对环流变化率有贡献的、（2.2.7）式右端第二项的含义，可以通过斯托克斯定理改写其形式，使之更便于理解：

$$-\oint_C \frac{\nabla p}{\rho}\cdot d\mathbf{r} = -\iint_A \nabla\times\left(\frac{\nabla p}{\rho}\right)\cdot\mathbf{n}dA$$

$$=\iint_A \frac{\nabla\rho\times\nabla p}{\rho^2}\cdot\mathbf{n}dA. \qquad (2.2.13)$$

如果等压面和等密度面不重合，那末流体的状态叫作斜压的。若流体是斜压的，则斜压矢量 $(\nabla\rho\times\nabla p)/\rho^2\neq 0$，并且，只要该矢量在面 A 上的平均垂直分量不为零，就会产生相对环流的变化。为说明这种机制，考虑图 2.2.4 所示的简单而基本的情况，其中假定 $\nabla\rho$ 和 ∇p 是

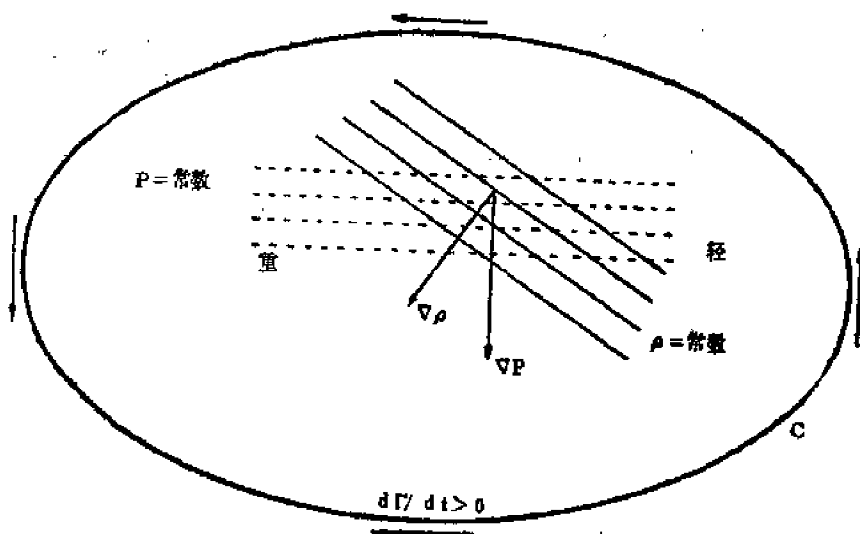


图2.2.4 斜压项产生的涡度。相交的等 p 面和等 ρ 面有增加 C 上环流的趋势。

位于面 A 内的常矢量。在图示的情况下，右边的轻流体与左边的重流体受到同样大小的、向上的压力梯度力 $-\nabla p$。因此，轻流体（在不受其他因子影响时）比重流体有更快的上升趋势，按照 (2.2.7) 式和(2.2.13)式，结果产生一个绕 C 的反时针环流。如果密度场具有哪怕是最小的与速度场对流的趋势，那末合成环流将有助于使等密度面与等压面重合。

注意，如果等 p 面与等 ρ 面重合(即若流体是正压的)，那末有可能找到 p 和 ρ 之间的关系，使得

$$\rho=\rho(p). \qquad (2.2.14)$$

如果上式在 C 上成立，则有

$$\oint_C \frac{\nabla p\cdot d\mathbf{r}}{\rho}=\oint_C \frac{dp}{\rho(p)}=\int_{p(A)}^{p(A)}\frac{dp}{\rho(p)}=0, \tag{2.2.15}$$

因为此时，(2.2.15)式是单变量函数在端点重合的区间上的积分。

（3） 引起相对环流 Γ 变化的最后一项，是 $\mathscr{F}$ 沿 C 的线积分。一般，难以给出摩擦效应的确切解释。在 $\mathscr{F}$ 由(1.4.5)式给出的情况下，如果运动学粘性系数 $\nu=\mu/\rho$ 在 C 上为常数，则有

$$\oint_C \frac{\mathscr{F}}{\rho}\cdot d\mathbf{r}=\nu\oint_C(\nabla^2\mathbf{u})\cdot d\mathbf{r}. \tag{2.2.16}$$

注意，

$$\nu\oint\nabla^2\mathbf{u}\cdot d\mathbf{r}=-\oint(\nabla\times\boldsymbol{\omega})\cdot d\mathbf{r}, \tag{2.2.17}$$

这是因为用了

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{u})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u})-\nabla^2\mathbf{u}. \tag{2.2.18}$$

为说明问题，考虑如图 2.2.5 所示的情况。在该例中，C 上 P 点附近的涡度只在 z 方向有一个分量 ω_z，而 x 轴指向 C 在 P 点的切线方向。对于这种情况，有

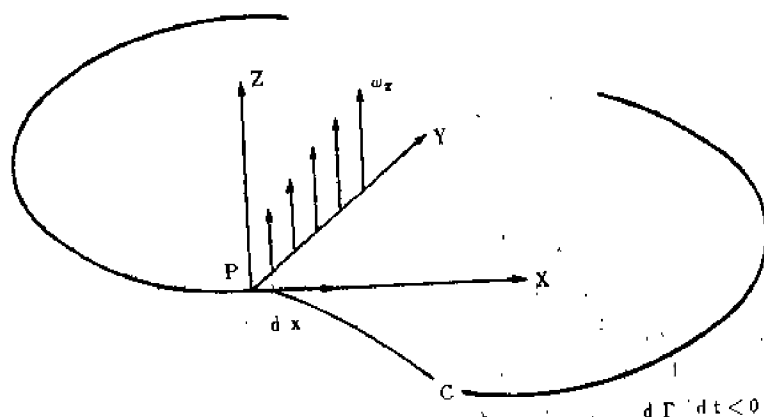


图2.2.5　若 P 点的涡度如图所示从 C 向内增加，则涡度将从 C 内的流体向外扩散。

$$-\nu(\nabla\times\boldsymbol{\omega})\cdot d\mathbf{r}=-\nu\frac{\partial\omega_z}{\partial y}dx, \tag{2.2.19}$$

所以，粘性效应是减小被 C 包围的涡管强度，其减小量与 C 上的涡度梯度成正比，如果 C 所包含的涡丝在回路内比回路外强，那末涡管强度将减小。这与由边界上温度梯度造成的热量从一个区域的流出是完全相似的。同样，C 内的涡度因粘性作用而有沿涡度梯度方向、并通过组成 C 的物质元进行扩散的趋势。

2.3 凯尔文定理

由于根据(2.1.9)式有

$$\Gamma_a=\Gamma+2\Omega A_n, \tag{2.3.1}$$

所以从(2.2.7)和(2.2.12)式得出

$$\frac{d\Gamma_a}{dt}=-\oint_C\frac{\nabla p}{\rho}\cdot d\mathbf{r}+\oint_C\frac{\mathscr{F}}{\rho}\cdot d\mathbf{r}. \tag{2.3.2}$$

如果(1)C上的流体是正压的，并且

(2)C上的摩擦力为零，

那末跟随运动的绝对环流守恒，即

$$\frac{d\Gamma_a}{dt}=0. \tag{2.3.3}$$

这就是凯尔文定理，我们在许多场合会讲到它的应用。由于Γ_a为行星涡管强度与相对涡管强度之和，所以其中一方之减小将引起另一方相应的增加。因此，凯尔文定理表明，为使绝对涡管强度守恒，涡度诱发机制是造成相对涡度与行星涡度之间转换的原因。所以，当C随着流体运动和变形时，它总是构成有固定绝对涡度强度的涡管边界。

如果涡管的横截面减小，那末涡管强度的大小，即管中的涡度ω_a，必与涡管横截面成反比地增加。

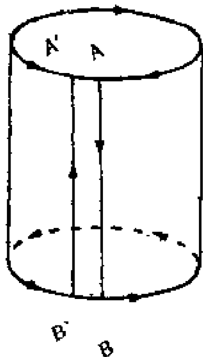


图2.3.1 选一周线作曲面$BAA'B'$的周界，以证明涡丝与流体一起运动。

现在来考虑图2.3.1中的绝对涡管，它最初被一个圆柱形的曲面裹住，该曲面的四个角为A、A'、B和B'。由于该曲面在最初的瞬间包住了涡管，因此，通过该面的涡度通量为零，沿回路$A\to B\to B'\to A'\to A$的环流一定也为零。现在让该曲面与流体一起运动。如果凯尔文定理(2.2.2)式成立，那末沿回路的环流一定保持为零。这就是说，绝对涡丝不能穿过该曲面。在A'与A、B'与B分别接合的极限情况下，绝对涡管面仍然与物质元组成的曲面重合。换句话说，当凯尔文定理成立时，绝对涡管与流体一起运动。具有无限小横截面的涡管之极限情况，给出更进一步的结果：当凯尔文定理成立时，个别的绝对涡丝仍是物质线，即一条曾经是绝对涡丝的线永远是涡丝，所以，绝对涡丝与流体一起运动。

正如我们所看到的，虽然有可能构想出相对涡度的涡管和涡丝，但是根据凯尔文定理，只有绝对涡管的强度才能作为凯尔文定理的结果；并且，只有绝对涡丝才能保持与物质线重合。

粘性使涡丝离开原来的流体元而耗散掉，而斜压效应实际上能够产生新的涡丝。

2.4 涡度方程

环流是一个量度涡度的标量。由于涡度是一个矢量，所以讨论环流只能给出涡度场矢量动力学的一个不完善的图象。为进一步研究涡度的矢量性质，我们现在来直接推导相对涡度矢量方程。

利用矢量恒等式

$$\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{u}=(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}-\nabla\frac{(|\mathbf{u}|^2)}{2}, \tag{2.4.1}$$

可把动量方程改写为

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+(2\mathbf{\Omega}+\boldsymbol{\omega})\times\mathbf{u}=-\frac{\nabla p}{\rho}+\nabla\left\{\Phi-\frac{|\mathbf{u}|^2}{2}\right\}+\frac{\mathscr{F}}{\rho}。\tag{2.4.2}$$

为得出 $\boldsymbol{\omega}$ 的方程，我们对(2.4.2)式取旋度，得到

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t}+\nabla\times\{(2\mathbf{\Omega}+\boldsymbol{\omega})\times\mathbf{u}\}=\frac{\nabla\rho\times\nabla p}{\rho^2}+\nabla\times\left(\frac{\mathscr{F}}{\rho}\right)。\tag{2.4.3}$$

对于任意两个矢量 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$，有

$$\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\mathbf{A}\nabla\cdot\mathbf{B}+(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}-\mathbf{B}\nabla\cdot\mathbf{A}-(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B},\tag{2.4.4}$$

所以，

$$\nabla\times\{(2\mathbf{\Omega}+\boldsymbol{\omega})\times\mathbf{u}\}=(2\mathbf{\Omega}+\boldsymbol{\omega})\nabla\cdot\mathbf{u}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)(2\mathbf{\Omega}+\boldsymbol{\omega})-(2\mathbf{\Omega}+\boldsymbol{\omega})\cdot\nabla\mathbf{u},\tag{2.4.5}$$

这是由于 $\boldsymbol{\omega}+2\mathbf{\Omega}$ 是无辐散的。因此，(2.4.3) 式变为

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}=\boldsymbol{\omega}_a\cdot\nabla\mathbf{u}-\boldsymbol{\omega}_a\nabla\cdot\mathbf{u}+\frac{\nabla\rho\times\nabla p}{\rho^2}+\nabla\times\frac{\mathscr{F}}{\rho},\tag{2.4.6}$$

其中，

$$\boldsymbol{\omega}_a=\boldsymbol{\omega}+2\mathbf{\Omega}.\tag{2.4.7}$$

跟随流体元的绝对涡度变化率是由 (2.4.6) 式右端四项产生的。最后两项是斜压矢量和摩擦力的旋度；我们在前面关于环流变化率的讨论中，对上述涡度源已经作了解释。至于(2.4.6)式右端前两项，则应作进一步的讨论。

考虑流体中的任意点 P，并选一个局部直角坐标系，象图 2.4.1 所示的那样，使坐标系的 z 轴在 P 点与通过该点的绝对涡丝相切。

在这样一个坐标系中，P 点的 $\boldsymbol{\omega}_a$ 就是$\omega_a\mathbf{k}$，其中 $\mathbf{k}$ 是沿 z 轴的单位矢量。故在 P 点，(2.4.6)式右端的前两项为

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\omega}_a\cdot\nabla\mathbf{u}-\boldsymbol{\omega}_a\nabla\cdot\mathbf{u}\\&=\omega_a\frac{\partial}{\partial z}\{u\mathbf{i}+v\mathbf{j}+w\mathbf{k}\}-\omega_a\mathbf{k}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right\}\\&=\mathbf{i}\omega_a\frac{\partial u}{\partial z}+\mathbf{j}\omega_a\frac{\partial v}{\partial z}-\mathbf{k}\omega_a\left\{\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right\},\end{aligned}\tag{2.4.8}$$

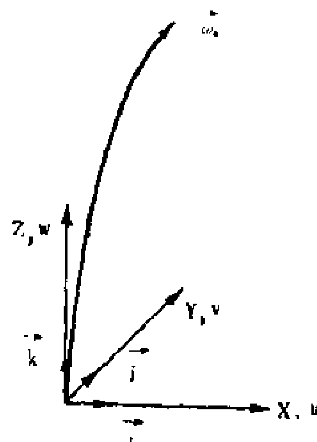


图2.4.1 用于解释(2.4.6)式的局地坐标系。

其中 $\mathbf{i}$ 和 $\mathbf{j}$ 分别为沿 x 轴和 y 轴的单位矢量。与 $\mathbf{i}$、$\mathbf{j}$ 和 $\mathbf{k}$ 平行的相对速度分量分别为 u、v 和 w。

现在来考虑与 z 轴平行（即原先的涡度方向）的涡度分量之变化率。按照 (2.4.8) 式，所讨论的项对 z 分量变化率之贡献（在无斜压效应和摩擦效应时）为

$$\frac{d\omega_z}{dt}=-(\omega_a)_z\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right),\tag{2.4.9}$$

它就是原有的总涡度与垂直于 $\boldsymbol{\omega}_a$ 的平面中速度分量辐合的乘积。如果辐合是正的（即若 $\partial u/\partial x+\partial v/\partial y<0$），那末绝对涡丝将互相接近而聚在一起，按照凯尔文定理，局部涡管横截面之减小，将使涡度矢量的大小增加。事实上可以证明，

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{A_{\perp}}\frac{dA_{\perp}}{dt}\ , \tag{2.4.10}$$

其中 $A_{\perp}$ 是 xy 平面中的微分面积元．因此，由于 Ω 为常矢量，故(2.4.9)可以写为

$$\frac{d(\omega_a)_z}{dt}=-\frac{(\omega_a)_z}{A_{\perp}}\frac{dA_{\perp}}{dt}\ ,$$

或

$$\frac{d}{dt}[(\omega_a)_z A_{\perp}]=0\ , \tag{2.4.11}$$

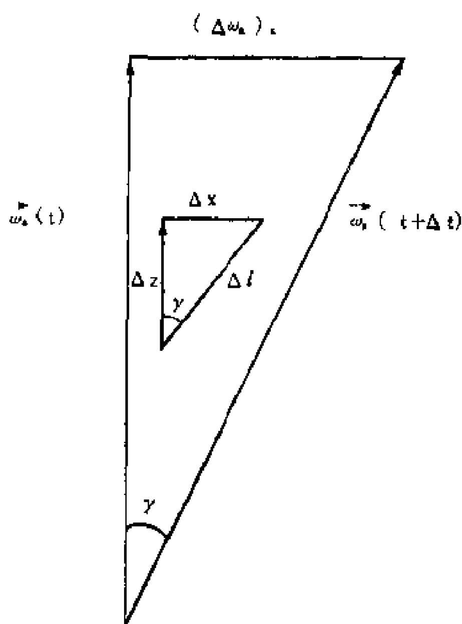


图2.4.2　t 和 Δt 时刻的涡度矢量，表明$\vec{\omega}$有与最初平行于Ω 的物质元倾斜同样角度γ 的趋势。

显然，它与凯尔文定理所给出的结果是相同的。这种使涡丝方向上的涡度分量增加的机制称为涡管伸长，这是因为在几乎不可压的流体中，在涡管横截面减小时，物质管必沿其长度方向伸长，才能保持涡管体积不变。

但是，从(2.4.8)式可以看到，整个情况并非如此。考虑 x 方向（即垂直于涡丝方向）涡度分量的增长率。按照(2.4.8)式，该分量的增长率为 $\omega_a\partial u/\partial z$，所以，经过 Δt 时间后（见图2.4.2），

$$\frac{(\Delta\omega_a)_x}{\omega_a}=\frac{\partial u}{\partial z}\Delta t=\frac{\Delta x}{\Delta z}=\tan\gamma\ , \tag{2.4.12}$$

其中 Δx 是物质线元 Δl 在 x 轴上的投影，而该线元最初曾与 ω_a 平行，并具有 Δz 的长度．该物质线元由于速度场的切变而倾斜一个角度 γ，而(2.4.9)式启示我们，与 x 轴平行的新涡度，是 $t+\Delta t$ 时刻涡度矢量的 x 分量，它本身也有一个与物质线相同的倾角。这只不过表明这样一个事实，即在正压和无摩擦的情况下，绝对涡丝与流体一起运动。同样的论证也适用于 y 方向。

因此，相对涡度的变化率等于下述各项之和：

(i)　由斜压性产生的涡度；

(ii)　摩擦的耗散作用；

(iii)　涡管伸长，它通过涡丝的辐合而改变平行于涡丝方向的涡度；

(iv)　由垂直于绝对涡丝之速度分量沿涡丝方向的变化所造成的涡度倾斜。

必须指出，在有行星涡度存在的情况下，如果 ω 最初为零，则由相对速度造成的流体涡线之扭曲和辐合（如果允许发生的话），就会产生相对涡度。

2.5　位势涡度（位涡）

因为涡度方程直接研究涡度的矢量性质，所以它能清楚地说明许多问题。但它主要是说明涡度如何变化，而不是作为制约涡度变化的一个有用的约束关系。凯尔文定理是比较有用

的，但它是研究一个标量的积分定理，并需要知道物质面在流体中详细的演变过程。其次，它只适用于没有斜压影响的情况，这大大地限制了它在海洋和大气中的应用。*Ertel*(1942)得出一个漂亮的、而且非常有用的定理，它对涡度提供一个约束关系，这克服了上述许多而难。由于 Ω 是一个常矢量，所以涡度方程(2.4.6)可写成

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}_a}{dt}=\boldsymbol{\omega}_a\cdot\nabla\mathbf{u}-\boldsymbol{\omega}_a\nabla\cdot\mathbf{u}+\frac{\nabla\rho\times\nabla p}{\rho^2}+\nabla\times\frac{\mathscr{F}}{\rho}. \tag{2.5.1}$$

连续方程（1.4.2）式给出

$$\nabla\cdot\mathbf{u}=-\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}, \tag{2.5.2}$$

所以，可从(2.5.1)式消去 $\nabla\cdot\mathbf{u}$ 而得到

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho}\right)=\left(\frac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho}\cdot\nabla\right)\mathbf{u}+\nabla\rho\times\frac{\nabla p}{\rho^3}+\left(\nabla\times\frac{\mathscr{F}}{\rho}\right)\frac{1}{\rho}. \tag{2.5.3}$$

现在考虑流体的某标量属性 λ，它满足如下形式的方程：

$$\frac{d\lambda}{dt}=\Psi\ , \tag{2.5.4}$$

其中 Ψ 是属性 λ 的一个未加规定的源。例如，对于大气运动，λ 可以是位涡，而 Ψ 则将是（1.4.18）式右端项之集合。或者，对于其状态方程，可用（1.4.20）式来近似表示的液体，λ 可选为密度，在这种情况下，Ψ 就由（1.4.22）式右端给出。

现在有

$$\frac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho}\cdot\frac{d}{dt}\nabla\lambda=\left(\frac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho}\cdot\nabla\right)\frac{d\lambda}{dt}-\left[\left(\frac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho}\cdot\nabla\right)\mathbf{u}\right]\cdot\nabla\lambda, \tag{2.5.5}$$

上式可通过把（2.5.5）式展成分量形式来验证，把这作为一个习题留给读者。如果用 $\nabla\lambda$ 点乘(2.5.3)式，则得

$$\nabla\lambda\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho}\right)=\left[\left(\frac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho}\cdot\nabla\right)\mathbf{u}\right]\cdot\nabla\lambda+\nabla\lambda\cdot\left\{\frac{\nabla\rho\times\nabla p}{\rho^3}\right\}+\frac{\nabla\lambda}{\rho}\cdot\left\{\nabla\times\frac{\mathscr{F}}{\rho}\right\}, \tag{2.5.6}$$

把(2.5.5)和(2.5.6)式相加，并利用(2.5.4)式便得

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho}\cdot\nabla\lambda\right\}=\frac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho}\cdot\nabla\Psi+\nabla\lambda\cdot\left[\frac{\nabla\rho\times\nabla p}{\rho^3}\right]+\frac{\nabla\lambda}{\rho}\cdot\left\{\nabla\times\frac{\mathscr{F}}{\rho}\right\}. \tag{2.5.7}$$

如果

（1） 对于每个流体元来说，λ 是守恒量，即 $\Psi=0$，

（2） 摩擦力可略，即 $\mathscr{F}=0$，

和

(3*a*) 流体是正压的，即 $\nabla\rho\times\nabla p=0$，

或者

(3*b*) λ 仅是 p 和 ρ 的函数，

那末，各流体元的位涡

$$\Pi=\frac{(\boldsymbol{\omega}+2\boldsymbol{\Omega})}{\rho}\cdot\nabla\lambda \tag{2.5.8}$$

守恒，即

$$\boxed{\frac{d\Pi}{dt}=0} .\tag{2.5.9}$$

注意，标量 Π 包含 $\boldsymbol{\omega}_a$ 的平行于λ之梯度的分量。

在以上所举的选择λ的例子中，λ守恒的条件等价于运动是绝热的条件，但这并不是普遍的要求。必须强调指出，定理并不要求流体是正压的，因为若条件(3b)满足[即若 $\lambda=\lambda(p,\rho)$，亦即λ是一个热力学函数]，则

$$\nabla\lambda=\frac{\partial\lambda}{\partial p}\nabla p+\frac{\partial\lambda}{\partial\rho}\nabla\rho,\tag{2.5.10}$$

它与斜压矢量 $\nabla\rho\times\nabla p$ 的点乘积平凡为零。但是，如果 $\nabla\rho\times\nabla p$ 本身应为零，那末 λ 就不必限于选为热力学函数，可以把 λ 选为更广的函数类，只要求 λ 守恒即可。

位涡的概念非常重要。因此，讨论物理意义比较明显的定理的另一种推导是有用的。

从 2.3 节的讨论得出，在无摩擦时，

$$\frac{d}{dt}\iint_A \boldsymbol{\omega}_a\cdot\mathbf{n}dA=\iint_A\left(\frac{\nabla\rho\times\nabla p}{\rho^2}\right)\cdot\mathbf{n}dA,\tag{2.5.11}$$

其中 A 是任一物质面上的面积，$\mathbf{n}$ 是垂直于该面的单位矢量。假定围绕 A 的周线 C 选为最初位于 λ 是常数的面内，如图 2.5.1 所示。由于 λ 对于每个流体元守恒，所以，$\lambda=\lambda_0$ 的面保持由相同的流体元组成，即 $\lambda=\lambda_0$ 是一物质面，因此，物质线 C 保持在同一平面中。如果λ只是 p 和 ρ 的函数，那末$\nabla\rho\times\nabla p$ 一定位于等 λ 面中，这是因为根据 (2.5.10) 得 $\nabla\rho\times\nabla p$ 垂直于 $\nabla\lambda$。所以，对于所选的回路 C 可用凯尔文定理，因(2.5.11)右端为零，结果

$$\frac{d}{dt}\iint_A\boldsymbol{\omega}_a\cdot\mathbf{n}dA=0,\tag{2.5.12}$$

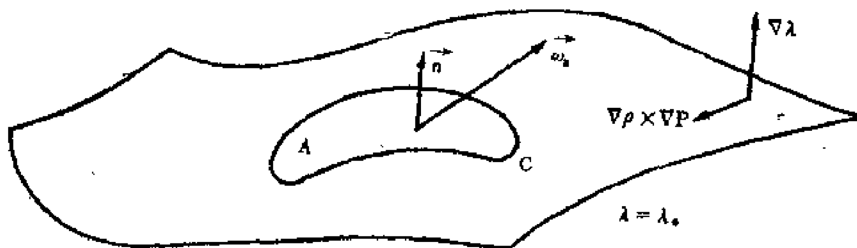


图2.5.1　在等 λ 面上应用环流定理的周线

由于 C 保持在一个等 λ 面中，所以(2.5.12)式对任意时间 t 都成立。现在来考虑一个很小的回路 C，它足够小，以至于(2.5.12)式可写成

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega}_a\cdot\mathbf{n}\delta A)=0,\tag{2.5.13}$$

其中 δA 是 C 包围的小面元，$\boldsymbol{\omega}_a$ 是该面元的绝对涡度平均值（见图2.5.2）。

为找出 δA 的表达式，只需考虑位于两个等 λ 面之间非常小的柱形小体元所含的质量。该二面之间距为 δl，根据 $\nabla\lambda$ 的定义，δl 与相邻面上 λ 值之关系为

$$\delta l|\nabla\lambda|=\Delta\lambda. \tag{2.5.14}$$

小柱的质量为

$$\delta m=\rho\delta A\delta l=\rho\delta A\frac{\Delta\lambda}{|\nabla\lambda|}, \tag{2.5.15}$$

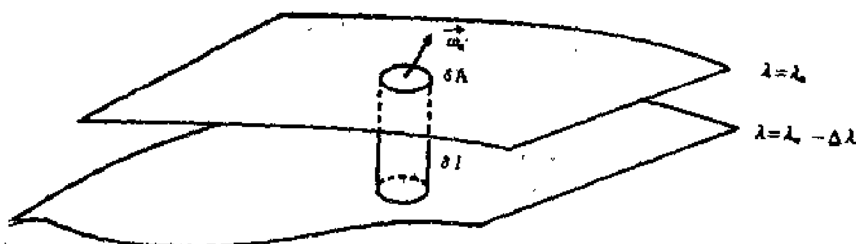


图2.5.2　位于两个等 λ 面之间的质量元。该柱状体积元的质量为 $\rho\delta l\delta A$.

并且，由于小柱的边界面是物质面，所以其质量守恒。由此可知，(2.5.13)式可写成

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\boldsymbol{\omega}_a\cdot\mathbf{n}}{\rho}|\nabla\lambda|\frac{\delta m}{\Delta\lambda}\right\}=0. \tag{2.5.16}$$

由于 δm 和 $\Delta\lambda$ 在流体元运动过程中不变，并且

$$\nabla\lambda=\mathbf{n}|\nabla\lambda|, \tag{2.5.17}$$

所以(2.5.16)变成

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{\omega}_a\cdot\frac{\nabla\lambda}{\rho}\right)=0, \tag{2.5.18}$$

它等价于(2.5.8)和(2.5.9)二式。因此，位涡守恒实际上是凯尔文定理的一个非常有用的特例。

Π在何种意义上是"位势"涡度？这名称看来选得不够好，因为连Π的量纲都与涡度不同。但是，现在习惯上采用这个术语，其动机在于下述的考虑。如果Π随着流体运动是守恒的，那末，当两个相邻等 λ 面之距离增加时，$\nabla\lambda$ 必定减小，并且，矢量$\frac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho}$平行于 $\nabla\lambda$ 的分量一定相应地增加，以保持 Π 不变。如果 ρ 的变化不太大，这将表现为 $\boldsymbol{\omega}_a$ 之增加，并且我们可以认为，存在一种使等 λ 面集中在一起的涡度蓄积，当等 λ 面因涡管伸长机制而被拉开时，蓄积的涡度就可以释放。除了 $\nabla\lambda$ 处处垂直于 $\boldsymbol{\Omega}$ 的病态情况外，等 λ 面之拉开会从行星涡度场中产生相对涡度。

位涡守恒定理之重要性怎么强调也不算过分。事实上正如我们将看到的，该定理的正确叙述，明显地给出旋转加于运动的约束关系，为海洋和大气的大尺度无耗散运动提供了一个基本方程。

2.6　热成风

在迄今为止的讨论中，我们尚未揭示这样一个事实：对于我们所涉及的运动，罗斯贝数是个小量，即相对涡度与行星涡度相比是个小量。假定我们现在问，对于相对涡度始终远小于 2Ω，而其变化的时间尺度远小于旋转周期的那些运动，要使它们持续下去，是否需要什

么条件？显然，是需要某个约束条件，否则，相对速度场的切变会通过倾斜机制，以 $O(2\Omega U/D)$ 的速率迅速产生涡度，对于相对涡度变化，将给出量级为旋转周期的时间尺度，这与我们关于大尺度运动时间尺度之假设（和观测事实）相矛盾。

我们所要的约束条件可以直接从（2.4.6）中得出。在无摩擦的情况下，若 $\boldsymbol{\omega}\ll 2\boldsymbol{\Omega}$，则（2.4.6）可近似写为

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}=2\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla\mathbf{u}-2\boldsymbol{\Omega}\nabla\cdot\mathbf{u}+\frac{\nabla\rho\times\nabla p}{\rho^2}. \tag{2.6.1}$$

因为

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}=\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla\boldsymbol{\omega}, \tag{2.6.2}$$

所以涡度变化率为局部变化率与平流变化率之和。第一项大小之量级为 $O(\omega/\tau)$，其中 τ 是运动的特征时间尺度，而第二项 $\mathbf{u}\cdot\nabla\boldsymbol{\omega}$ 的大小之量级为 $\omega U/L$。由于 $\boldsymbol{\omega}$ 的量级[1]为 $O(U/L)$，所以(2.6.1)式左端的项与量级为 $O(2\Omega U/L)$ 的 $(2\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla)\mathbf{u}$ 或 $2\boldsymbol{\Omega}\nabla\cdot\mathbf{u}$ 之比为

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}/dt}{2\Omega U/L}=O\left\{(2\Omega\tau)^{-1},\ \frac{U}{2\Omega L}\right\}. \tag{2.6.3}$$

该比率之量级为(2.6.3)式大括号中两项之大者。我们看到，第二项是罗斯贝数 ε。第一项也是一个罗斯贝数，但它基于局部时间尺度，而不是平流时间尺度。如果这两种时间尺度都远大于旋转周期，即如果罗斯贝数是个小量，那么近似的涡度方程变为

$$(2\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla)\mathbf{u}-2\boldsymbol{\Omega}\nabla\cdot\mathbf{u}=-\frac{\nabla\rho\times\nabla p}{\rho^2}, \tag{2.6.4}$$

这是时间尺度远大于旋转周期的持续运动的条件，即斜压性产生的涡度必定与扭转项所产生的涡度相抵消。

我们把(2.6.4)式以分量形式写在 z 轴与 $\boldsymbol{\Omega}$ 相平行的直角坐标系中。于是有

$$2\Omega\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial\rho}{\partial y}-\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial\rho}{\partial z}\right), \tag{2.6.5a}$$

$$2\Omega\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial\rho}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial\rho}{\partial z}\right), \tag{2.6.5b}$$

$$2\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial\rho}{\partial y}-\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial\rho}{\partial x}\right). \tag{2.6.5c}$$

前两个分量方程把垂直于该轴的平面上的速度分量沿旋转轴的变化与密度变化联系起来。由于密度变化一般与温度变化有关，因此(2.6.5a,b)所表示的风或流就称为热成风。在2.8节中，我们将较详细地讨论(2.6.5a,b)。最后一个分量方程(2.6.5c)限制了水平速度散度的（容许）范围。我们将在2.8节中证明，(2.6.5c)右端的项，实际上不大于我们在涡度方程中已作为小量略去的那些项，所以为一致起见，我们必须把(2.6.5c)式写成

$$2\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0, \tag{2.6.6}$$

（1） 在所有这些估计值中，假定表征空间变化的尺度只有一个。对于具有小形态比的运动，这并不正确，但对所进行的论证只有很小的变动。

因此，为保持罗斯贝数为小量，垂直于 Ω 的平面上的速度分量必是无辐散的。

2.7 泰勒-普劳德曼定理

如果流体满足使(2.6.5)式成立所要求的条件——即若罗斯贝数为小量且不计摩擦——并且斜压矢量恒为零，那末从(2.6.5)式得

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0. \tag{2.7.1}$$

垂直于 Ω 的平面上之速度一定与平行于 Ω 的坐标无关；而且，在垂直于 Ω 的平面上，速度一定是无辐散的。这是一个非常有用的约束条件，因为它意味着平行于 Ω 的物质线一定永远保持与 Ω 平行。这个约束条件是前面已述事实的直接推论，即在无斜压性和摩擦的情况下，绝对涡丝一定是物质线。对于小罗斯贝数的运动，绝对涡度基本上是行星涡度 2Ω，绝对涡丝以 $O(\varepsilon)$的误差，总是平行于 Ω，因此物质线也一定保持与 Ω 平行。否则，将出现行星涡丝的不平衡倾斜，这会破坏 ε 为小量的条件。

如果流体基本上是不可压的，那么根据(1.4.23)式有

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0, \tag{2.7.2}$$

它与(2.7.1)式一起，意味着

$$\frac{\partial w}{\partial z}=0. \tag{2.7.3}$$

在这种情况下，相对速度的所有三个分量与平行于旋转轴的方向无关。用矢量形式表示，如果 $\nabla\cdot\mathbf{u}=0$，它可直接从(2.6.4)式得出，即

$$(2\mathbf{\Omega}\cdot\nabla)\mathbf{u}=0. \tag{2.7.4}$$

这个约束条件叫作泰勒-普劳德曼定理。从(2.7.3)式得出，如果 w 在某一高度（如在一刚体的水平面）处为零，那末，在所有高度上 w 都将保持为零。于是运动完全变成二维的，可描写为柱状运动，每个流体柱平行于旋转轴，并且在移动中保持该方向不变。这些柱多称为泰勒柱，有时也叫作普劳德曼柱。

出现此类运动的最简单的情况是，均质流体（即具有均匀密度的流体）缓慢的相对运动。这类运动虽然似乎不寻常，但在实验室试验中可容易地看到。如果在均质流体中，沿垂直于旋转轴的路径拖曳一个物体（如一个球或圆柱体），那末，当物体穿过流体时，流体一定绕物体流动。如果(2.7.4)式是正确的，则运动为严格的二维运动。物体上下的流体一定会象被物体分开的流体一样，宛如其间有一个虚幻的物体，而这个虚幻物由真实物体沿旋转轴投影所形成的泰勒柱中包含的流体所组成，它穿过流体时就好象一个真实固体。我们引用泰勒的原始论文(1923)中的话，“这个观念似乎是古怪的，但实验……表明运动实际上确实与这种奇怪的类型近似。”这正如他在论文中所描述的一组简单而又极好的实验所说明的那样。

必须认识到这个定理建立在对完整的涡度方程作了一系列近似的基础上。被略去的项决不完全为零，所以，在被略去项越小时，泰勒-普劳德曼约束条件就越可靠，可以预料到存在着不同于柱状运动的偏差。但是，(2.7.4)式充分说明了沿旋转轴方向的运动有强烈耦合的趋势。

2.8 地转运动

把推导涡度方程的热成风近似和泰勒-普劳德曼定理时所用的那些相同条件，用于未经简化的基本动量方程

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt}+2\mathbf{\Omega}\times\mathbf{u}=-\frac{\nabla p}{\rho}+\nabla\Phi+\frac{\mathscr{F}}{\rho}. \qquad (2.8.1)$$

时，也可得到类似的重要结果。

相对加速度大小之量级由下式估计：

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt}=\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}=O\left(\frac{U}{\tau},\ \frac{U^2}{L}\right), \qquad (2.8.2)$$

它与科氏加速度的估计值

$$2\mathbf{\Omega}\times\mathbf{u}=O(2\Omega U)$$

之比为

$$\frac{|d\mathbf{u}/dt|}{|2\mathbf{\Omega}\times\mathbf{u}|}=O\left[(2\Omega\tau)^{-1},\ \frac{U}{2\Omega L}\right], \qquad (2.8.3)$$

上式与(2.6.3)式是等价的。因此，相对加速度在最低阶上是可略的。

为估计摩擦力，必须规定 $\mathscr{F}$ 的表达式。如果 $\mathscr{F}$ 由(1.4.5)式给出，那末

$$\frac{\mathscr{F}}{\rho}=O\left(\frac{\nu U}{L^2}\right), \qquad (2.8.4)$$

其中 ν 是运动学粘性系数。我们再次假定了速度场变化只有一个特征长度尺度。否则，对(2.8.4)式必须用最小的长度尺度，而现在我们保留(2.8.4)式，因为它适合我们的目的。单位质量流体所受的摩擦力与科氏加速度之比为一个无量纲参数，称之为埃克曼数E：

$$E=\frac{\nu U/L^2}{2\Omega U}=\frac{\nu}{2\Omega L^2}. \qquad (2.8.5)$$

如果 ν 是水的分子运动学粘性系统，例如，对于 $L=10^3$ 公里、$\nu=10^{-2}$ 厘米^2/秒的大洋运动，E 的估计值为

$$E=\frac{10^{-2}\text{厘米}^2/\text{秒}}{(10^{-4}/\text{秒})(10^{16}\text{厘米}^2)}=10^{-14}. \qquad (2.8.6)$$

它是非常小的量，这样小的摩擦力对于大尺度运动显然是可以略去的。重要的问题是，对于大尺度运动的耗散来说，(1.4.5)式是否是一个合理的表达式？(2.8.5)式是否能恰当地衡量摩擦之重要性？由于我们只注意大尺度运动，即用单一的速度和长度尺度来表征运动，所以忽略了大尺度运动与尺度较小且动力学特征不同的运动间的相互作用之细节。这样做是必要的，因为确定各种尺度运动间的相互作用，其复杂性是十分惊人的。对于我们来说，企图精确地研究有相互作用的全部尺度简直是不可能的。因此我们另寻某种假定，试图至少能定性推述大尺度运动与许多较小尺度运动之间的能量和动量输送，而这些小尺度运动通常是我们不想直接处理的湍流运动。这个问题将在第四章中作较详细的讨论。现在只需注意到，估计较小尺度运动之耗散影响的一个方法，是仍保留(2.8.5)的形式，但是以湍流粘性系数 A 代替 ν，而 A 的值远大于分子粘性系数 ν 的值，这大概是由于大型流体块对动量输送更为有效的缘故。该式只不过是一个经验性的概念——难以证明，甚至更难以定量表示，因而不可能

对它作严格的推导。在某些情况下，把小尺度湍流对大尺度运动的作用想象为类似大型分子的作用显然是错误的。但是，尽管对 A 值作估计很困难而且结果不大肯定，但归纳出的A的估计值仍可给我们一个比较实际的、关于摩擦之重要性的度量，以及相应地给出埃克曼数的估计值。我们把这有争议的问题留到以后再作较详细的讨论，在此仅指出，观测表明摩擦很小，以至于使相应定义的埃克曼数为一小量。

如果埃克曼数和罗斯贝数二者都为小量，那末动量方程的一级近似为

$$\rho 2\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{u}=-\nabla p+\rho\nabla\Phi. \tag{2.8.7}$$

考虑把 (2.8.7) 式应用于地球大气或海洋的情况，即应用于球面上之薄流体层。地球表面基本上是一个等位势面(即Φ为一常数的曲面)，并且，$\nabla\Phi$ 给出垂直于地面的有效重力加速度 $\mathbf{g}$。如图 2.8.1 所示，我们设 u、v 和 w 分别为向东、向北和垂直向上的速度。相应的球坐标是 r、θ 和 ϕ。

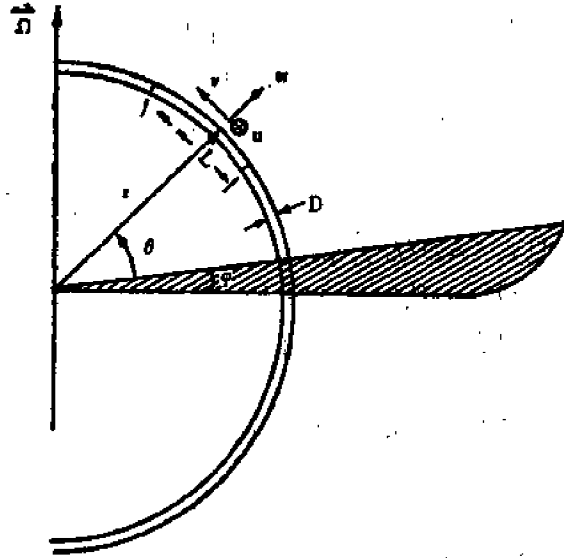


图2.8.1 用于描述在纬度θ附近的特征长度尺度为L、深度为D的运动所用的球坐标系r、θ 和 ϕ

(2.8.7)式的分量形式为

$$\rho[-2\Omega v\sin\theta+2\Omega w\cos\theta]=-\frac{1}{r\cos\theta}\frac{\partial p}{\partial\phi}, \tag{2.8.8a}$$

$$\rho 2\Omega u\sin\theta=-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}, \tag{2.8.8b}$$

$$-\rho 2\Omega u\cos\theta=-\frac{\partial p}{\partial r}-\rho g. \tag{2.8.8c}$$

现在，我们把气压场和密度场分为两部分是有益的。无相对运动时，$u=v=w=0$，(2.8.8) 式意味着 p 必与 ϕ 和 θ 无关，而只是 r 的函数。根据(2.8.8c)式，密度也仅是 r 的函数。所以我们有

$$p=p_s(r)+p'(r,\theta,\phi), \tag{2.8.9a}$$

$$\rho=\rho_s(r)+\rho'(r,\theta,\phi), \tag{2.8.9b}$$

其中 $p_s(r)$和 $\rho_s(r)$是静止时的基本场，而 p' 和 ρ' 是由于风和流之存在造成的与该基本状态的偏差。从(2.8.8c)式得

$$-\frac{\partial p_s}{\partial r}=\rho_s g. \tag{2.8.10}$$

这使我们可把(2.8.8a,b,c)写成

$$(\rho_s+\rho')[-2\Omega v\sin\theta+2\Omega w\cos\theta]=-\frac{1}{r\cos\theta}\frac{\partial p'}{\partial\phi}, \tag{2.8.11a}$$

$$(\rho_s+\rho')2\Omega u\sin\theta=-\frac{1}{r}\frac{\partial p'}{\partial\theta},\tag{2.8.11b}$$

$$-(\rho_s+\rho')2\Omega u\cos\theta=-\frac{\partial p'}{\partial r}-\rho' g.\tag{2.8.11c}$$

假定 U 表征水平速度 u 和 v 的尺度，L 表征速度和气压场水平变化的尺度，而 D 为流体域的厚度，表征速度和气压垂直变化的尺度。由于运动的形态比是个小量，考虑到流体元运动轨迹的几何特点，我们可估计垂直速度与水平速度之比为

$$\frac{w}{u}=O\left(\frac{W}{U}\right)=O\left(\frac{D}{L}\right)\ll 1,\tag{2.8.12}$$

所以，只要 $\delta=D/L$ 为小量，则(2.8.11a)式方括号中第二项就可略去[1]。由于 p' 的水平变化尺度为 $O(L)$，故(2.8.11a,b)中右端的压力梯度项具有 p'/L 的量级。为了使水平压力梯度与科氏加速度平衡，必须有

$$p'=O(\rho 2\Omega UL),\tag{2.8.13}$$

该式确定了由运动引起的压力变化的大小。在垂直运动方程中，垂直压力梯度的量级为

$$\frac{\partial p'}{\partial r}=O\left(\frac{p'}{D}\right)=O\left(\rho\frac{2\Omega UL}{D}\right).\tag{2.8.14}$$

科氏加速度的垂直分量为

$$\rho 2\Omega u\sin\theta=O(\rho 2\Omega U),\tag{2.8.15}$$

而该两项的比为

$$\frac{\rho 2\Omega u\cos\theta}{\partial p'/\partial r}=O\left(\frac{D}{L}\right)=\delta\ll 1,\tag{2.8.16}$$

所以，同样精确到 $\delta\ll 1$ 的量级时，水平和垂直运动方程中与 $2\Omega\cos\theta$ 成正比的科氏力项都可略去。这就是说，水平运动方程中由垂直运动引起的水平科氏加速度，和垂直运动方程中由水平运动引起的垂直科氏加速度，与相应的压力梯度相比时，都是 $O(\delta)$的小量。

这意味着，只有地球旋转的局部法向分量 $\Omega\sin\theta$ 才是有动力学意义的分量。

根据(2.8.11c)式，有可能确定密度扰动值 ρ' 的上界，因为 $g\rho'$ 显然不可能大于$\partial p'/\partial r$，所以

$$\rho'\leqslant O\left(\frac{p'}{gD}\right)=O\left(\frac{\rho 2\Omega UL}{gD}\right),\tag{2.8.17}$$

或

$$\frac{\rho'}{\rho}=O\left(\frac{U}{2\Omega L}\right)\frac{4\Omega^2L^2}{gD}=\varepsilon\frac{4\Omega^2L^2}{gD}.\tag{2.8.18}$$

参数 $4\Omega^2L^2/gD$ 与运动的强度无关，而只依赖于运动的几何尺度。例如，对于 $L=10^3$ 公里和 $D=10$公里的大尺度大气运动，$4\Omega^2L^2/gD=0.196$。因此，只要罗斯贝数是小量，就有

$$\frac{\rho'}{\rho}\leqslant O(\varepsilon)\leqslant 1,\tag{2.3.19}$$

（1） 在赤道附近，与$2\Omega\sin\theta$成正比的项为小量。这并不意味着与$2\Omega\cos\theta$成正比的科氏力项是重要的。它们仍然不重要，但导出近似方程(2.8.11a,b,c)时所略去的其他动力学项，在赤道附近必须保留。

从而有

$$\rho' \ll \rho_s(r). \tag{2.8.20}$$

如果我们应用上述量级大小的估计值，则可把(2.8.11a,b,c)合理地近似为

$$fv = +\frac{1}{\rho_s r\cos\theta}\frac{\partial p}{\partial \phi}, \tag{2.8.21a}$$

$$fu = -\frac{1}{\rho_s r}\frac{\partial p}{\partial \theta}, \tag{2.8.21b}$$

$$\rho g = -\frac{\partial p}{\partial r}, \tag{2.8.21c}$$

其中在(2.8.21a,b)中已用了$\rho' \ll \rho_s$这个事实。(2.8.21a,b)可用p来描写，这显然是因为p_s与ϕ和θ无关这个事实得出的，而(2.8.21c)则由(2.8.10)和(2.8.16)式得出的。

我们已经引入了符号

$$f = 2\Omega\sin\theta. \tag{2.8.22}$$

参数f是行星涡度垂直于地面的局部分量，叫作科里奥利参数（科氏参数）。

海洋和大气都是薄流体层，所以，我们可引入径向坐标

$$z = r - r_0, \tag{2.8.23}$$

其中r_0是地心到地面的距离。由于$z \leqslant O(D)$，故$z \ll r_0$，或精确到$O(D/r_0)$时，(2.8.21a, b,c)可写为

$$fv = \frac{1}{\rho_s r_0\cos\theta}\frac{\partial p}{\partial \phi}, \tag{2.8.24a}$$

$$fu = -\frac{1}{\rho_s r_0}\frac{\partial p}{\partial \theta}, \tag{2.8.24b}$$

$$\rho g = -\frac{\partial p}{\partial z}, \tag{2.8.24c}$$

由(2.8.21a,b)或(2.8.24a,b)所表示的平衡项，是完整的动量方程的地转近似。在这极限形式中，水平速度的动力平衡，简化为水平压力梯度与水平科氏加速度分量之间的平衡。由该关系得出的速度叫作地转速度。地转近似可用矢量形式表示为

$$\mathbf{u}_H = \frac{1}{f\rho_s}\mathbf{k}\times\nabla p, \tag{2.8.25}$$

其中$\mathbf{k}$是垂直于球面的单位矢量，$\mathbf{u}_H$是水平速度矢量。注意，地转近似并没直接给出有关垂直速度的信息。

第三个方程(2.8.24c)根本就没包含速度，只描述了垂直压力梯度和浮力在垂直方向上的平衡关系。这就是静力近似。即使流体处于运动中，流体轨迹近于水平的特点仍使得垂直加速度非常小，致使静止流体的阿基米德原理仍可适用。这就是说，在垂直方向上，任意两点之间的压力差，仅取决于该两点间的流体重量，虽然流体实际上是处于运动中的，但在这个关系上看来，就好象处于静止状态的流体一样。

2.9 地转近似和静力近似的结果

地转近似和静力近似的精确推导，将在第六章中作为用小罗斯贝数和小埃克曼数对运动方程作渐近展开的第一步结果而给出。现在假定前节中给出的启发性论证是正确的，在此假定下，我们来研究根据地转平衡和静力平衡可以推论出的一些结果。

2.9.1 地转流函数 (2.8.24) 式给出的水平地转速度与水平压力梯度相垂直。这是地转运动的一个重要特点。流体沿等压线、而不穿过等压线流动。正是这个特点，使我们有可能用天气图上的等压线来表示气流的形势。在无旋流体中，正常流动沿压力梯度力的方向。在地转近似中，每个流体元就好象一个细小的纺锤，被压力梯度力推向一个方向，使其运动方向与压力梯度力和旋转轴均成直角，如图 2.9.1 所示。请再次注意，由于流体层很薄 ($\delta \ll 1$)，所以，平衡中的有效旋转角速度为$\Omega\sin\theta=f/2$。在北半球($f>0$)，地转速度的方向使面向下游的观察者看到高压位于其右方。在南半球，($f<0$)，高压位于其左方。

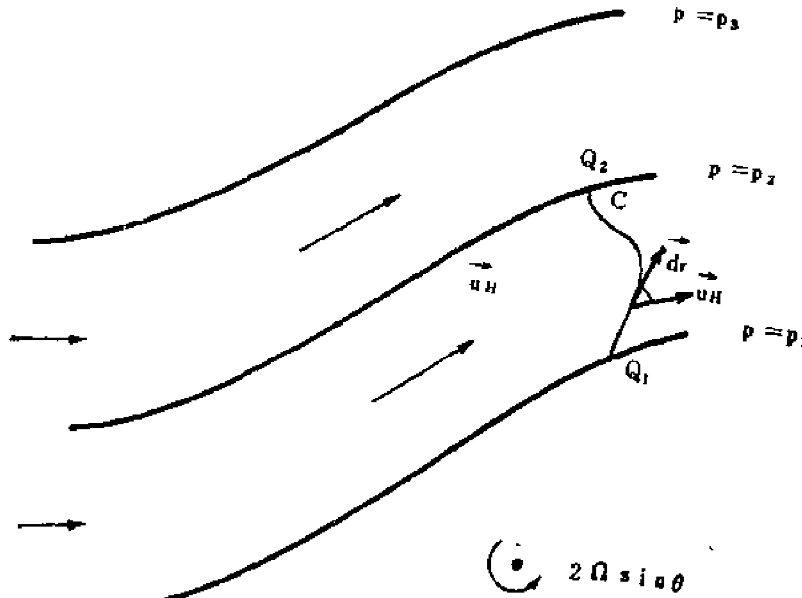


图2.9.1 速度$\mathbf{u}_H$顺沿等压线，点 Q_1 与 Q_2 之间的总流量仅取决于p_2-p_1，而与曲线 C 的选择无关。

现在我们来考虑分别位于等压线 $p=p_1$ 和 $p=p_2$ 上的两点 Q_1 和 Q_2 之间单位垂直距离中的流量。如图 2.9.1 所示，通过曲线 C 的流量为

$$M=\int_{Q_1}^{Q_2}\mathbf{k}\cdot\rho_s(\mathbf{u}_H\times d\mathbf{r})=\int_{Q_1}^{Q_2}(\mathbf{k}\times\rho_s\mathbf{u}_H)\cdot d\mathbf{r}, \tag{2.9.1}$$

利用(2.8.24)式可把它写成

$$M=\int_{Q_1}^{Q_2}\frac{[\mathbf{k}\times(\mathbf{k}\times\nabla p)]}{f}\cdot d\mathbf{r}=-\int_{Q_1}^{Q_2}\{\nabla p-\mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\nabla p)\}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{f}$$

$$=-\int_{Q_1}^{Q_2}\frac{\nabla_H p}{f}\cdot d\mathbf{r}, \tag{2.9.2}$$

其中 $\nabla_H p$ 是水平压力梯度，即在图 2.9.1 的平面中的压力梯度。在从极地到赤道的距离上，即在量级为 10,000 公里的距离上，科氏参数 $f=2\Omega\sin\theta$ 从零变到 2Ω。在远小于极地到赤道的距离上，即对于水平尺度远小于极地到赤道之距离的那些大尺度($L=O(10^3$ 公里$)$)运动，f 的变化不大。大多数海洋和大气运动满足这个约束条件。无论如何，只要 Q_1 和 Q_2 所在纬度之间距在上述意义下是充分小的话，则(2.9.2)式中的 f 可以取为常数，故

$$M=\int_{Q_1}^{Q_2}\mathbf{k}\cdot(\rho_s\mathbf{u}_H\times d\mathbf{r})=\frac{p(Q_1)}{f}-\frac{p(Q_2)}{f}, \tag{2.9.3}$$

它与积分路径无关。所以，p/f 是水平质量通量的流函数。由于 ρ_s 与水平位置无关，因此 $p/\rho_s f$ 是水平地转速度的流函数。

如果把(2.8.24a)式除以(2.8.24c)式，则得

$$fv=-\frac{\rho g}{\rho_s r_0\cos\theta}\frac{\partial p/\partial\phi}{\partial p/\partial z}=+\frac{\rho}{\rho_s}\frac{1}{r_0\cos\theta}g\left(\frac{\partial z}{\partial\phi}\right)_p, \tag{2.9.4}$$

或

$$fv=+\frac{1}{r_0\cos\theta}g\left(\frac{\partial z}{\partial\phi}\right)_p. \tag{2.9.5}$$

从(2.9.4)变到(2.9.5)式时已利用了 $\rho'=\rho-\rho_s$ 的量级为 ε 这个事实。类似地有

$$fu=-\frac{1}{r_0}g\left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)_p, \tag{2.9.6}$$

其中下标 p 表示在等压面上的微分，而 z 是等压面的高度。

因此，地转速度可以完全等价地用等压面的坡度来表示，即

$$\mathbf{u}_H=\frac{g\mathbf{k}}{f}\times(\nabla z)_p. \tag{2.9.7}$$

2.9.2 热成风 把(2.8.24a)式对 z 微商，并利用(2.8.24c)式，得

$$f\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{g}{\rho_s r_0\cos\theta}\frac{\partial\rho}{\partial\phi}-\frac{1}{\rho_s^2}\frac{\partial\rho_s}{\partial z}\frac{1}{r_0\cos\theta}\frac{\partial p}{\partial\phi}$$

$$=-\frac{g}{\rho_s r_0\cos\theta}\frac{\partial\rho}{\partial\phi}-\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial\rho_s}{\partial z}fv, \tag{2.9.8}$$

再利用(2.9.5)式，得

$$f\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{g}{\rho_s r_0\cos\theta}\frac{\partial\rho}{\partial\phi}-\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial\rho_s}{\partial z}\frac{g}{r_0\cos\theta}\left(\frac{\partial z}{\partial\phi}\right)_p, \tag{2.9.9}$$

或

$$f\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{g}{\rho_s r_0\cos\theta}\left[\frac{\partial\rho}{\partial\phi}+\left(\frac{\partial z}{\partial\phi}\right)_p\frac{\partial\rho_s}{\partial z}\right], \tag{2.9.10}$$

它的 $O(\varepsilon)$ 近似为

$$f\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{g}{\rho r_0\cos\theta}\left[\frac{\partial\rho}{\partial\phi}+\frac{\partial\rho}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial\phi}\right)_p\right], \tag{2.9.11}$$

或

$$\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{g}{f\rho r_0\cos\theta}\left(\frac{\partial\rho}{\partial\phi}\right)_p. \tag{2.9.12}$$

类似地有

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{g}{f\rho r_0}\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)_p. \tag{2.9.13}$$

以矢量形式表示，

$$\frac{\partial \mathbf{u}_H}{\partial z}=\frac{g}{\rho f}\mathbf{k}\times(\nabla\rho)_p, \tag{2.9.14}$$

所以，从(2.6.5a,b)得出，水平速度随高度之增加，取决于等压面上的水平密度梯度。如果等密度面与等压面重合，那末地转速度必与高度无关。因此，地转近似隐含了泰勒-普劳德曼定理。

对于大气，可以应用理想气体定律，因此，

$$\frac{1}{\rho}(\nabla\rho)_p=-\frac{1}{T}(\nabla T)_p=-\frac{1}{\theta}(\nabla\theta)_p, \tag{2.9.15}$$

所以，风随高度的增加自然可直接用等压面上的水平温度梯度或水平位温梯度来表示。

对于海洋的情况，(2.9.8)式右端两项之比为

$$\frac{fv\partial\rho_s/\partial z}{(g/r_0)\cos\theta\partial\rho/\partial\phi}=O\left(\frac{fU/H}{fU/D}\right)=\frac{D}{H}, \tag{2.9.16}$$

其中 H 是密度标高，

$$H=\left(\frac{-1}{\rho_s}\frac{\partial\rho_s}{\partial z}\right)^{-1}, \tag{2.9.17}$$

D 是运动的深度尺度。因此，D/H 具有 $\Delta\rho_s/\rho_s$ 的量级，即具有在运动的垂直尺度上密度相对变化的量级。该量级总不大于 $O(10^{-2})$，所以对大洋来说，(2.9.12) 和 (2.9.13) 式中的密度梯度可在很好的近似程度上用等高面来估计。

2.9.3 地转风的散度和涡度 根据(2.8.24a,b)式，地转风的散度为

$$\frac{1}{r_0\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(v\cos\theta)+\frac{1}{r_0\cos\theta}\frac{\partial u}{\partial\phi}$$

$$=\frac{1}{f}\frac{v}{r_0}\frac{\partial f}{\partial\theta}=\frac{v}{r_0}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}. \tag{2.9.18}$$

(2.9.18) 式左端每项的特征大小为 $O(U/L)$，而右端项为$O(U/r_0)$。

对于尺度 L 满足

$$\frac{L}{r_0}\ll 1$$

的运动可以得出，在最低阶近似上，水平地转速度是无辐散的。为了以后作参考用，我们现在来推导一个关于相对涡度的重要关系式。同样的考虑表明，精确到同一量级时，相对涡度的垂直分量与压力的水平拉普拉斯成正比：

$$\zeta=\frac{1}{r_0\cos\theta}\frac{\partial v}{\partial\phi}-\frac{1}{r_0}\frac{\partial u}{\partial\theta}\simeq\frac{1}{\rho_s f}\nabla_H^2 p$$

$$=\frac{1}{\rho_s f}\left\{\frac{1}{r_0\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\cos\theta}{r_0}\frac{\partial p}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r_0^2\cos^2\theta}\frac{\partial^2 p}{\partial\phi^2}\right\}. \qquad (2.9.20)$$

2.10 地转退化

地转近似非常有用，而且其形式也美观适意。一旦知道了压力场，就可立即确定水平速度、热成风和涡度的垂直分量。当然，从前一节结果中显然可以看出，在赤道附近不能用地转近似，所以我们料想在赤道区域需要有一个更为复杂的动力学框架。然而，即使在较高纬度应用地转近似时，也仍存在根本性的困难，因为不可能只用地转关系来计算压力场，并预报它随时间的演变。地转近似是一个诊断关系，它所能告诉我们的，只是当速度场随时间缓慢变化时，它的科氏加速度将不断地平衡变化的压力梯度。即使我们感兴趣的是定常运动的动力学性质，地转近似也是不足的，因为在一般情况下，此时它只给出在我们所讨论区域的边界上运动之信息，但是，内部的结构还必须计算。

地转近似本身并不包含确定运动的动力学性质所需要的足够信息。只要罗斯贝数是小量，任何压力场都可以给出一个与它相容的地转速度，在地转近似的程度上，不可能辨别在所给出的压力场中哪个是正确的。要想解决这个困难，显然需要考虑更高阶的动力学，即小的地转偏差之影响。这些小偏差，或者包含具有罗斯贝数之量级的相对加速度，或者包含具有埃克曼数之量级的摩擦力，或者同时包含这两种效应。运动场之确定对于作为小量的力（其中每一个力与占优势的科氏力相比可忽略）的依赖性，构成一个十分微妙的问题。大体说来，这种复杂性起因于压力梯度力与科氏加速度之间非常相近的平衡。但是，压力梯度的旋度恒为零，而科氏加速度的旋度却产生地转速度的散度，它非常接近于零；所以，对运动方程取旋度时，把上述各项都消去了。这就是说，不管是压力梯度还是科氏加速度，它们对于涡度平衡的贡献都没有象对于动量平衡那样有效。这意味着，较高阶动力学结构的敏感性问题，最好通过考虑涡度方程来探讨，或如我们将看到的，通过考虑位势涡度的方法来探讨。

2.11 地转适应过程*

旋转流体运动的一个非常重要的特征是趋向于地转平衡，即科氏力被垂直于运动方向的压力梯度所平衡。这种平衡是通过质量（压力）分布和动量分布之间的相互调整来实现的。只要存在不平衡，例如把一定的动量突然加于流体的一部分而没有相应的压力梯度，或者在某一区域中因质量减少或增加而产生了压力梯度，那末都会发生上述的相互调整过程。Rossby(1938)首次讨论了这种过程，后来许多学者又对它作过研究。例如Cahn(1945)、Обухов(1949)和Raethjen(1950)，曾研究了均质旋转流体的适应问题，而Bolin(1953)和Veronis(1965)研究了层结流体问题，Кибелъ(1955)分析了三维运动[1]。本节我们用Обухов(1949)的垂直平均的简单正压模式来阐明这个过程，为此引入下述因变量：

$$\mathbf{V}=\frac{g}{p_0}\int_0^\infty \rho\mathbf{V}'dz \quad , \qquad (2.11.1a)$$

---

* 本节摘译自郭晓岚《Dynamics of Quasigeostrophic Flows and Instability Theory》. Advances in Applied Mechanics, 1973. Vol.13.

$$\pi(x,y,t)=\frac{1}{p_0}p_s(x,y,t)-1=\frac{P}{Hp_0}-\frac{\gamma}{2\gamma-1},\quad \left(\gamma=\frac{c_p}{c_v}\right) \tag{2.11.1b}$$

其中 p_s 是表面压力，p_0 是其平均值，$H=p_0/g\rho_0$ 是大气的标高，P 是空气柱的位能，它等于气压的垂直积分，即

$$P=\int_0^\infty p dz=Hp_0\left[\frac{\gamma}{2\gamma-1}+\pi\right]. \tag{2.11.1c}$$

于是，垂直积分的线性化运动方程和连续方程是

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}+f\mathbf{k}\times\mathbf{V}=-gH\nabla\pi, \tag{2.11.2}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial t}=-\nabla\cdot\mathbf{V}=-\nabla^2\varphi. \tag{2.11.3}$$

为方便起见，我们把 V 分解成无辐散部分 $\mathbf{V}_\varphi$ 和无旋部分 $\mathbf{V}_\psi$，并对 $\mathbf{V}_\psi$ 引入流函数，对 $\mathbf{V}_\varphi$ 引入速度势，即

$$\mathbf{V}=\mathbf{V}_\psi+\mathbf{V}_\varphi=\mathbf{k}\times\nabla\psi+\nabla\varphi. \tag{2.11.4}$$

对(2.11.2)式作 $\nabla\times$ 和 $\nabla\cdot$ 的运算，我们可分别得到下述涡度方程和散度方程：

$$\nabla^2[\psi_t+f\varphi]=0, \tag{2.11.5}$$

$$\nabla^2[\varphi_t-f\psi+gH\pi]=0. \tag{2.11.6}$$

把(2.11.5)与(2.11.3)式合并，可以得到位涡方程

$$\nabla^2\psi_t-f\pi_t=0. \tag{2.11.7}$$

这个方程表明，由

$$\Omega=\nabla^2\psi-f\pi \tag{2.11.7a}$$

给出的位涡 Ω 与 t 无关，因而只是 x 和 y 的函数。我们可以用这个方程，从 ψ 和 π 的初始分布来确定其最终分布。

对于波状扰动，我们可以把(2.11.5)和(2.11.6)式中的算子 ∇^2 去掉，则得

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=-f\varphi, \tag{2.11.5a}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=f\psi-gH\pi. \tag{2.11.6a}$$

对(2.11.6a)进行 $\partial/\partial t$ 运算，然后把(2.11.5a)和(2.11.3)式的 ψ_t 和 π_t 代入，则可得到下述关于 φ 的波动方程：

$$\varphi_{tt}+f^2\varphi-C_0^2\nabla^2\varphi=0,\quad C_0^2=gH. \tag{2.11.8}$$

我们假设已知的初始值为 φ_0、ψ_0 和 π_0。(2.11.6a)式提供了初始值 φ_t，所以(2.11.8)式可用初始条件

$$\varphi_0=e_1(x,y), \tag{2.11.8a}$$

$$\varphi_{t0}=f\psi_0-gH\pi_0=e_2(x,y) \tag{2.11.8b}$$

---

(1) 叶笃正[1957]通过对地转适应过程的分析指出，在较大尺度运动中主要是风场向气压场适应，在较小尺度运动中主要是气压场向风场适应。曾庆存[1963]研究了适应过程中初始扰动垂直结构的影响和非线性适应问题。陈秋士[1964]还研究了非地转扰动的上下传送问题。

来求解。

注意，如果把 φ 分解为它的富里叶波分量 $\exp i(k_1x+k_2y-\sigma t)$，那末我们得到 σ 为

$$\sigma^2=f^2+(k_1^2+k_2^2)C_0^2. \tag{2.11.8c}$$

该关系式表明，这些波动是频散的，因此，初始时刻不平衡的波能量之局部分布〔由 $e_2(x,y)$ 表示〕将被这些表面波带走，并扩散到整个区域中去，因此也改变了质量分布。所以，(2.11.8) 和(2.11.8a,b)表示的波动方程实际上提供了一种建立地转平衡的调整机制，而且，达到平衡的速率在此模式中也由这个方程组决定。

2.11.1 **气压场和无辐散流场向地转平衡的调整** 为了得到方程(2.11.7) 和(2.11.8) 作为初值问题的解，我们首先把 ψ、π 和 ϕ 分解为定常场和非定常场或波动场，即

$$\psi=\bar{\psi}+\psi',\quad \pi=\bar{\pi}+\pi',\quad \varphi=\bar{\varphi}+\varphi' \tag{2.11.9}$$

式中 $\bar{\psi}$、$\bar{\pi}$、$\bar{\varphi}$ 只是 x、y 的函数，而 ψ'、π'、φ' 是 x、y 和 t 的函数。从(2.11.5a)和(2.11.6a)式我们得到

$$\bar{\varphi}=0, \tag{2.11.10}$$

$$\bar{\pi}=(f/gH)\bar{\psi}. \tag{2.11.11}$$

因此，φ 场没有定常部分，故定常运动是无辐散的，而 $\bar{\pi}$ 和 $\bar{\psi}$ 满足地转关系。其次，因为位涡与 t 无关，所以 Ω 必定由定常场给出，而且也等于它的初始值。于是我们有

$$\Omega=\nabla^2\bar{\psi}-f\bar{\pi}=\Omega_0=\nabla^2\psi_0-f\pi_0, \tag{2.11.12}$$

$$\Omega'=\nabla^2\psi'-f\pi'=0. \tag{2.11.13}$$

把(2.11.11)式中的 $\bar{\pi}$ 代入(2.11.12)式，则可得到下述关于 $\bar{\psi}$ 的方程

$$\nabla^2\bar{\psi}-\frac{1}{\lambda^2}\bar{\psi}=\Omega_0(x,y), \tag{2.11.14}$$

式中 $\lambda=(gH)^{1/2}/f$ 称为变形半径或系统的影响半径。对于任意给定的 Ω_0 的初始分布，该方程的解可由下述普遍公式得到：

$$\bar{\psi}(x,y)=-\frac{1}{2\pi}\iint\Omega_0(\xi,\eta)K_0(\rho)d\xi d\eta, \tag{2.11.15}$$

式中 $K_0(\rho)$是虚辐角的零阶贝塞尔函数。其渐近表达式为

$$\begin{aligned} K_0(\rho)&\doteq-0.5772+\log(2/\rho) &&\text{当}\rho\ll1\\ &\doteq(\pi/2\rho)^{1/2}e^{-\rho}, &&\text{当}\rho\gg1 \end{aligned} \tag{2.11.15a}$$

而 ρ 是

$$\rho^2=[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]/\lambda^2. \tag{2.11.15b}$$

当扰动只取决于一个空间坐标时，容易得到定常和非定常方程组 (2.11.14)、(2.11.7)和(2.11.7a) 的解。例如，设初始不平衡的涡旋运动为

$$\begin{aligned} v_0(r)&=\frac{\partial\psi_0}{\partial r}=-\frac{A}{R}\zeta[4+\mu-\zeta^2]e^{-\zeta^2/2}\\ \pi_0&=\varphi_0=0, \end{aligned} \tag{2.11.16a}$$

时，我们得到位涡方程(2.11.14)的最终解为

$$\bar{v}(r)=-\frac{A}{R}\zeta[4-\zeta^2]e^{-\zeta^2/2}, \tag{2.11.16b}$$

$$\bar{\pi}(r)=\frac{f}{gH}\bar{\Phi}=\frac{A}{f\lambda^2}(2-\zeta^2)e^{-\zeta^2/2}.$$

这里 R 是水平长度尺度，A/R 是运动的强度，而且

$$\zeta=r/R,\quad r^2=x^2+y^2,\quad \mu=R^2/\lambda^2.$$

上述解表明，当 μ 是小量时，$\bar{v}$ 和 v_0 之差是不显著的，而对于较大的 μ 值，v 之变化大到不可忽视的程度。例如，图 2.11.1 中的曲线表示 $A/R=5$ 米/秒和 $\mu=0.0516$（这相当于 $R=500$ 公里，$\lambda=2200$ 公里）时的函数 $\bar{v}$、v_0 和 $\bar{\pi}$。值得注意的是，在此例中，v 的变化非常小，而压力的变化却非常剧烈，致使中心处下降($A<0$)了 20 毫巴。这种情况是水平尺度 R 远小于 λ 的扰动之特征。对于 λ/R 的大值，v 的变化很显著，这可以从表 2.11.1 中 $\bar{v}/v_0$ 的数值看出来，该表是基于 $\lambda=2,700$ 公里作的。

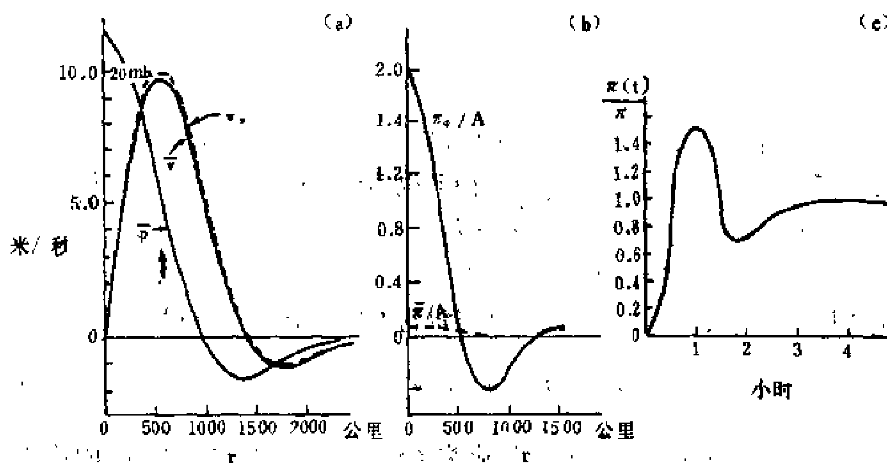


图2.11.1 旋转流体中压力分布和速度分布之间的调整。

(a)压力场向给定的初始速度场调整；(b)不平衡的压力场之减弱；(c)不平衡的涡旋中心处的压力变化。

表 2.11.1 $\bar{v}/v_0$ 的值

R(公里) \ r(公里)	1000	2000	3000	4000	5000
500	0.99	0.99	0.99	0.98	0.98
3000	0.75	0.74	0.71	0.64	0.51
5000	0.52	0.51	0.47	0.39	0.27

另一方面，如果初始扰动是以不平衡的压力场形式出现，象自由面突然升高或位能局部分布的突然增大，则我们会发现，该场的大部分将被重力波频散掉，只剩下很小一部分与风场平衡，而且初始扰动的水平尺度越小，越是如此。这种情况可以由下面的例子说明。

初始场为

$$\psi_0=0,\qquad \varphi_0=0,$$

$$\pi_1 = A[2+\mu-(4+\mu)x+x^2]e^{-x} \qquad (2.11.17a)$$

最终的定常场为

$$\bar{v} = \frac{Afr}{2}[x-2]e^{-x}, \quad \bar{\psi} = \frac{AR^2f}{2}(1-x)e^{-x},$$

$$\bar{\pi} = A\mu(1-x)e^{-x}. \qquad (2.11.17b)$$

其中 $x = r^2/2R^2$. 所以当 $\mu \ll 1$ 时，如图 2.11.1b 所示，最终的压力扰动 $\bar{\pi}$ 远远小于其初始值 π_0。所以我们得知，当 μ 是小量时，压力场总是向速度场适应。因为 μ 与 f^2 成正比，所以我们预料，在低纬度地区压力场调整发生在较大的尺度上。

出现上述演变特性的物理原因如下。当一个区域中存在压力梯度和科氏力的不平衡时，在该区域边缘处，可以迅速地伴生质量分布的调整，但是在远离边界的区域则非常慢。因此在一个小区域中的不平衡的压力梯度，很容易因压力梯度或科氏力方向上的质量流动而消失，同时远离边界地方的速度必须向压力梯度调整。

另一个值得提到的问题是，大尺度变化只能逐渐形成，因此压力分布和速度分布有充分的相互调整的时间。所以我们预料，在一个很大范围内不会出现强的不平衡。另一方面，在一个小范围内，则容易形成大的速度梯度和压力梯度的集中。根据以上讨论的调整理论，只有小尺度的速度集中可以维持，而不平衡的压力梯度将很快消失。所以调整机制似乎是造成大气和海洋中速度分布不均匀的原因。

2.11.2 **波动方程和调整过程的解** 正如我们已指出的那样，压力分布和速度分布向地转平衡的调整，实际上是通过辐散运动实现的。对于我们所考虑的问题，这种辐散运动是受频散波动方程(2.11.8)和(2.11.8a,b)支配的。用

$$u(x,y,\zeta,e) = \cos(f\zeta/C_0)\varphi(x,y,t)$$

作为因变量，可以较容易地得到该方程的解。此时，(2.11.8) 式变为下述简单的三维波动方程

$$u_{tt} = \nabla_3^2 u. \qquad (2.11.18)$$

初始条件(2.11.8a,b)，则由下式给出：

$$u(x,y,\zeta,o) = e_1(x,y)\cos(f\zeta/C_0), \qquad (2.11.18a)$$

$$u_t(x,y,\zeta,o) = e_2(x,y)\cos(f\zeta/C_0). \qquad (2.11.18b)$$

用柯西方法易得这个问题的解，函数 $\varphi(x,y,t)$ 直接由 $u(x,y,o,t)$ 给出，所以我们有

$$\varphi(x,y,t) = \frac{1}{2\pi C_0}\left[\frac{\partial}{\partial t}\iint f_1 \frac{\cos(f\eta)}{\eta}\rho d\rho d\theta \right.$$

$$\left. + \iint f_2 \frac{\cos(f\eta)}{\eta}\rho d\rho d\theta\right] \qquad (2.11.19)$$

式中 f_1 和 f_2 的辐角是 $x+\rho\cos\theta$, $y+\rho\sin\theta$, ρ 的范围是 $\rho \leqslant C_0 t$, 而且

$$\eta = (C_0^2 t^2 - \rho^2)^{1/2}.$$

先对(2.11.19)式作 ∇^2 运算，然后对 t 积分，则从 (2.11.19) 式可以得到压力变化。对于以(2.11.16a)表示的初始扰动，中心处压力随时间变化表示在图 2.11.1c 上。可以看出，中心处压力之地转值在三到四个小时内可形成。

许多有关适应问题的研究工作，如 Cahn(1945)、Bolin(1953)和 Veronis(1965) 等的

工作，都把重点放在解频散波动方程上。然而从大尺度运动的观点来看，似乎解答（2.11.15）更为重要和有意义。

显然在层结流体中，即使相邻的层在一定程度上相互影响，适应过程也基本上在以等熵面为界的个别层内进行，支配已适应状态的方程是普遍的位涡方程，而质量调整既通过表面波也通过重力内波来实现。

2.12 大气和海洋中扰动的分类与特征*

大家知道，声波和重力内波可以在层结稳定的可压缩流体中同时产生，而惯性波可在均质旋转流体中产生。此外，当科氏参数随纬度变化时，也产生罗斯贝波。当流体既旋转又层结稳定时，如地球的大气和海洋这种流体，所有上述不同类型的扰动可以同时存在，但由于流体的物理性质不同，或者是由于另一扰动的存在，它们的特性有些改变。本节旨在阐明和分析能够在这样一个系统中存在的各种扰动。

由于扰动（尤其是在有限区域中产生的扰动）的能量是以群速度传播的，而波动的槽脊是以相速度传播的，所以这两种速度表征了扰动的两个最重要的性质。因此，我们将导出各种扰动的相速度和群速度，并用它们来作为分类的标准。

2.12.1 **线性化方程** 我们假定流体的压力 p、密度 ρ 和温度 T 与它们的平均值，即未受扰动的量 p_0、ρ_0 和 T_0 只有很小的偏差，而 p_0、ρ_0 和 T_0 是处于流体静力平衡的，并且只是垂直坐标 z 的函数。那末我们有

$$p=p_0(z)+p', \qquad \rho=\rho_0(z)+\rho', \qquad T=T_0(z)+T',$$
$$p'\ll p_0, \qquad \rho'\ll\rho_0, \qquad T'\ll T_0. \tag{2.12.1}$$

容易证明，在等温大气中，扰动量 u'、v'、w' 和 T'/T 与 $\rho_0^{-1/2}$ 成正比，而 p' 和 ρ' 则与 $\rho_0^{1/2}$ 成正比。在正常的非等温大气中，上述比例关系也非常近似地成立。因此，用以下这些量作为面变量是适宜的：

$$\begin{aligned} p_1&=(\rho_{0s}/\rho_0)^{1/2}p', \\ \rho_1&=(\rho_{0s}/\rho_0)^{1/2}\rho'=p_1/C^2-q_1, \\ q_1&=(\rho_0/\rho_{0s})^{1/2}\theta'/\theta_0, \\ \mathbf{V}_1&=(\rho_0/\rho_{0s})^{1/2}\mathbf{V}', \\ w_1&=(\rho_0/\rho_{0s})^{1/2}w'. \end{aligned} \tag{2.12.1a}$$

其中 ρ_{0s} 是 ρ_0 在地面的平均值，θ' 是位温与它的平衡值 θ_0 之偏差，$C=(\gamma RT_0)^{1/2}$ 是声波的拉普拉斯速度，$\gamma=C_p/C_v$。使用这些变量，无粘和绝热运动的线性化运动方程、热力学方程和连续方程可在直角坐标或切平面坐标中写成如下形式：

$$\frac{\partial \mathbf{V}_1}{\partial t}+f\mathbf{k}\times\mathbf{V}_1=-\nabla_t p_1, \tag{2.12.2}$$

$$\lambda_1\frac{\partial w_1}{\partial t}=-\frac{\partial p_1}{\partial z}-\Gamma p_1+gq_1, \tag{2.12.3}$$

* 本文译自郭晓岚《Characteristics of Disturbances in the Atmosphere and Oceans》，Pure and Applied Geophysics，1977，Vol. 115，No.4.

$$\frac{\partial q_1}{\partial t}+S_z w_1=0\,, \tag{2.12.4}$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t}+\nabla_1\cdot\mathbf{V}_1+\frac{\partial w_1}{\partial z}-\frac{1}{2}\sigma_z w_1=0, \tag{2.12.5}$$

其中 ∇_1 是水平梯度算子，$f=2\Omega\sin\varphi$ 是科氏参数，σ_z、S_z 和Γ 是层结参数，定义为

$$\sigma_z=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\rho_0}{\partial z},$$

$$S_z=\frac{1}{\theta_0}\frac{\partial\theta_0}{\partial z}\,,$$

$$\Gamma=\frac{1}{2}\sigma_z-S_z=\frac{1}{2}\left(\frac{g}{C^2}-S_z\right)\,.$$

把(2.12.4)式与(2.12.5)式相加，我们得到与(2.12.3)式对称的连续方程的如下形式：

$$\frac{\lambda_2}{C^2}\frac{\partial p_1}{\partial t}+\nabla_1\cdot\mathbf{V}_1+\frac{\partial w_1}{\partial z}-\Gamma w_1=0. \tag{2.12.5*}$$

注意，我们已经在(2.12.3)式和(2.12.5*)式的时间导数项中引入了跟踪系数 λ_1 和 λ_2，这是为了确定流体静力近似($\lambda_1=0$)和滞弹性近似($\lambda_2=0$)对于不同类型扰动的影响。

由上述方程我们得到能量方程

$$\frac{\partial E}{\partial t}+\nabla_1\cdot(p_1\mathbf{V}_1)+\frac{\partial}{\partial z}(p_1 w_1)=0, \tag{2.12.6}$$

式中 E 是总能量密度，定义为

$$E=\frac{1}{2}(\mathbf{V}_1\cdot\mathbf{V}_1+\lambda_1 w_1^2+\lambda_2 p_1^2/C^2+g^2q_1^2/N^2), \tag{2.12.6a}$$

这里 $N=(gs_z)^{1/2}$ 是布伦特-维赛拉频率。该方程表明，如果所考虑的空间由固体刚壁包围，则能量密度 E 的体积分是守恒的，而对于任意的孤立体积元 ΔV，E 的变化等于压力对 ΔV 所做的功，即等于 ΔV 外的介质对 ΔV 内的介质所做的功。并且，流体静力近似 $\lambda_1=0$ 意味着 w_1^2 相对于 $\mathbf{V}_1\cdot\mathbf{V}_1$ 是可以忽略的，而滞弹性近似 $\lambda_2=0$ 意味着 P_1^2/C^2 与 gq_1^2/S_z 相比是可忽略的。在大气和海洋的大尺度运动中，这些条件都是满足的。

2.12.2 简单波解 为了说明可能存在的运动类型的性质，我们把(2.12.2)-(2.12.5)的解写成如下形式：

$$(u_1,v_1,w_1,p_1,q_1)=(u,v,iw,p,q)\exp i\omega t, \tag{2.12.7}$$

式中 ω 是扰动频率。为了简化，我们将把 f 以及参数 N、C 和 Γ 都看作常数。N、C、Γ 为常数的假定，仅当 T_0 是常数时才严格成立，但它们的变化一般是很小的。我们借助 p 从水平运动方程(2.12.2)中解出 u 和 v，得到：

$$u=-\frac{1}{D}(fp_y+i\omega P_x),$$

$$v=\frac{1}{D}(fP_x-i\omega P_y), \tag{2.12.8}$$

式中的下标表示偏数商，而 $D=f^2-\omega^2$

把(2.12.8)式中的 u 和 v 代入(2.12.5*)式，从(2.12.3)和(2.12.4)式中消去 q_1，我们得到下面两个关系：

$$\frac{\partial w}{\partial z}-\Gamma w=\frac{\omega}{D}\nabla_1^2 p-\frac{\lambda_2\omega}{C^2}p, \tag{2.12.9}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z}+\Gamma p=\frac{1}{w}(\lambda_1\omega^2-N^2)w. \tag{2.12.10}$$

从这两个方程中消去 w，我们得到下面这个关于 p 的方程：

$$\omega\left\{(N^2-\lambda_1\omega^2)\nabla_1^2 p+(f^2-\omega^2)\left\{p_{zz}-\left[\Gamma^2+\frac{\lambda^2}{C^2}(N^2-\lambda_1\omega^2)\right]p\right\}\right\}=0, \tag{2.12.11}$$

其中 $\omega=0$ 的解表示本模式中的流体静力和地转的运动，而非稳定解（$\omega\neq0$）表示声波和惯性重力内波。

现在我们来考虑简单的平面波解：

$$p_1=p(x,y,z)e^{i\omega t}=A\exp i(k_1x+k_2y+mz+\omega t), \tag{2.12.12}$$

其中波数 k_1、k_2 和 m 是实数。上式可以这样理解：仅用复数表达式的实数部分来表示实变量 p_1。把这个解代入(2.12.11)中带括号的部分，我们得到 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时的频率 ω 和波数及其他物理参数之间的关系：

$$m^2+\frac{(\omega^2-N^2)}{(\omega^2-f^2)}k^2-\frac{\omega^2-N_1^2}{C^2}=0, \tag{2.12.13}$$

式中 $k^2=k_1^2+k_2^2$，$N_1^2=N^2+C^2\Gamma^2$。这是 ω 的四次方程，它既包括高频声波又包括低频的惯性重力内波，它们由(2.12.13)式的两个不同的根来表示：

$$\omega_a^2=\frac{\omega_0^2}{2}\left[1+\left(1-\frac{4\omega_*^4}{\omega_0^4}\right)^{1/2}\right], \tag{2.12.14a}$$

$$\omega_G^2=\frac{\omega_0^2}{2}\left[1-\left(1-\frac{4\omega_*^4}{\omega_0^4}\right)^{1/2}\right], \tag{2.12.14b}$$

其中，

$$\omega_0^2=(m^2+k^2)C^2+N_1^2+f^2,$$

$$\omega_*^4=(N^2k^2+f^2m^2)C^2+f^2N_1^2.$$

注意到当 N、Γ 和 f 为零时，我们得到

$$\omega_a^2=\omega_0^2=(k^2+m^2)C^2,\ \omega_G=0.$$

因此，(2.12.14a)是声波的频率方程，而(2.12.14b)是惯性重力波的频率方程。

惯性重力波还可以分成两种不同的类型，即：(i)由 $m^2>0$ 所表征的垂直传播的内波，和(ii)由 $m^2<0$ 所表征的外波或拦截波。按照方程(2.12.13)，对于 $m^2>0$，ω^2 一定是或者大于 N_1^2，或者位于 N^2 和 f^2 之间；当 ω^2 位于这些范围之外时，波只能在水平方向传播，而在垂直方向仍是被拦截的。在 $N^2>f^2$ 的图 2.12.1a 和 $N^2<f^2$ 的图 2.12.1b 中的 ω-k 图上，分别说明了这两类波的划分。

图 2.12.2 的 m-k 图上还给出了声波和惯性重力波之间的差别。图 2.12.2a 是对于 $\omega^2>N_1^2$ 的，而图 2.12.2b 是对于 $N^2>f^2$ 时 ω^2 在 N^2 与 f^2 之间的情况的。这两图中不同曲线旁的数字表示 ω/N 的数值。为方便起见，声波的 ω/N 值取为负数。可以看出，对于声波来

说，大ω的$\omega=$常数的曲线是偏心率很小的椭圆，而对于惯性重力内波来说，它们是双曲线。

由于扰动的相速度为ω/K，而群速度为$\partial\omega/\partial K$（K是三维波数矢量），所以$C_{ph}$是在K的方向，而$C_g$与$m$-$k$图中的$\omega=$常数的面相垂直。因此，$C_{ph}$和$C_g$的方向很容易根据$m$-$k$图来确定。我们从这些图上看出，声速的$C_g$和$C_{ph}$为同方向，且它们几乎相等；而惯性重力内波的$C_g$与$C_{ph}$相垂直。此外，惯性重力波当其$N^2>\omega^2>f^2$时，$C_{ph}$和$C_g$的水平分量为同一方向，但垂直分量方向相反。当$N^2<\omega^2<f^2$时则情况相反，即重力内波的$C_g$和$C_{ph}$的水平分量方向相反，而其垂直分量方向相同。下面将说明前一关系是重力内波的性质，而对于$N^2<f^2$的后一关系是纯惯性波的性质。

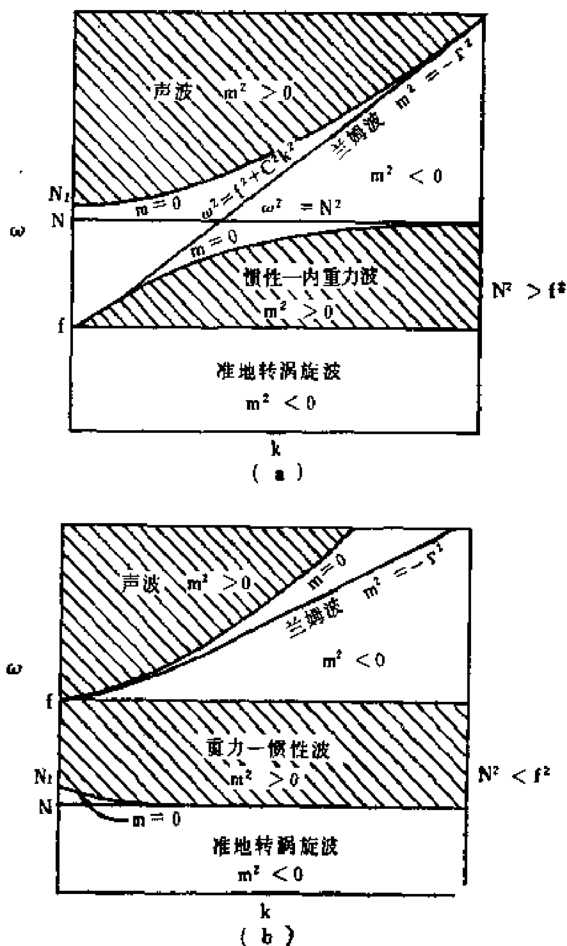


图2.12.1 大气和海洋的ω-k图

(a)稳定层结，$N>f$；(b)近于中性层结，$N<f$。

为了定量估计稳定层结和地球转动对各种扰动的影响，我们必须采用大气和海洋的参数N、Γ、C和f的正常值。这些量的大致平均值在表2.12.1中给出。根据这些数值，对于大气和海洋上层，我们都得到$N^2>f^2$。因此在大气和海洋中，不同类的扰动是按图2.12.1a所描绘的那样区分的。另一方面，图2.12.1b似乎可应用于海洋的下层。

（1） **声波和兰姆波** 由于$f^2\ll N^2$，f对声波的影响可以完全忽略；而$(N^2+\Gamma^2C^2)$对声速的影响，在(k^2+m^2)小于10^{-7}米$^{-2}$（相当于20公里的波长）时变得可观起来。

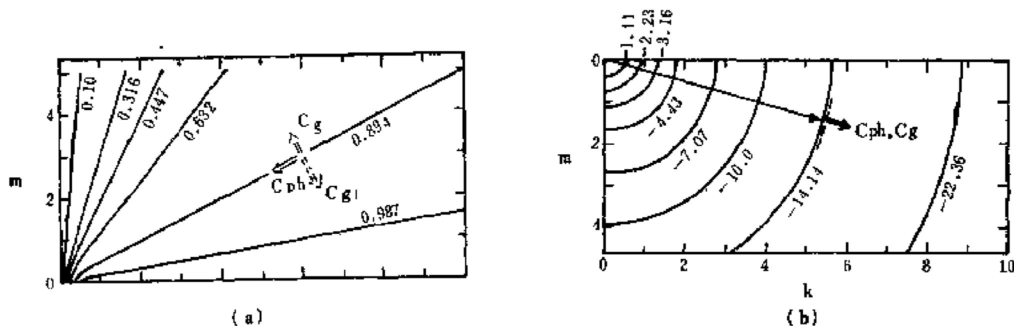


图2.12.2 m-k图上的传播面，表示相速C_{ph}和群速C_g间的关系

(a)重力内波和惯性波，(b)声波。

因此，当大气中声波波长大于 20 公里时，声速为

$$C=\frac{\omega_0}{\sqrt{k^2+m^2}}=C\left[1+\frac{N^2+\Gamma^2C^2+f^2}{m^2+k^2}\right]^{1/2} . \tag{2.12.15}$$

这个关系式表明，在层结特别稳定或快速旋转的流体中，长声波可移动得比拉普拉斯速度 C 快得多。

表2.12.1

	N(秒$^{-1}$)	Γ(米$^{-1}$)	C(米/秒)	f(秒$^{-1}$)
大　气	1.2×10^{-2}	3×10^{-5}	330	10^{-4}
海洋（上层）	4×10^{-3}	1×10^{-6}	1500	10^{-4}

除以上讨论的一般声波外，可压缩流体还可引起兰姆波。它具有水平传播的声波的性质，其特点是垂直速度和位温扰动为零，气压 p_1 处于流体静力平衡并随高度按 $e^{-\Gamma z}$ 减小。所以，控制这些扰动的方程是方程(2.12.2)和连续方程

$$C^{-2}p_{1t}+u_{1x}+v_{1y}=0 . \tag{2.12.16}$$

这些方程与在一深度为 $H=RT_0/g$ 的均质流体中控制表面重力波的方程组完全一样。因此，兰姆波也可认为是表面重力波。当 f 作为常数处理时，这些波的频率为

$$\omega^2=k^2C^2+f^2 . \tag{2.12.17}$$

我们从这关系中看出，相速度比 C 大，而群速度比 C 小。

（2） **惯性重力内波**　大气和海洋中惯性重力内波的垂直波长通常小于 10 公里，因此 $N^2+\Gamma^2C^2$ 相对于$(m^2+k^2)C^2$可以忽略。所以对于这种扰动来说，方程（2.12.14b）简化为

$$\omega_G^2=\frac{N^2k^2+m^2f^2}{m^2+k^2}. \tag{2.12.18}$$

这个关系式与在滞弹性近似下，即 $\lambda_2=0$ 时得到的关系式是一样的。略去(2.12.11)式中相对于$\frac{\partial^2}{\partial z^2}$项是小量的 Γ^2，该方程就简化为

$$\omega\left[(N^2-\omega^2)\nabla_1^2 p+(f^2-\omega^2)\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right]=0. \tag{2.12.19}$$

容易看出，对于简单波解(2.12.12)，这个方程产生频率方程(2.12.18)。注意，对于水平尺度比垂直尺度大得多的扰动，ω_G 随水平波数 k 的增加而增加。方程(2.12.18)也可写成

$$k=\left(\frac{\omega^2-f^2}{N^2-\omega^2}\right)^{1/2}m . \tag{2.12.18a}$$

因此，由(2.12.13)给出的 m-k 图上的双曲线变成通过原点的直线。所以它们与扰动的相速度C_{pn}平行。从图2.12.2b看出，除了小范围($mH<0.4, kH<0.4$)外，这个近似关系是足够精确的。

在讨论层结稳定和旋转流体中总合的惯性重力内波的性质以前，先分别讨论一下纯重力内波和纯惯性波的性质。

（3）**纯重力内波**　我们说纯重力内波，指的是不受旋转影响的重力内波，因此相应地有

$f=0$。所以相速度$\mathbf{C}_{ph}$、群速度$\mathbf{C}_g$以及它们的分量[1]为：

$$\mathbf{C}_{ph}=\frac{\omega}{\mathbf{K}}=\frac{Nk}{K^3}\mathbf{K},\qquad C_x^*=\mathbf{C}_{ph}\cdot\frac{k_1}{\mathbf{K}}=\frac{\omega}{K^2}k_1=\frac{Nkk_1}{K^3},$$

$$C_y^*=\frac{Nkk_2}{K^3},\qquad C_z^*=\frac{Nkm}{K^3}. \tag{2.12.20a-d}$$

$$C_{gx}=\frac{\partial\omega}{\partial k_1}=\frac{Nm^2}{K^3k}k_1,\qquad C_{gy}=\frac{Nm^2k_2}{K^3k},$$

$$C_{gz}=\frac{\partial\omega}{\partial m}=-\frac{Nkm}{K^3}, \tag{2.12.21a-c}$$

式中$\mathbf{K}$是全波数矢量，$k=(k^2+m^2)^{1/2}$。我们看到重力内波的$\mathbf{C}_{ph}$和$\mathbf{C}_g$的水平分量具有相同的符号，而它们的垂直分量大小相等符号相反。还可容易地证明，$\mathbf{C}_{ph}$和$\mathbf{C}_g$是互相垂直的。所以它们的关系正如图2.12.2b中实箭头所表示的那样。

注意，在(2.12.20a-d)中我们使用了真实的分量C_{xi}^*来代替通常的相速度

$$C_{xi}=\frac{\omega}{k_i}=\frac{Nk}{Kk_i}=C_{xi}^*\frac{K^2}{k_i^2}.$$

显然，后者并不是$\mathbf{C}_{ph}$的真实分量，因为其中每一个在数量上都大于$\mathbf{C}_{ph}$。实际上，它们代表$\mathbf{C}_{ph}$在坐标面上的投影。

与纯重力内波有关的气压变化p、位温变化θ和速度V以及相速度$\mathbf{C}_{ph}$和群速度$\mathbf{C}_g$之间的关系，都在图2.12.3中用图解给出。

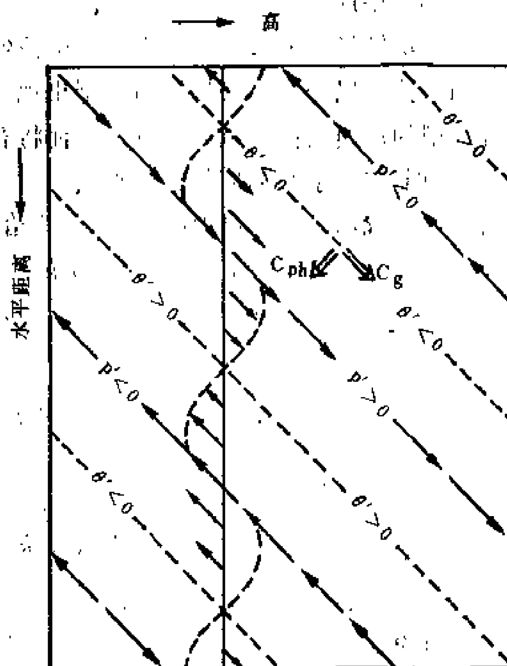


图2.12.3　重力内波的速度扰动和温度扰动的分布以及$\mathbf{C}_{ph}$和$\mathbf{C}_g$之间的关系

（4）　纯惯性波　我们说纯惯性波，是指在一旋转的均质流体中产生的波。当旋转轴为z方向时，这些纯惯性波的频率以及对于p的方程可从令$N=0$的(2.12.18)和(2.12.19)式中得出，即：

$$\omega^2=\frac{f^2m^2}{K^2}, \tag{2.12.22}$$

$$\nabla_1^2p+\left(1-\frac{f^2}{\omega^2}\right)\frac{\partial^2p}{\partial z^2}=0. \tag{2.12.23}$$

我们从(2.12.22)式中看到，惯性波的频率随着k的增加而减小，这与重力波的情形适反。

纯惯性波的$\mathbf{C}_{ph}$和$\mathbf{C}_g$的分量为

（1）　可参看第三章3.8节。

$$\left\{\begin{aligned} &C_x^*=\frac{fmk_1}{K^3},\quad C_y^*=\frac{fmk_2}{K^3},\\ &C_z^*=\frac{fm^2}{K^3}. \qquad (2.12.24)\\ &C_{gx}=-\frac{fmk_1}{K^3},\quad C_{gy}=-\frac{fmk_2}{K^3},\\ &C_{gz}=\frac{fk^2}{K^3}. \qquad (2.12.25)\end{aligned}\right.$$

因此，$\mathbf{C}_{ph}$ 和 $\mathbf{C}_g$ 的水平分量大小相等，方向相反；而它们的垂直分量方向相同，大小不等。这些表达式还说明 $\mathbf{C}_g$ 垂直于 $\mathbf{C}_{ph}$，但它们的关系与重力内波的 $\mathbf{C}_g$ 与 $\mathbf{C}_{ph}$ 的关系相反，如图 2.12.2*b* 中虚箭头所表示的那样。

（5） 层结稳定的旋转流体中修正的惯性重力内波 当流体层结稳定且旋转的时候，重力内波和惯性波以一个总合的波动类型出现，而不再保持为两种性质不同的波动类型。我们把这种类型的波叫做惯性重力内波。下面将看到，当 $N^2>f^2$ 时，它们具有重力内波的特性，当 $N^2<f^2$ 时，它们具有惯性波的性质。

由于这些扰动的频率已由(2.12.18)式给出，所以它们的相速度和群速度分量为：

$$C_x^*=G_1k_1,\quad C_y^*=G_1k_2,\qquad C_z^*=G_1m. \qquad (2.12.26)$$

$$C_{gx}=G_2k_1m,\ C_{gy}=G_2k_2m,\qquad C_{gz}=G_2k^2, \qquad (2.12.27)$$

其中

$$G_1=\frac{(N^2k^2+f^2m^2)^{1/2}}{K^3},$$

$$G_2=\frac{(N^2-f^2)m}{K^3(N^2k^2+f^2m^2)^{1/2}},$$

容易看出 $\mathbf{C}_g$ 是垂直于 $\mathbf{C}_{ph}$ 的。并且当 G_2 为正时（这相应于 $N^2>f^2$），$\mathbf{C}_g$ 和 $\mathbf{C}_{ph}$ 的水平分量具有相同的符号，而垂直分量有相反的符号。因此，这些波是修正的重力内波。反之，当 $N^2<f^2$ 时，$\mathbf{C}_g$和$\mathbf{C}_{ph}$ 的水平分量符号相反，而垂直分量符号相同，因此它们具有惯性波的性质。

关于这点，我们对层结和旋转对波动的不同影响作一些说明是有益的。大家知道，旋转有助于引起流体沿旋转轴方向的伸长，和在与转轴之垂直方向上的缩短；而稳定层结引起沿 $\mathbf{g}$ 方向的缩短，和在与 $\mathbf{g}$ 之垂直方向的伸长。当旋转轴和 $\mathbf{g}$ 平行时，这两种影响起着彼此相反的作用。净作用结果是，当 $N^2>f^2$ 时，惯性波被消掉，而重力内波因旋转作用稍有修正；当 $N^2<f^2$ 时，重力内波被消掉，而惯性波则因层结作用稍有修正。因此，方程（2.12.22）表明，在一均质流体中，存在无数个频率小于 f 的垂直传播的惯性波，但是当 $N>f$ 时，除了 $\omega=f$ 这唯一的一个波外，其他全被稳定层结消掉了。这个惯性波对应于 $K=0$，因而$\nabla_1 p=0$，运动是绕惯性圆进行的。另一方面，在无旋转时，垂直传播的重力内波的频率也从N一直到零，但是由于旋转，减小了频率范围，只从N到 f。

2.12.3 **准地转运动和涡旋波** 除了以上讨论的两个方向的惯性重力内波以及重力外波和声波外，大气和海洋还有另一种只在一个方向运动的扰动，即涡旋波。这些扰动的产生是

由于与绝对位涡梯度有关的恢复力。它们是准地转的，受位涡方程控制。在把 f 视为常数的以上用过的近似框架内，位涡方程取以下形式：

$$\frac{\partial Q}{\partial t}=0, \tag{2.12.28}$$

其中 Q 是相对位涡，它的表达式为

$$Q=\nabla_1^2\psi+\frac{f^2}{N^2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}-\Gamma^2\psi\right), \tag{2.12.28a}$$

式中 $\psi=p/f$ 是 V 的无辐散部分的流函数。这个方程是从(2.12.11) 式在流体静力和滞弹性近似以及 $\omega^2\ll f^2<N^2$ 时得出的。由于我们在此推导中略去了所有对绝对位涡有贡献的因子，所以在此只能得到这个表示具有流体静压力分布的稳定地转运动的特殊方程。另一方面，完整的位涡方程在更一般的情况下是适用的。

由于中纬度的大气和海洋中的低频大尺度运动是近于地转的，所以这些运动可以用一般的非线性位涡方程来表示[1]：

$$\frac{d}{dt}(f+Q)=0, \tag{2.12.29}$$

其中科氏参数现在被认为是随 y 变化的函数，Q 是用 (2.12.28a) 定义的相对位涡。(2.12.28a)中的 $\psi=p/f$ 表示总的水平速度的流函数，即

$$u=-\frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad v=\frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{2.12.29a}$$

$\frac{d}{dt}$表示质点随水平运动的个别变化率，即

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}. \tag{2.12.29b}$$

注意到 Q 中唯一的因变量是 ψ，因此(2.12.29)式加上相应的边条件和初条件完全足以确定准地转运动。还注意到在(2.12.29)式中所包含的只是速变时间导数 (first time derivative)，因此由(2.12.29)式控制的波只在一个方向运动。

当 N^2 很大时，运动变成纯水平和无辐散的，(2.12.28a)中的 Q 变得只剩下第一项 $\nabla_1^2\psi$。当 $N^2=0$ 时，也同样如此，并且运动是自动正压的。所以位涡方程(2.12.29)的线性化表述是

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla_1^2\psi+\beta\frac{\partial\psi}{\partial x}=0, \tag{2.12.30}$$

其中 $\beta=df/dy$ 是罗斯贝参数。从这个方程看出，对于 ψ 具有 $\psi=\psi_0\exp i(k_1x+k_2y+\omega t)$ 的简单的平面罗斯贝波，ω 为

$$\omega=\frac{\beta k_1}{k^2}, \tag{2.12.31}$$

式中 $k^2=k_1^2+k_2^2$。因此，通常相速和群速的向西和向南分量为

(1) 可以参见第六章(6.5.21)式。

$$C_x=\frac{\beta}{k^2}, \qquad C_y=\frac{\beta k_1}{k_2 k^2}, \tag{2.12.31a,b}$$

$$C_{gx}=\frac{\beta(k_2^2-k_1^2)}{k^4}, \qquad C_{gy}=-\frac{2\beta k_1 k_2}{k^4}. \tag{2.12.31c,d}$$

$k_2=0$ 时，C_x 和 C_{gx} 的变化在图 2.12.4a 中给出，纵坐标是 βL^2，横坐标是 k_1^2，其中 L 是水平长度尺度；而对于一个固定的非零的 k_2，它们的变化在图 2.12.4b 中给出，纵坐标是 $\beta L^2/k_2^2$，横坐标是 k_1^2/k_2^2．我们看到对于 $k_2=0$，C_x 在 $k_1=0$ 处等于 $+\infty$，在 k_1 接近无穷时，C_x 减小为零。C_{gx} 恰好等于 $-C_x$。另一方面，对于一个固定的非零的 k_2，$k_2^2C_x$ 从 $k_1=0$ 时的值 1 开始，从横坐标轴上面趋近于极限 0，而 $k_2^2C_{gx}$ 虽然也在 $k_1=0$ 时从 1 开始，但当 $k_1^2>k_2^2$ 时，它变成负值，在 $k_1^2=3k_2^2$ 时达到其极小值，最后从横坐标轴下面趋近于极限 0。因此对于 $k_2\neq0$，当 $k_1\leqslant k_2$ 时，C_x 和 C_{gx} 二者都向西；而当 $k_1\geqslant k_2$ 时，C_x 向西，C_{gx} 向东。

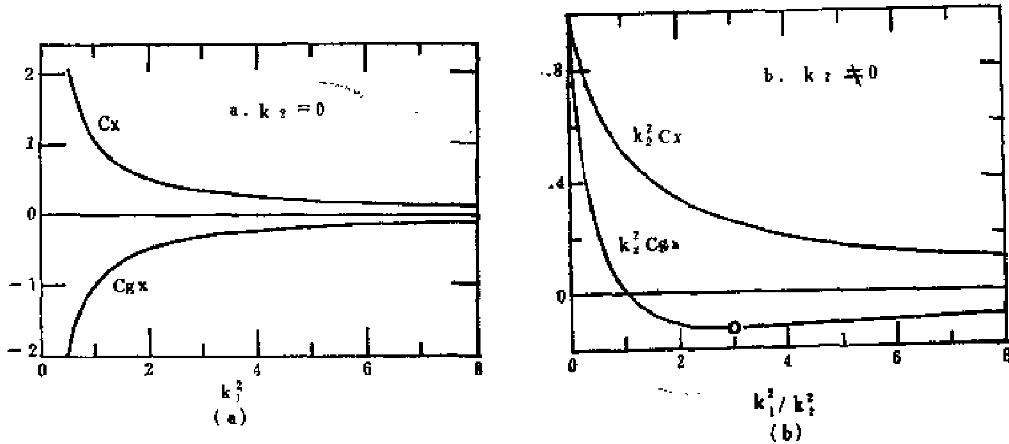


图2.12.4 波数为 k_1 的罗斯贝波的 C_x 和 C_{gx} 的变化

(a) $k_2=0$；(b) $k_2\neq0$

当位涡 Q 包括 ψ_{zz} 项，并且 f^2 用它的平均值 $\bar{f}^2$ 代替，而在 (2.12.29) 式中把 f 取作 βy，那末我们得到

$$\omega=\frac{k_1\beta}{\left(k_1^2+k_2^2+\frac{\bar{f}^2}{N^2}m^2\right)}. \tag{2.12.31*}$$

这关系式表明，内罗斯贝波的相速与群速的垂直分量也是符号相反，这与重力内波恰好一样。

我们也可把 Q 中的因子 f^2 不作为常数处理，而取作 βy。为方便起见，我们把长度尺度 L 表示为水平坐标的单位，频率 ω 用 βL 作单位，令

$$\psi=\Psi(y)\exp\{i(kx+mz+\omega t)\},$$

$$L=\left(\frac{NH}{\beta m}\right)^{1/2}.$$

于是(2.12.29)式的线性表达式得出了众所周知的谐波振荡方程：

$$\frac{d^2\Psi}{dy^2}+\left(\frac{k_1}{\omega}-k_1^2-y^2\right)\Psi=0\ . \tag{2.12.32}$$

该方程的对于所有的 y 都有限的解为

$$\Psi(y)=e^{-y^2/2}H_n(y), \tag{2.12.33a}$$

其中 $H_n(y)$是整数 n 阶厄密多项式，扰动的有量纲频率 ω 为

$$\omega=\frac{\beta k_1}{k_1^2+(1+2n)L^{-2}}\ . \tag{2.12.33b}$$

把 ω 的这个表达式与(2.12.31)式作比较，我们发现，$(1+2n)L^{-2}$ 相当于 k_2^2．下一小节中将说明，(2.12.33b)是原始方程当 $n\geqslant1$ 时得出的、向西传播的罗斯贝波频率的一个很好的近似。

2.12.4 低纬的大尺度运动　因为在赤道处 f 为零，在那里地转近似 $\psi=p/f$ 不成立。为了导出控制低纬大尺度运动的方程，我们使用令 $f=\beta y$ 的赤道 β 平面坐标，为简化起见，在(2.12.3)和(2.12.5*)中用流体静力近似（$\lambda_1=0$）和滞弹性近似（$\lambda_2=1$），并且相对于 $\frac{\partial}{\partial z}$ 项略去 Γ。其次，我们把水平长度尺度作为水平坐标的单位，把深度H作为垂直坐标的单位，时间取为 $1/\beta L$，并设

$$u_1,v_1,w_1=U\left(u,iv,w\frac{H}{L}\right)e^{i(kx+mz+\omega t)}, \tag{2.12.34a}$$

$$p_1,q_1=U\beta L^2(p,iq/gH)e^{i(kx+mz+\omega t)}\ . \tag{2.12.34b}$$

对于 $m\neq0$ 的内波，我们取 L 为

$$L^2=\frac{NH}{\beta m}=\frac{\sqrt{gh}}{\beta}, \tag{2.12.34c}$$

其中 $h=H^2S_z/m^2$ 是（对于内波 m）流体层的有效深度。于是方程(2.12.2)—(2.12.5*)简化为下述形式：

$$\omega u+yv=-kp, \tag{2.12.35a}$$

$$\omega v-yu=p_y, \tag{2.12.35b}$$

$$mp=q, \tag{2.12.35c}$$

$$\omega q=m^2w, \tag{2.12.35d}$$

$$ku+v_y+mw=0. \tag{2.12.35e}$$

从(2.12.35c-e)中消去 w 和 q，我们得到

$$ku+v_y+\omega p=0\ . \tag{2.12.35e*}$$

我们看到，连续方程的这种形式也适用于与有辐散的纯水平正压运动相联系的外波（$m=0$，$\lambda_2=1$）。这些外波的水平尺度为

$$L^2=\sqrt{gH}/\beta. \tag{2.12.34c*}$$

从(2.12.35a)和(2.12.35e*)中解出 u 和 p，对于 $\omega\neq k$，我们得到

$$(\omega^2-k^2)u=kv_y+\omega yv, \tag{2.12.36a}$$

$$(\omega^2-k^2)p=-\omega v_y-kyv. \tag{2.12.36b}$$

把这些关系式代入（2.12.35b），于是我们得到如下关于 v 的方程：

$$\frac{d^2v}{dy^2}+\left(\frac{k}{\omega}+\omega^2-k^2-y^2\right)v=0. \qquad (2.12.37)$$

注意，这个方程与(2.12.32)式的不同之处仅是在 v 的系数中出现了 ω^2. 对于所有的 y，为使 v 保持有限，必有：

$$\omega^2+\frac{k}{\omega}-k^2=1+2n, \qquad (2.12.38)$$

其中 n 是一正整数或零。因此，(2.12.37)式的解和相应的振幅函数 u 和 p 为

$$v(y)=e^{-y^2/2}H_n(y), \qquad (2.12.39a)$$

$$u(y)=\frac{1}{(\omega+k)}\left\{\frac{k}{(\omega-k)}\frac{dH_n}{dy}+yH_n\right\}e^{-y^2/2}, \qquad (2.12.39b)$$

$$p(y)=\frac{-1}{(\omega+k)}\left\{\frac{\omega}{(\omega-k)}\frac{dH_n}{dy}-yH_n\right\}e^{-y^2/2}. \qquad (2.12.39c)$$

这些解已被松野(1966)，Lindzen(1967)和其他许多人讨论过。图 2.12.5 说明了 v 随 y和n 的变化。

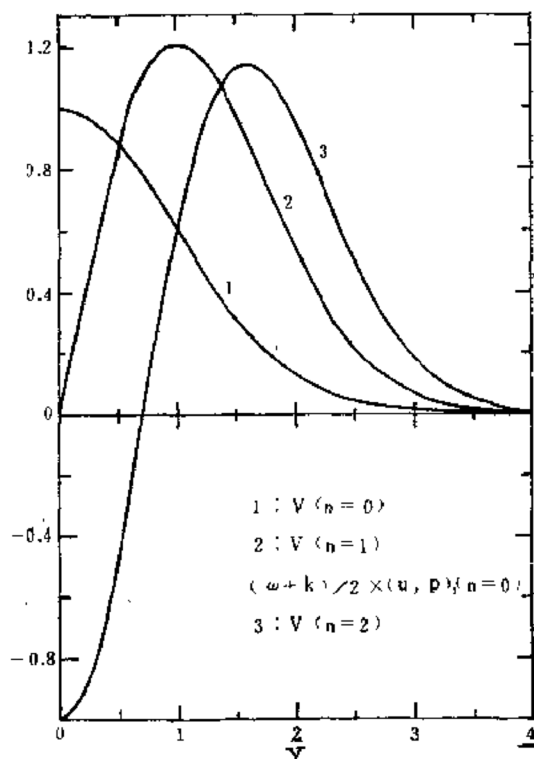


图2.12.5　低纬罗斯贝波的振幅

我们从(38)式看到，对于 $n\geqslant1$，罗斯贝波的低频 ω_R 与重力波的高频 ω_G 是完全分离的，它们近似地为

$$\omega_R\approx\frac{k}{1+2n+k^2}, \qquad (2.12.40a)$$

$$\omega_G\approx\pm(1+2n+k^2)^{1/2}. \qquad (2.12.40b)$$

注意，(2.12.39a)和(2.12.40a)与(2.12.33a)和(2.12.33b)是一致的，因此这些罗斯贝波甚至在低纬也可精确地用准地转位涡方程来表达。

从（2.12.40b）我们看到，由这两个根所表示的扰动的向西的相速度和群速度为：

$$C_{Gx}=\pm\left(1-\frac{1+2n}{k^2}\right)^{1/2}, \qquad (2.12.41a)$$

$$C_{Ggx}=\pm\left(1+\frac{1+2n}{k^2}\right)^{-1/2}. \qquad (2.12.41b)$$

可以看到，C_{Gx} 和 C_{Ggx}具有相同的方向，对于大的 k，二者都趋于极限±1；但在 $k_1=0$ 时，C_{Gx} 从∞开始，而 C_{Ggx} 从零开始。所以与很长的波相联系的能量是不传播的。容易证明，C^*_{Gpk} 和 C_{Gg} 的垂直分量方向相反.因此，这些扰动具有上面讨论过的惯性重力波的性质。

下面我们来讨论与 $n=0$、并与

$$v=e^{-y^2/2}, \qquad v_y=-yv \tag{2.12.42a,b}$$

相对应的解。从(2.12.35a)和(2.12.35e*)或(2.12.36a,b)式，我们有

$$u=p=\frac{y}{(\omega+k)}e^{-y^2/2}. \tag{2.12.42c}$$

把这些解代入(2.12.35b)，得到由下面这个二次方程给出的ω：

$$\omega^2+k\omega-1=0 . \tag{2.12.43}$$

它等价于方程(2.12.38)除以系数$(\omega-k)$。这就是说，对于$n=0$，三次方程(2.12.38)的三个根中只有两个根，即(2.12.43)式给出的两个根，才是有物理意义的根，而第三个根$\omega=k$，必须舍去，因为方程(2.12.35b)不满足这些位相关系。

利用当y趋于$\pm\infty$时，u和p也一定为零的条件，也可得到这个结论。于是，我们从(2.12.35a,b)中消去u便得到

$$\omega p_y-kyp=(\omega^2-y^2)v. \tag{2.12.44}$$

因而对于$n=0$，$v=e^{-y^2/2}$，我们有

$$p(y)=\frac{1}{\omega}\exp\left[\frac{k}{\omega}\frac{y^2}{2}\right]\int_{-\infty}^{y}(\omega^2-y^2)\exp\left[-\left(1+\frac{k}{\omega}\right)\frac{y^2}{2}\right]dy$$

$$=\frac{(2\omega)^{1/2}}{(\omega+k)^{3/2}}\exp\left[\frac{k\eta^2}{(\omega+k)}\right]\cdot\left\{(\omega^2+k\omega-1)\times\int_{-\infty}^{\eta}e^{-\eta^2}d\eta+\omega\eta e^{-\eta^2}\right\}, \tag{2.12.45}$$

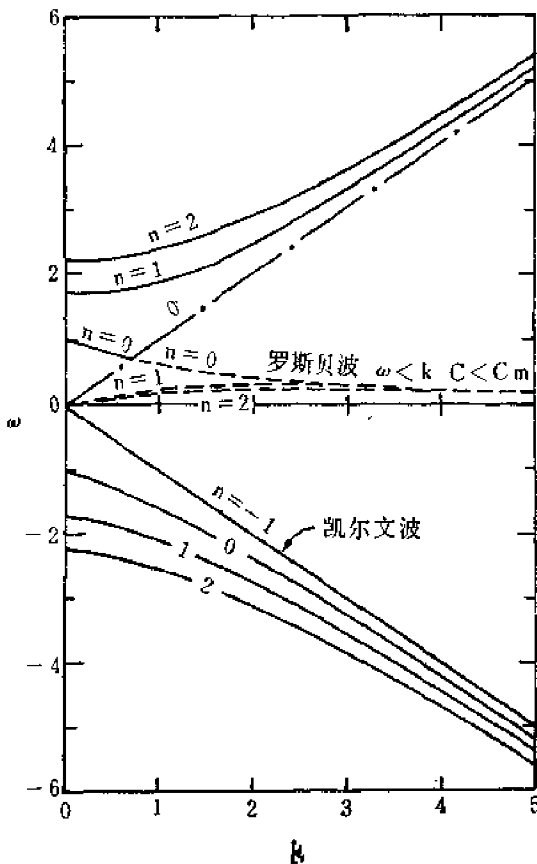


图2.12.6 赤道波的位相关系

式中$\eta=y[(\omega+k)/2\omega]^{1/2}$。这个式子表明，由于$y\to\infty$时，$p$为零，所以误差积分的系数必须为零，这恰好是(2.12.43)式的关系。于是上面的解简化为(2.12.42c)。

所以对$n=0$，两个可能的解的频率为

$$\omega_1=-\left(\frac{k^2}{4}+1\right)^{1/2}-\frac{k}{2}, \tag{2.12.46a}$$

$$\omega_2=\left(\frac{k^2}{4}+1\right)^{1/2}-\frac{k}{2}. \tag{2.12.46b}$$

这些根在图2.12.6中用标有$n=0$的曲线表示，而相应的相速度和群速度则表示在图2.12.7a,b中。可以看到C_{ph1}和C_{g1}都是向东的。所以ω_1对应于经向波节数为零的向东传播的惯性重力波。另一方面，C_{ph2}向西而C_{g2}向东这一事实以及C_{ph}和C_g曲线在图2.12.4a和图2.12.7b中的相似，说明与ω_2相对应的扰动是有大的南北向波长的罗斯贝波。但是，由于罗斯

贝波和由ω_1表示的向东传播的惯性重力波之间的耦合，频率关系(2.12.46a,b)不能从位涡方程(2.12.29)式得到。因此把这些波分别归于修正的或混合的重力波和罗斯贝波是有益的。

除以上讨论的解外，方程(2.12.35a-e)还给出凯尔文波解，其特征是ν严格为零。这些扰动的频率关系和振幅函数为

$$\omega=-k, \tag{2.12.47}$$

$$u=p=e^{-y^2/2},\quad v=0. \tag{2.12.48}$$

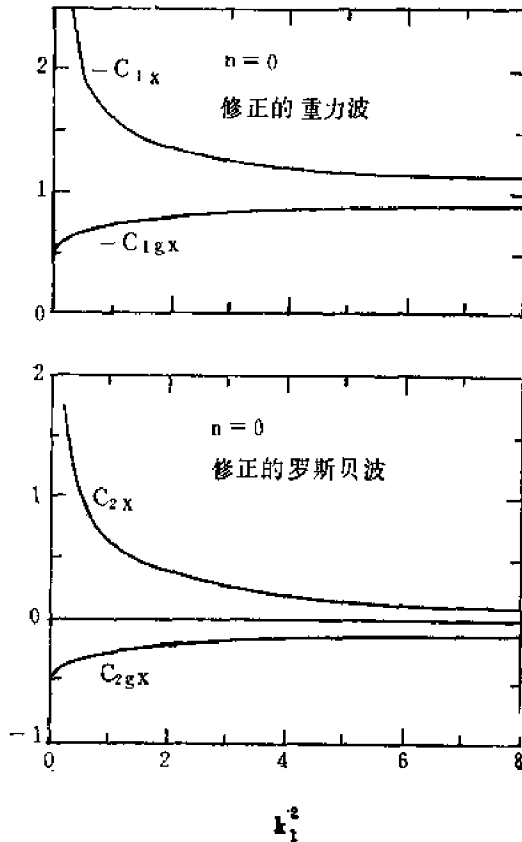


图2.12.7 波数为k_1的修正的重力内波和罗斯贝波的相速和群速之变化

关系式(2.12.47)在图2.12.6中用标有$n=-1$的曲线表示。由于赤道波的振幅随着离赤道的距离按$e^{-y^2}/2L^2$衰减，且L^2与垂直波长成正比，因此，当垂直波长较短的内波在低纬产生时，它们是被拦截的。另一方面，如果这样的扰动在高纬产生，并且它们的振幅在y方向是振荡的，那末，当它们传播到低纬时，其南北向波长将按(2.12.37)式减小。

2.12.5 球面几何形状的影响 应当指出，v的方程(2.12.37)和频率方程(2.12.38)是从线性化的原始方程组β平面近似得到的，因此它们不包含地球球面几何形状的影响，我们必须使用球坐标。为方便起见，设

$$(u_1',v_1')\cos\phi=U(u^*,iv^*)R(z)e^{i\xi}, \tag{2.12.49a}$$

$$p_1',q_1',w_1'=U\left\{2\Omega a\left(R,\frac{1}{gH}Q\right),\frac{iH}{a}w\right\}p^*(\eta)e^{i\xi}, \tag{2.12.49b}$$

其中$\xi=S\lambda+\omega t$，λ是经度，ϕ是纬度，Ω是地球自转角速度，$t=2\Omega t'$，u^*、v^*和p^*只是$\eta=\sin\varphi$的函数，而R、Q、w只是z的函数。并且，我们假定所有这些垂直方向的函数满足如下形式的方程：

$$w_{zz}=-\frac{N^2H^2}{C_m^2}w, \tag{2.12.50}$$

其中C_m^{-2}是分离常数。然后我们从以下两个方程得到函数v^*和p^*：

$$\frac{d}{d\eta}\left[(1-\eta^2)\frac{dv^*}{d\eta}\right]+\frac{2b\eta}{\Delta}(1-\eta^2)\frac{dv^*}{d\eta}$$

$$+\left\{\frac{S}{\omega\Delta}[b(1+\eta^2)-S^2]+b\left(1-\frac{\eta^2}{\omega^2}\right)-\frac{S^2}{1-\eta^2}\right\}v^*=0, \tag{2.12.51}$$

$$\frac{d}{d\eta}\left[\frac{(1-\eta^2)}{(\eta^2-\omega^2)}\frac{dp^*}{d\eta}\right]-\left\{\frac{S^2}{(1-\eta^2)(\eta^2-\omega^2)}-\frac{S}{\omega}\frac{(\eta^2+\omega^2)}{(\eta^2-\omega^2)^2}+\frac{b}{\omega^2}\right\}p^*=0, \quad (2.12.52)$$

其中，

$$b=\frac{4\Omega^2a^2}{C_m^2}\omega^2, \quad \Delta=b(1-\eta^2)-S^2 . \quad (2.12.51a,b)$$

注意，当C_m^2写成gh，且h被认为是相当深度时，(2.12.52)式与拉普拉斯潮汐方程是一致的。

可以看出，对于$\eta^2\ll1$和$\eta\ll\frac{d}{d\eta}$，(2.12.51)式化为(2.12.37)式。所以β平面方程只是在满足$\eta^2\ll1$的热带才严格适用。此外，方程(2.12.51)和(2.12.52)跟方程(2.12.37)与(2.12.38)不同，它表明在考虑球面几何形状时，频率ω一般不能从微分方程分离出来。所以除了由$C_m^2=\infty$，$b=0$所表征的无辐散扰动外，频率ω非要用数值方法确定不可。对于$C_m^2=\infty$，$b=0$的无辐散扰动，(2.12.51)式化为

$$\frac{d}{d\eta}\left[(1-\eta^2)\frac{dv^*}{d\eta}\right]+\left[\frac{S}{\omega}-\frac{S^2}{1-\eta^2}\right]v^*=0. \quad (2.12.51^*)$$

它相当于用球坐标表示的方程(2.12.30)。该方程的解是

$$v^*(\eta)=P_n^s(\eta), \quad (2.12.53)$$

其中n是等于或大于波数S的正整数，$P_n^s(\eta)$是连带勒让德函数，而频率ω由Haurwitz公式给出：

$$\omega=\frac{S}{n(n+1)}. \quad (2.12.54)$$

通过以上分析，我们看到，在通常的大气和海洋状况下，温度层结和地球转动对普通声波的影响是非常小的。因此在研究声波时，这些影响可以略去。其次，采用滞弹性近似或流体静力近似也都可以从系统中消除声波，这使得对低频的惯性重力波和罗斯贝波或涡旋波的研究变得简单多了。我们发现，对于不同类型的扰动，相速度和群速度之间的关系是很不一样的。我们还看到，当布伦特-维赛拉频率N大于科氏参数时，所有惯性波被消去，而当N小于f时，所有的重力波被消去。换句话说，这两种类型的运动是互相排斥的。此外，除了与$n=0$相应的修正的赤道罗斯贝波外，罗斯贝波可以精确地用准地转涡度方程来表示，修正的赤道罗斯贝波通过辐散和几何形状与向东传播的修正的惯性重力波相耦合。

特别应当指出，系统中产生的波动类型取决于强迫作用的特征频率和波数。

第三章　无粘浅水理论

3.1　引　言

在这一章里，我们着手研究均质不可压缩的无粘旋转浅流体之动力学。考虑这种物理系统的目的有两个。首先，它足够简单，以至于能够直接处理地转退化问题引起的麻烦，而无需同时处理密度层结流体的复杂热力学问题，本章的主要目的，是说明如何能系统地使用地转近似来建立一个适于计算大时空尺度运动的决定性的动力学框架。而且，本章提供的分析方法，也能推广到研究热力学性质活跃的流体。分析的诀窍是提出系统的近似简化方案，其中地转近似只是第一步。

其次，本章的第二个目的是使用该模式研究大气和海洋的重要的基本运动。当然，事先我们并不清楚，一个完全忽略层结的模式对此目的是全然有用的。在这里，这样的设想直接为研究提出一个真实大气或海洋的模式，其效果必须经过事实的检验。在某种程度上，这一模式化步骤总是信念的飞跃。这一步骤是否管用，取决于模式构造者在预先处理物理模式描写大气或海洋系统基本动力学特征的方法上所具有的直觉技能。选择模式是依靠经验、个人的直觉以及动力学推理的清晰程度。需要强调指出的是，一旦选定了模式之后，只有通过系统地、有逻辑地、精确地计算出用于模式之运动定律的动力预报，才能恰当地试验模式的用途。

经验表明，浅水模式能够描写大气和海洋运动的重要特征，所以我们现在可以直接方便地用它对该领域中的早期研究者的工作进行深入而直观的洞察[1]。肯定地说，浅水模式所描写的运动，只能应用到那些层结效应并非是决定性因子的现象中。

3.2　浅水模式

我们考虑如图3.2.1所示的，具有均匀的常值密度的一层流体。自参考面$z=0$算起的流

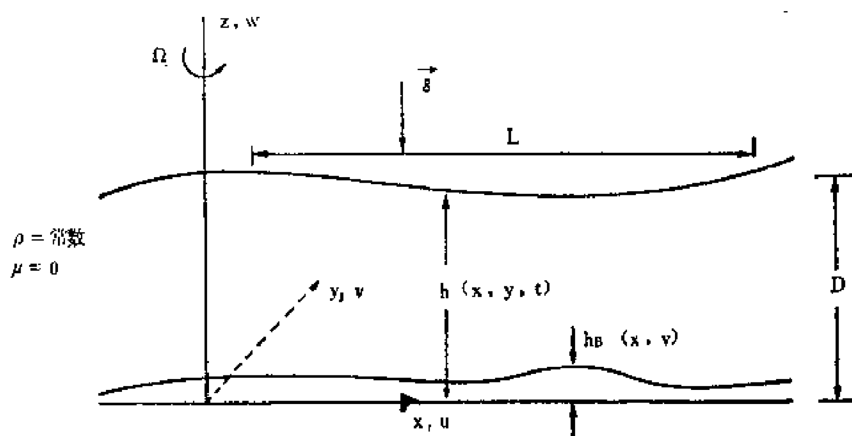


图3.2.1　浅水模式

（1）　这种由直觉得到的飞跃，在Rossby(1939)和Stommel(1948)的工作中非常清楚。

体表面高度为$h(x,y,t)$。考虑到对地球大气和海洋的应用，我们把由位势 ϕ 引起的彻体力，模式化为一个矢量 $\mathbf{g}$，其方向垂直于 $z=0$ 面，即与垂直坐标轴平行而方向相反。在模式中，流体的旋转轴与 z 轴重合，即 $\mathbf{\Omega}=\mathbf{k}\Omega$，故在此情况下，科氏参数$f$就是 2Ω。刚性底边界由曲面$z=h_B(x,y)$定义。平行于 x、y 和 z 轴的速度分量分别是 u、v 和 w。施加在流体表面上的压力可以是任意的，但在我们的讨论中把它取为常数。最后，我们假设流体是无粘性的，即在本章中只考虑那些粘滞性不重要的运动。

显然，流体的深度 $h-h_B$ 随空间和时间变化，但我们假设，可以把深度的特征值选为已知量，并记该量为 D。例如，可把 D 选为流体层的平均深度。我们还假设，D 也表征运动的垂直尺度。同样，我们假设存在一个运动的特征水平长度尺度，并把它记为 L。表征浅水[1]理论的基本参数条件是

$$\delta=\frac{D}{L}\ll 1. \tag{3.2.1}$$

因此，浅水模式包含着第一章中描述过的大气与海洋某些重要的动力学特征。流体是旋转的，所以科氏加速度是重要的，并且运动的形态比是小量。然而，流体层是扁平的，并非构成一个球壳。但在3.17节中，我们将看到，这对模式的应用来说并没带来十分严重的缺陷。它的主要物理缺陷，如上所述，是没有真实大气与海洋所具有的那种密度层结。

3.3 浅水方程

在这一节里，我们探讨动力学运动方程在浅水模式中的结果。采用不可压缩和常值密度的假设，可以使耦合的动力学与热力学问题简化为单纯的动力学问题；同时，质量守恒方程也简化为不可压缩条件：

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0. \tag{3.3.1}$$

(3.3.1)式中前两项的每一项之量级都是 $O(U/L)$，这里 U 是水平速度的特征尺度。如果W是垂直速度尺度，则可以得出W/D不能大于$O(U/L)$，即

$$W\leqslant O(\delta U). \tag{3.3.2}$$

若$\partial u/\partial x$和$\partial v/\partial y$是相互抵消的，则垂直速度可以小于(3.3.2)式的估计值，所以(3.3.2)式实际上代表W的上限。

现在我们来估计动量方程各项的大小。用分量形式表示，它们就是 (1.6.7) 式的无粘形式，即

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\left[u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right]-fv=-\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}, \tag{3.3.3}$$

$$\frac{U}{T}\quad \frac{U^2}{L}\quad \frac{U^2}{L}\quad \frac{UW}{D}\quad fU=\frac{P}{\rho L},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\left[u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right]+fu=-\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y}, \tag{3.3.4}$$

---

(1) 习惯上用水层来考虑问题，但是很显然，考虑象低速运动的空气这样的任何不可压缩流体都是恰当的。

$$\frac{U}{T} \quad \frac{U^2}{L} \quad \frac{U^2}{L} \quad \frac{UW}{D} \quad fU = \frac{P}{\rho L},$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\left[u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right]=-\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z}, \tag{3.3.5}$$

$$\frac{W}{T} \quad \frac{UW}{L} \quad \frac{UW}{L} \quad \frac{WW}{D} = \frac{P}{\rho D},$$

式中每项大小的量级已用特征尺度写在它的下面。注意，T 是时间的特征尺度，即时间变化的适当尺度，而 P 是可变压力场的尺度——即总的压力，已经写成

$$p(x,y,z,t)=-\rho gz+\tilde{p}(x,y,z,t), \tag{3.3.6}$$

式中右边第一项与单位质量流体所受的常值重力相抵消。因为根据(3.3.2)式有

$$\frac{UW}{D}=O\left(\frac{U^2}{L}\right), \tag{3.3.7}$$

所以从(3.3.3)和(3.3.4)式可以得出，为了使水平压力梯度力作为一个强迫项来维持水平动量平衡（否则流动是无加速度的），压力尺度应由下式给出，

$$P=\rho U\left[\frac{L}{T},U,fL\right]_{\max}, \tag{3.3.8}$$

(即由各端三项中最大的一项给出)。这又意味着，(3.3.5)式左边的项与垂直压力梯度之比，不超过下式中的较大项的量级：

$$\frac{\rho[W/T,WU/L]}{P/D}=O\left(\rho\frac{dw/dt}{\partial\tilde{p}/\partial z}\right), \tag{3.3.9}$$

或者由(3.3.8)式得，

$$\rho\frac{dw/dt}{\partial\tilde{p}/\partial z}=\frac{\delta^2(1/T,U/L)_{\max}}{(1/T,U/L,f)_{\max}}. \tag{3.3.10}$$

这里有两种重要情况。如果罗斯贝数 U/fL 为 $O(1)$ 或者更大，则 (3.3.10) 式估计出一个 $O(\delta^2)$ 的比值。如果罗斯贝数是小量，则比值为 $O(\delta^2[1/fT,U/fL]_{\max})$，对于小罗斯贝数而言，该量级比 $O(\delta^2)$ 还要小。因为值设有 $\delta^2\ll 1$，故可得出，至少精确到 $O(\delta^2)$ 量级，$\partial\tilde{p}/\partial z$ 可以忽略不计，或用总压力写为更简洁的形式：

$$\frac{\partial p}{\partial z}=-\rho g+O(\delta^2), \tag{3.3.11}$$

这就是静力近似。请再次注意，正确的尺度分析论证，并不是把垂直加速度与 g 比较，而是必须把垂直加速度（由于 (3.3.2) 式的关系，它为一小量）与由运动引起的垂直气压梯度力相比较。从另一观点说，可以把(3.3.11)式取为浅流体模式的定义。

直接积分(3.3.11)式，可得到

$$p=-\rho gz+A(x,y,t). \tag{3.3.12}$$

再由边界条件

$$p(x,y,h)=p_0,$$

式中 p_0 是常数，可得

$$p=\rho g(h-z)+p_0, \tag{3.3.13}$$

所以在任何一点，$p-p_0$ 就等于该时刻、该点上方单位面积流体柱的重量。

其次应注意，水平压力梯度与 z 无关，即

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\rho g\frac{\partial h}{\partial x}, \tag{3.3.14a}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}=\rho g\frac{\partial h}{\partial y}, \tag{3.3.14b}$$

所以水平加速度必然与 z 无关。因此可以假设，若初始水平速度场与 z 无关，则在其后的运动中仍保持与z无关。对于低罗斯贝数，用于均质流体的泰勒-普劳德曼定理要求速度与 z 无关，实际上我们在处理这一问题时将恰好用到上述假定。

水平动量方程变为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}-fv=-g\frac{\partial h}{\partial x}, \tag{3.3.15a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+fu=-g\frac{\partial h}{\partial y}. \tag{3.3.15b}$$

利用 u 和 v 与 z 无关的条件，可将(3.3.1)式对 z 积分得

$$w(x,y,z,t)=-z\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\tilde{w}(x,y,t). \tag{3.3.16}$$

刚性底面 $z=h_B$ 处法向速度为零的条件要求

$$w(x,y,h_B,t)=u\frac{\partial h_B}{\partial x}+v\frac{\partial h_B}{\partial y}. \tag{3.3.17}$$

因此，

$$\tilde{w}(x,y,t)=u\frac{\partial h_B}{\partial x}+v\frac{\partial h_B}{\partial y}+h_B\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right). \tag{3.3.18}$$

故有

$$w(x,y,z,t)=(h_B-z)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+u\frac{\partial h_B}{\partial x}+v\frac{\partial h_B}{\partial y}. \tag{3.3.19}$$

在 $z=h$ 面上，相应的运动学条件是

$$w=\frac{\partial h}{\partial t}+u\frac{\partial h}{\partial x}+v\frac{\partial h}{\partial y}, \qquad z=h(x,y,t) \tag{3.3.20}$$

将此式与(3.3.19)式合并得

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\{(h-h_B)u\}+\frac{\partial}{\partial y}\{(h-h_B)v\}=0. \tag{3.3.21}$$

定义总深度

$$H=h-h_B.$$

用H来表示质量守恒方程，则(3.3.21)式变为

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(uH)+\frac{\partial}{\partial y}(vH)=0, \tag{3.3.22a}$$

或等价地写为

$$\frac{dH}{dt}+H\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0. \tag{3.3.22b}$$

上述两式中的第一式(3.3.22a)说明，若局部水平体积散度$\nabla\cdot(\mathbf{u}_H H)$为正，则它必须被自由表面下降而引起的流体层厚度局部减小所平衡。第二个表达式(3.3.22b)与(3.3.22a)完全等价，是跟随流体运动的表达式，当流体柱的横截面积A以相对速率

$$\frac{1}{A}\ \frac{dA}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y} \tag{3.3.23}$$

增加时，其总厚度必须减小，故有

$$\frac{1}{H}\ \frac{dH}{dt}+\frac{1}{A}\ \frac{dA}{dt}=0, \tag{3.3.24}$$

即体积HA保持不变。

浅水方程组由(3.3.15a、b)和(3.3.22a)或其等价形式(3.3.22b)组成。注意，由于使用$\delta\ll 1$这个条件，结果减少了一个动力学方程，减少了一个因变量（从动力学方程中消去了w），而且减少了一个自变量（因动力学方程中不再显含z）。剩下的因变量是u、v和h，它们只是x、y和t的函数。

w是z的简单的线性函数这一事实，有着重要的更深一层的涵义。如果我们用(3.3.22b)从(3.3.19)式中消去$\partial u/\partial x+\partial v/\partial y$，则可得到

$$w=\frac{dz}{dt}=\frac{z-h_B}{H}\ \frac{dH}{dt}+u\frac{\partial h_B}{\partial x}+v\frac{\partial h_B}{\partial y}, \tag{3.3.25}$$

这意味着

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{z-h_B}{H}\right\}=0, \tag{3.3.26}$$

所以，跟随每个流体之运动时，函数$(z-h_B)/H$是守恒的，而$(z-h_B)/H$是每个流体之距底边界的相对高度，即相对位置，在底边界处其值最小（为零），而在自由表面处取最大值1。在流体运动中，u，v与z无关，这意味着流体作为与z轴平行的流体柱的集合体而运动。(3.3.26)式给出的条件可以简明地叙述如下：当每个值体柱伸长或收缩时，流体元在该柱中的相对位置是不变的。

3.4 位涡守恒：浅水理论

在笛卡尔坐标系中，相对涡度的三个分量是

$$\omega_x=\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}, \tag{3.4.1a}$$

$$\omega_y=\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}, \tag{3.4.1b}$$

$$\omega_z=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{3.4.1c}$$

在我们现在的讨论中，u和v与z无关，

$$\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} = O\left(\frac{W}{L}\right) = O\left(\delta\frac{U}{L}\right), \tag{3.4.2a}$$

$$\omega_y = -\frac{\partial w}{\partial x} = O\left(\frac{W}{L}\right) = O\left(\delta\frac{U}{L}\right), \tag{3.4.2b}$$

$$\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = O\left(\frac{U}{L}\right), \tag{3.4.2c}$$

所以，相对涡度的水平分量比其垂直分量小 $O(\delta)$ 倍。如果将(3.3.15$a.b$)中第一个方程对 y 求微商，第二个方程对 x 求微商，然后消去 h，便得

$$\frac{d\zeta}{dt} \equiv \frac{\partial\zeta}{\partial t} + u\frac{\partial\zeta}{\partial x} + v\frac{\partial\zeta}{\partial y} = -(\zeta+f)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right), \tag{3.4.3}$$

式中引进了记号

$$\zeta \equiv \omega_z. \tag{3.4.4}$$

随流体柱一起运动时，唯一能使相对涡度变化的机制是绝对涡丝的辐合。利用(3.3.22b)式，我们可以把(3.4.3)式改写为

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{\zeta+f}{H}\ \frac{dH}{dt}, \tag{3.4.5}$$

该式用涡管的伸长代替辐合，表达了与(3.4.3)式完全相同的结果，即若 $dH/dt>0$(伸长)，涡度 ζ 增大，它与流体柱的伸长和已经存在的绝对涡度 $f+\zeta$ 之乘积成正比。注意，涡管倾斜不能使 ζ 变化，在浅水理论的柱状运动中没有这种机制。

由于 f 是常数，故(3.4.5)式可以写成如下形式：

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\zeta+f}{H}\right) = 0}\ . \tag{3.4.6}$$

随流体柱运动时，

$$\Pi_s = \frac{\zeta+f}{H} \tag{3.4.7}$$

是守恒的。如果 H 增加，那末绝对（从而相对）涡度也必须增加，以保持 Π_s 对于流体柱守恒。注意，如果开始时 ζ 为零，只要 H 保持不变，则 ζ 将保持为零；换句话说，相对涡度是由于流体柱在行星涡度场 f 中的伸长而产生的。从(3.4.6)式的物理意义中应当清楚地看到，Π_s 直接与(2.5.8)式所定义的总位涡有关。关于这一点还可以从下述事实中看出来：由于流体是平凡正压的，因此任何守恒的流体属性 λ 都可用来定义 Π，特别是相对位置函数(3.3.26)，即

$$\lambda = \frac{z-h_B}{H}, \tag{3.4.8}$$

更是一个可用的守恒性质。由于略去 $O(\delta)$ 的小量以后，涡度的唯一分量是垂直分量，于是我们有

$$\Pi = \frac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho}\cdot\nabla\lambda = \frac{(\zeta+f)\mathbf{k}\cdot\nabla}{\rho}\left\{\frac{z-h_B}{H}\right\} + O(\delta)$$

$$= \frac{(\zeta+f)}{\rho}\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z-h_B}{H}\right)$$

$$=\frac{\zeta+f}{\rho H}. \tag{3.4.9}$$

因为ρ是常数，所以若不计常数因子，Π_z正是位势涡度。在浅水理论中，主要出于历史上的沿用，习惯上称Π_z为位涡，本章中一律使用这一术语。

3.5 积分关系

在考虑特殊的问题之前，首先推出某些普遍的积分约束关系，对我们将是有帮助的。这些积分关系将应用于以后的浅水模式。

考虑以曲线C_0为边界的闭区域R内，受方程(3.3.15a、b)和(3.3.22a)控制的流体之运动。并且如图3.5.1所示，令R包含J个内"岛"，它们分别以曲线$C_j(j=1,2,\cdots,J)$为边界。所有的边界C_0、C_1、$\cdots C_J$，对流体运动来说都是刚性且不可渗透的，因此在每一边界上都有

$$\mathbf{u}_H\cdot\mathbf{n}_j=0, \tag{3.5.1}$$

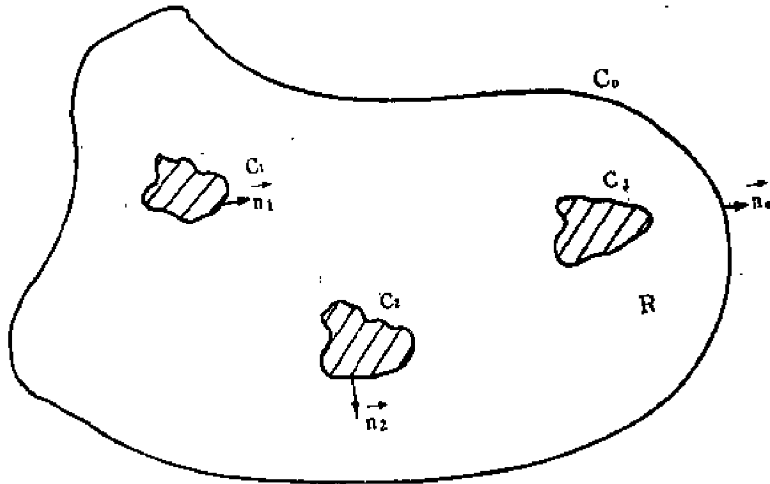


图3.5.1 周线C围成流体域R，R中含有以曲线$C_j(j=1,2,\cdots,J)$为边界的许多岛。

式中$\mathbf{n}_j$是每条周线向外的法向单位矢量，$\mathbf{u}_H$是水平速度，即

$$\mathbf{u}_H=\mathbf{i}u+\mathbf{j}v. \tag{3.5.2}$$

水平动量方程可改写为矢量形式

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u}_H+\nabla\frac{\mathbf{u}_H\cdot\mathbf{u}_H}{2}+(\zeta+f)\mathbf{k}\times\mathbf{u}_H=-g\nabla h. \tag{3.5.3}$$

如果将(3.5.3)式沿任意闭周线$C_j(j=1,2,\cdots,J)$积分，那末有

$$\frac{\partial}{\partial t}\oint_{c_j}\mathbf{u}_H\cdot d\mathbf{r}=-\oint_{c_j}(\zeta+f)(\mathbf{k}\times\mathbf{u}_H)\cdot d\mathbf{r}, \tag{3.5.4}$$

其中$d\mathbf{r}$是与C_j相切的矢量线元。(3.5.3)式中的其余项沿闭曲线的积分为零。因为

$$(\mathbf{k}\times\mathbf{u}_H)\cdot d\mathbf{r}=\mathbf{k}\cdot(\mathbf{u}_H\times d\mathbf{r}),$$

而且根据(3.5.1)式，在C_j上$\mathbf{u}_H$平行于$d\mathbf{r}$，所以(3.5.4)式右边的被积函数恒等于零。于是得到，相对速度沿每一曲线C_j的环流不随时间变化，即

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\oint_{c_j}\mathbf{u}_H\cdot d\mathbf{r}=0},\qquad j=0,1,2,\cdots J. \tag{3.5.5}$$

涡度方程(3.4.3)可以写成更紧凑的形式

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\nabla\cdot[(\zeta+f)\mathbf{u}_H]=0. \tag{3.5.6}$$

如果对(3.5.6)式在流体域R的面积A（即C_0和所有的岛边界C_j围成的面积）上积分，利用散度方程和(3.5.1)式，可以得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\iint_A\zeta dxdy=&\oint_{c_0}(\zeta+f)\mathbf{u}_H\cdot\mathbf{n}_0 dr\\&-\sum_{j=1}^{J}\oint_{c_j}(\zeta+f)\mathbf{u}_H\cdot\mathbf{n}_j dr=0,\end{aligned} \tag{3.5.7}$$

所以，按面积平均的相对涡度必定不随时间变化。(3.5.7) 式也可以根据斯托克斯定理直接从(3.5.5)式导出，留给读者去证明。

对(3.3.22a)式求类似的面积平均后得到

$$\frac{\partial}{\partial t}\iint_A h dxdy=0, \tag{3.5.8}$$

显然，这正是整个流体域内的总质量守恒。

如果用$H\mathbf{u}_H$点乘(3.5.3)式并利用(3.3.22b)式，则可得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\frac{H}{2}|\mathbf{u}_H|^2+\nabla\cdot\frac{1}{2}\{\mathbf{u}_H H|\mathbf{u}_H|^2\}&=-gH\mathbf{u}_H\cdot\nabla h\\&=-g\nabla\cdot H\mathbf{u}_H h+h_g\nabla\cdot\mathbf{u}_H H.\end{aligned} \tag{3.5.9}$$

进一步利用(3.3.22a)式消去(3.5.9)式右边第二项，得到

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{H}{2}|\mathbf{u}_H|^2+g\frac{h^2}{2}\right\}=-\nabla\cdot\left\{H\mathbf{u}_H\left[h_g+\frac{1}{2}|\mathbf{u}_H|^2\right]\right\}, \tag{3.5.10}$$

将此式在整个域A上积分得

$$\frac{\partial}{\partial t}\iint_A dxdy\left[\frac{H}{2}|\mathbf{u}_H|^2+\frac{gh^2}{2}\right]=0. \tag{3.5.11}$$

式中$(H/2)|\mathbf{u}_H|^2$项是单位体积的动能乘以H后得到的单位面积上流体柱的动能。w对动能的贡献是$O(\delta^2)$，已从(3.5.11)式中略去。单位面积上流体柱的位能是

$$\int_0^h gzdz=g\frac{h^2}{2}, \tag{3.5.12}$$

式中$z=0$面是任选的位能为零的参考面。因此，(3.5.11)式就是浅水理论中动能与位能之和守恒的表达式。如果在无穷远处速度场为零，那末当流体域无界时，上述积分关系仍然适用。

3.6 小振幅运动

在分析一组新的动力学方程时，第一步理应研究小振幅运动，因为它容许对方程作线性

化处理。特别是，代表自由振荡或自由波动的那些解，往往可以说明在比较复杂的情况中出现的基本机制。而且，就我们的目的来说，辨别出系统中自然振荡波型*所固有的时间尺度是很重要的。本节中我们将推导出线性化运动的控制方程。

令静止流体层厚度是$H_0(x,y)$，那末一般有

$$H(x,y,t)=H_0(x,y)+\eta(x,y,t). \tag{3.6.1}$$

小振幅的条件是指$\eta\ll H_0$，其次我们设u和v足够小，以至于满足

$$\frac{\partial \mathbf{u}_H}{\partial t}\gg \mathbf{u}_H\cdot\nabla\mathbf{u}_H. \tag{3.6.2}$$

略去所有的动力学变量u、v、η的二次项以后，(3.3.15a,b)和(3.3.22a)式的线性化形式是

$$\frac{\partial u}{\partial t}-fv=-g\frac{\partial\eta}{\partial x}, \tag{3.6.3a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+fu=-g\frac{\partial\eta}{\partial y}, \tag{3.6.3b}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(uH_0)+\frac{\partial}{\partial y}(vH_0)=0. \tag{3.6.3c}$$

用$\mathbf{u}=iU+jV$定义线性化的质量通量矢量，其中

$$\begin{aligned}U&=uH_0,\\ V&=vH_0.\end{aligned} \tag{3.6.4}$$

借助这一定义，(3.6.3a,b,c)变成

$$\frac{\partial U}{\partial t}-fV=-gH_0\frac{\partial\eta}{\partial x}, \tag{3.6.5a}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}+fU=-gH_0\frac{\partial\eta}{\partial y}, \tag{3.6.5b}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}=0. \tag{3.6.5c}$$

由这个方程组的前两个方程进行运算得到

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial x}\right\}-f\left\{\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}\right\}=-g\nabla\cdot\{H_0\nabla\eta\}, \tag{3.6.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}\right\}+f\left\{\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial x}\right\}=-g\left\{\frac{\partial H_0}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial H_0}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right\}, \tag{3.6.7}$$

由此可得

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+f^2\right)\left(\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial x}\right)$$

$$=-g\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\{H_0\nabla\eta\}-fg\left\{\frac{\partial H_0}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial H_0}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right\}. \tag{3.6.8}$$

* 本书中 mode 一词有时也译为“模态”。

使用(3.6.5c)式和(3.6.8)式，我们可以导出仅含因变量η的方程：

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+f^2\right)\eta-\nabla\cdot(C_0^2\nabla\eta)\right]-gfJ(H_0,\eta)=0}, \tag{3.6.9}$$

式中

$$C_0^2=gH_0, \tag{3.6.10}$$

并引进了两个函数的雅可比行列式：

$$J(A,B)\equiv\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial y}-\frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial B}{\partial x}, \tag{3.6.11}$$

求解从(3.6.3a,b)导出的下述常微分方程组：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+f^2\right)u=-g\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial t}+f\frac{\partial\eta}{\partial y}\right), \tag{3.6.12a}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+f^2\right)v=-g\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial y\partial t}-f\frac{\partial\eta}{\partial x}\right), \tag{3.6.12b}$$

我们就可以通过η来求出速度u和v。

3.7 线性地转运动

首先考虑(3.6.9)和(3.6.12a,b)式与时间无关的形式。这种形式的两个方程意味着

$$u=-\frac{g}{f}\frac{\partial\eta}{\partial y}, \tag{3.7.1a}$$

$$v=\frac{g}{f}\frac{\partial\eta}{\partial x}. \tag{3.7.1b}$$

注意到η与压力场之间的关系，该二式恰好是水平运动的地转关系。特别是，根据(3.7.1a)和(3.7.1b)式，我们有

$$u\frac{\partial\eta}{\partial x}+v\frac{\partial\eta}{\partial y}=0, \tag{3.7.2}$$

所以η的等值线就是定常地转运动的流线。此外，(3.6.9)式的定常形式就是

$$J(H_0,\eta)=0, \tag{3.7.3}$$

或者

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{H_0}=-\frac{\partial H_0/\partial x}{\partial H_0/\partial y}=-\frac{\partial\eta/\partial x}{\partial\eta/\partial y}=\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_\eta, \tag{3.7.4}$$

所以未受扰动的深度H_0的等深线一定与xy平面上η的等值线重合。由于η的等值线是定常地转运动的流线，故可得出，线性地转运动一定是如图3.7.1所示的沿等深线运动。当然，这是位涡守恒方程(3.4.6)的直接结果。对于定常的线性化运动，位涡守恒简化为

$$u_H\cdot\nabla\left(\frac{f}{H_0}\right)=0。 \tag{3.7.5}$$

因此，如果已知η在等深线的一个点处的值，那末等深线上各点的η值均被确定。显然，如果H_0的等值线与一个法向速度为零的刚性边界相交，那末沿这些闭合周线不可能有定常的线性运动。所以，只有当H_0的等值线自身闭合或伸向无限远时，才可能有严格的地转运动。注意，若H_0为常数，则任何地转运动都是可能的。

当然，实际运动并非精确的地转运动，在下几节里，我们将讨论，在没有定常或线性的限制时，会出现什么情况。

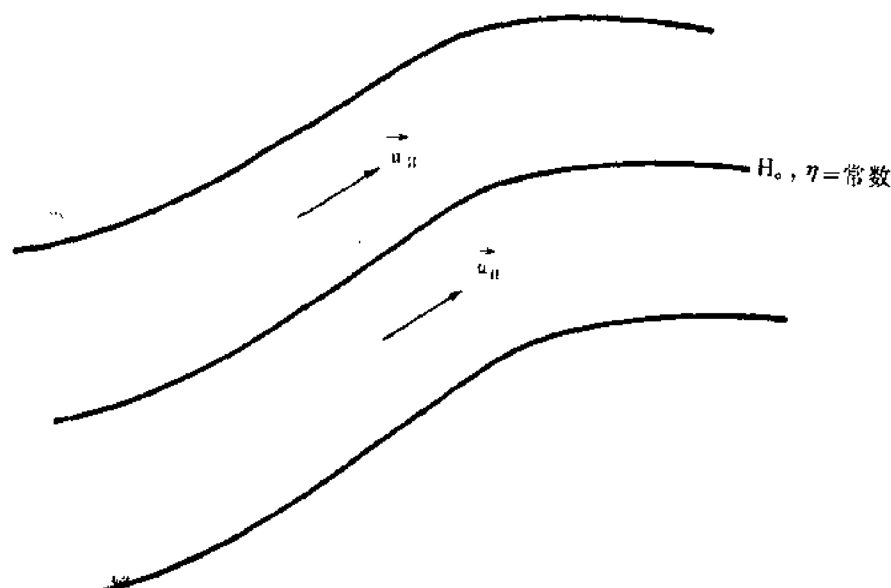


图3.7.1　对于定常的纯地转运动，等深线和流线必定如图所示相重合

3.8　等深流体层中的平面波

设流体层有足够大的侧向范围，我们可把它理想化为一个无限平面，即范围远远超过我们所要讨论的波动之波长。以下我们就来讨论在此无限平面上深度均匀的流体层中可能存在的自由振荡。因为深度H_0是常数，所以(3.6.9)式中的系数也是常数，于是可以寻找平面波形式的解，即

$$\eta=R_e\eta_0e^{i(kx+ly-\sigma t)},\tag{3.8.1}$$

式中记号R_e表示它所标记的那个函数的实部。η_0是振荡的振幅，而振荡的位相θ由下式给出

$$\theta=kx+ly-\sigma t.\tag{3.8.2}$$

如图3.8.1所示，在给定时刻，$kx+ly$的等值线上各点的位相（因而其表面高度）相等，图上绘出了等位相线，例如波峰线。对于平面波来说，波动性质沿等位相线是相同的。等位相线的法线方向由波矢量

$$\mathbf{K}=\nabla\theta=\mathbf{i}k+\mathbf{j}l\tag{3.8.3}$$

给出。

两条相邻的等位相线之间的垂直距离λ，由条件$|\mathbf{K}|\lambda=2\pi$确定，所以波长λ与波数$K=|\mathbf{K}|$有关，其关系式为

$$\lambda=\frac{2\pi}{K}.\tag{3.8.4}$$

波数表示垂直于波峰线的单位距离上所出现的空间波动的数目.

在任一给定点处，位相随时间线性变化的速率为

$$\sigma=-\frac{\partial\theta}{\partial t},\tag{3.8.5}$$

此式给出单位时间中经过该点的波峰数。位相沿x轴前进的速度，可以根据当x、t变化而y

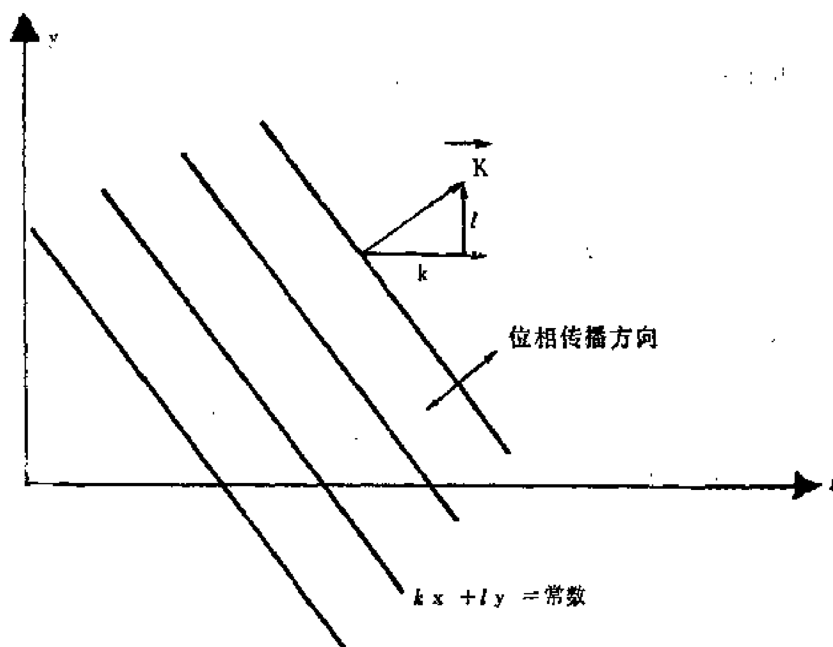


图3.8.1 平面波的几何图形。波矢量 k 垂直于波动的等位相线

固定时 θ 为常数的条件来确定。该条件意味着当 y 不变时，对于一个以速率

$$C_x=-\frac{\partial\theta/\partial t}{\partial\theta/\partial x}=\frac{\sigma}{k} \tag{3.8.6}$$

作平行于 x 轴运动的观察者来说，θ 保持不变。位相沿平行于 y 轴方向前进的速度是

$$C_y=-\frac{\partial\theta/\partial t}{\partial\theta/\partial y}=\frac{\sigma}{l}. \tag{3.8.7}$$

基本相速是在 K 方向（即波峰前进方向）上的位相传播速度。这个相速度是

$$C=-\frac{1}{|\nabla\theta|}\ \frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\sigma}{K}=\frac{\sigma}{(k^2+l^2)^{1/2}}, \tag{3.8.8}$$

它给出平行于 K 方向前进的相速度。

必须指出，相速度并不满足矢量合成法则。在 x 方向上的相速度，并不是 K 方向相速的 x 分量。那个速度应当是 $\sigma k/K^2$，它不等于 C_x. x 方向上的相速度表示等位相线与 x 轴的交点沿 x 轴前进的速率，这一速率随 K 在 x 轴上的投影的减小而增大，即

$$C_x=\frac{CK}{k}, \tag{3.8.9a}$$

同样，我们有

$$C_y=\frac{CK}{l}. \tag{3.8.9b}$$

如果把(3.8.1)式代入 H_0 为常数的(3.6.9)式，则(3.8.1)式是其解的条件为

$$\sigma\eta_0\{f^2-\sigma^2+C_0^2K^2\}=0. \tag{3.8.10}$$

若 $\sigma\neq 0$，即运动是非定常的（否则，可立即应用3.7节的结果）且 $\eta\neq 0$（波动有非零的振幅），则仅当 σ 是由(3.8.10)式确定的 K 的一个特定的函数时，平面波(3.8.1)才是一个解。这个关系式是一个频散关系式，在此简单情况下，由下式给出

$$\sigma=\sigma(K)=\pm\{f^2+C_0^2K^2\}^{1/2}. \tag{3.8.11}$$

在我们现在讨论的情况中，频率仅是**K**的绝对值的函数，而与它的方向无关，对于每个**K**，存在两个自由振荡，如以波动表示，其相速为

$$C=\pm\left\{C_0^2+\frac{f^2}{K^2}\right\}^{1/2}, \tag{3.8.12}$$

其波峰平行于**K**或反向平行于**K**的方向运动。

在没有旋转($f=0$)的情况下，所有波长的位相均以同样的相速$(gH_0)^{1/2}$运动，这就是经典线性理论中的浅水速度。旋转之存在使波速增加。实际上，从(3.8.11)式可以清楚地看到，所有这些自由波的频率都大于f，亦即它们的周期都小于旋转周期的一半，因此，这些波动的频率大大超过大气和海洋的大尺度缓慢运动的特征频率。

若$\eta_0=|\eta_0|e^{i\phi}$，我们可以把(3.8.1)式写为

$$\eta=|\eta_0|\cos(kx+ly-\sigma t+\phi). \tag{3.8.13}$$

现在我们可以用(3.6.12a,b)式求得u和v，或看为了使物理意义更清楚，写为

$$\begin{aligned}u_p&=\frac{|\eta_0|}{H_0}C\cos(kx+ly-\sigma t+\phi),\\ u_\perp&=\frac{|\eta_0|}{H_0}\,\frac{f}{\sigma}C\sin(kx+ly-\sigma t+\phi),\end{aligned} \tag{3.8.14}$$

式中

$$\begin{aligned}u_p&=\left[\mathbf{u}_H\cdot\frac{\mathbf{K}}{K}\right],\\ u_\perp&=[\mathbf{u}_H-u_p\mathbf{K}],\end{aligned} \tag{3.8.15}$$

即u_p是平行于**K**方向或垂直于波峰方向的质点速度，而$u_\perp$是沿波峰方向的质点速度。从(3.8.14)式可以得出，水平速度矢端随时间描绘出椭圆轨迹，如图3.8.2所示。它的方程为

$$u_p^2+u_\perp^2\frac{\sigma^2}{f^2}=\frac{C^2\eta_0^2}{H_0^2}. \tag{3.8.16}$$

在一个振荡周期中，速度矢量的末端沿顺时针方向绕椭圆一周。注意，由于$\sigma/f>1$，所以平行于**K**（即平行于η的梯度方向，从而也是平行于压力梯度方向）的最大速度，大于沿η的

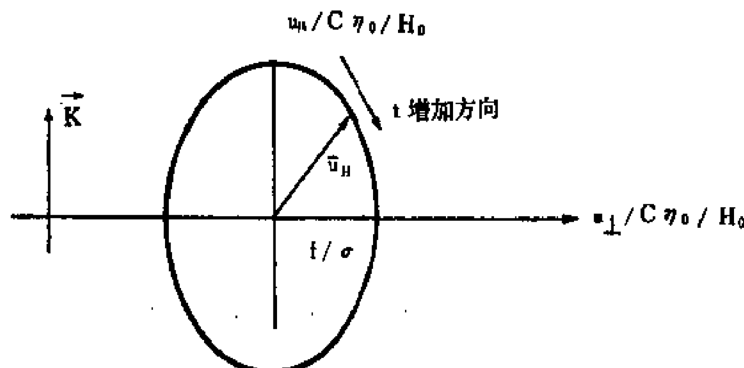


图3.8.2 邦加莱波中速度矢量描绘的椭圆

等位相线（即沿等压线）方向的最大速度。因而这些波动远非处于地转平衡中。流体运动主要发生在压力梯度方向上。

波动中的涡度是

$$\zeta=\frac{\mathbf{K}}{K}\cdot\nabla u_{\perp}=\frac{|\eta_0|}{H_0}\ \frac{f}{\sigma}KC\cos(kx+ly-\sigma t+\phi)=\frac{f\eta}{H_0},\tag{3.8.17}$$

这也可以直接从位涡方程(3.4.6)的线性化形式，

即

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\zeta-\frac{f}{H_0}\eta\right]=0\tag{3.8.18}$$

导出。对于周期性运动，直接积分即可得到(3.8.17)式。由于在波动移行过程中，自由表面时升时降，使涡管在有行星涡度 f 存在的环境场中伸缩，从而在波峰处产生正的相对涡度，在波谷处产生负的相对涡度。

波动场中的水平散度也可借助波高给出：

$$\nabla\cdot\mathbf{u}_H=-\frac{1}{H_0}\ \frac{\partial\eta}{\partial t}=O\left(\frac{\sigma\eta}{H_0}\right).\tag{3.8.19}$$

因此，相对涡度与水平散度的量级之比为

$$\frac{\zeta}{\nabla\cdot\mathbf{u}_H}=O\left(\frac{f}{\sigma}\right)<1,\tag{3.8.20}$$

该值大小是运动偏离地转运动的一个量度。

3.9 邦加莱波和凯尔文波

在本节中我们继续研究浅的旋转流体层中线性自由振荡波型。现在我们把注意力转到在有界区域中出现的波型上，考虑如图3.9.1所示的平行于 x 轴的宽度为 L 的通道。由于该区域在 y 方向有界，所以在无限域运动中 η 的解随 x 和 y 周期变化的隐含关系不再适用，情况已经起了变化。在通道两侧的刚壁处，y 方向速度必须为零，考虑到(3.6.12b)式，这一条件意味着

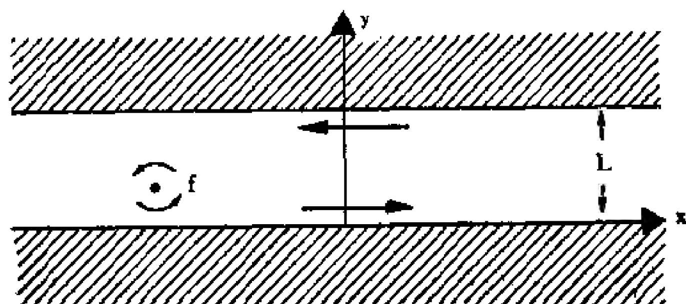


图3.9.1 以角速度 $f/2$ 旋转的宽度为 L 的无限长通道

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial y\partial t}-f\frac{\partial\eta}{\partial x}=0,$$

$$y=0,L.\tag{3.9.1}$$

对于常值深度 H_0，η 的控制方程仍是

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+f^2\right)\eta-C_0^2\nabla^2\eta\right\}=0.\tag{3.9.2}$$

可以寻找如下形式的随 x 和 t 周期变化的该解：

$$\eta=R_e\bar{\eta}(y)e^{i(kx-\sigma t)},\tag{3.9.3}$$

式中 $\bar{\eta}(y)$ 是复的波振幅，它随与通道垂直的坐标 y 变化。将(3.9.3)式代入(3.9.2)和(3.9.1)式，得到关于 $\bar{\eta}$ 的本征值问题，即

$$\frac{d^2\bar{\eta}}{dy^2}+\left\{\frac{\sigma^2-f^2}{C_0^2}-k^2\right\}\bar{\eta}=0,\tag{3.9.4}$$

$$\frac{d\bar{\eta}}{dy}+f\frac{k}{\sigma}\bar{\eta}=0, \qquad y=0,L. \tag{3.9.5}$$

(3.9.4)式的通解是

$$\bar{\eta}=A\sin\alpha y+B\cos\alpha y, \tag{3.9.6}$$

式中

$$\alpha^2=\frac{\sigma^2-f^2}{C_0^2}-k^2. \tag{3.9.7}$$

应用 $y=0$ 和 $y=L$ 处的边界条件(3.9.5)，可以得到关于 A 和 B 的线性齐次方程组，即

$$\alpha A+\frac{fk}{\sigma}B=0, \tag{3.9.8a}$$

$$A\left[\alpha\cos\alpha L+f\frac{k}{\sigma}\sin\alpha L\right]+B\left[\frac{fk}{\sigma}\cos\alpha L-\alpha\sin\alpha L\right]=0. \tag{3.9.8b}$$

仅当上述方程组之系数行列式为零时，才可能有 A 和 B 的非零解。经过一些运算之后，上述条件给出本征值关系式：

$$(\sigma^2-f^2)(\sigma^2-C_0^2k^2)\sin\alpha L=0. \tag{3.9.9}$$

上式存在三种可能情况：或者 $\sin\alpha L$为零，或者$\sigma^2=f^2$，或者$\sigma^2=C_0^2k^2$。下面我们分别考虑这三种可能情况。

(i) 方程

$$\sin\alpha L=0, \tag{3.9.10}$$

当 α 满足

$$\alpha=\frac{n\pi}{L}, \qquad n=1,2,3,\cdots\cdots, \tag{3.9.11}$$

时可以成立，即有无穷多个解。但是应当注意，$\alpha=n=0$，不可能是一个解。这样一个解代表波峰平行于 y 轴的平面波，即波动场中没有 y 方向变化的平面波。尽管这样的解对非旋转流体是可能的，但是从(3.6.12b)式，我们得出，对于 $\partial\eta/\partial y=0$，有

$$v=\frac{gf}{f^2-\sigma^2}\ \frac{\partial\eta}{\partial x}(x,t), \tag{3.9.12}$$

故v与 y 无关且不等于零，因此不可能满足 v 在 $y=0$ 和 $y=L$ 处为零的边界条件。本征值关系式(3.9.11)意味着

$$\alpha^2=\frac{\sigma^2-f^2}{C_0^2}-k^2=\frac{n^2\pi^2}{L^2}, \tag{3.9.13}$$

或者

$$\sigma=\sigma_n=\pm\left\{f^2+C_0^2\left(k^2+\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)\right\}^{1/2}, \quad n=1,2,3,\cdots\cdots, \tag{3.9.14}$$

该式与自由平面波的频散关系式(3.8.11)基本一样，只是有一个重要的不同之处：波矢量的 y 分量在此处已被离散化为π/L 的整数倍。这些波称为邦加莱 (Poincaré)波，在动力学性质上与上节描述的平面波类似。

大小相等面符号相反的σ 的解(3.9.14)意味着邦加莱波的位相在 x 正方向和负方向上传

播速度相等。注意该频率总是大于 f；实际上，因为 y 方向的波数已离散化，所以

$$\sigma \geqslant \left\{ f^2 + \frac{C_0^2 \pi^2}{L^2} \right\}^{1/2}. \tag{3.9.15}$$

利用(3.9.8a)和(3.9.14)式，可以求出动力场。对于每一波型有，

$$\eta = \eta_0 \left[\cos \frac{n\pi y}{L} - \frac{L}{n\pi} \frac{f}{c_x} \sin \frac{n\pi y}{L} \right] \cos (kx - \sigma t + \phi),$$

$$u = \frac{\eta_0}{H_0} \left[\frac{C_0^2}{c_x} \cos \frac{n\pi y}{L} - \frac{fL}{n\pi} \sin \frac{n\pi y}{L} \right] \cos (kx - \sigma t + \phi), \tag{3.9.16}$$

$$v = -\frac{\eta_0}{H_0} \frac{L}{\sigma n\pi} \left[f^2 + \frac{C_0^2 n^2 \pi^2}{L^2} \right] \sin \frac{n\pi y}{L} \sin (kx - \sigma t + \phi),$$

式中，$Cx = \sigma/k$ 是 x 方向的相速，η_0 是任意振幅，ϕ 是任意的波动位相。注意，解在 y 方向上的结构依赖于相速度的方向，即依赖于 Cx 的符号。

(ii) (3.9.9)式的第二个解出现在

$$\sigma = \pm C_0 k \tag{3.9.17}$$

的条件下。这是一个颇为引人注目的结果，因为它正是非旋转流体中波峰与 y 轴平行的平面波的频散关系式。很显然，这个解补充了邦加莱波族，它起着该波族中因旋转效应而不能存在的那个 $n=0$ 的波型的作用。这个波型是凯尔文波，它也具有确实值得注意的动力学结构。

考虑沿 x 正方向传播的解，即 $\sigma = C_0 k$，则

$$\alpha^2 = -\frac{f^2}{C_0^2}, \tag{3.9.18}$$

所以 α 是纯虚数，即$\alpha = \pm if/C_0$.不失一般性，可取$\alpha = if/C_0$.可以证明，动力场能写成下述式：

$$\eta = \eta_0 e^{-fy/C_0} \cos (k[x - C_0 t] + \phi), \tag{3.9.19a}$$

$$u = \frac{\eta_0}{H_0} C_0 e^{-fy/C_0} \cos (k[x - C_0 t] + \phi)$$

$$= -\frac{g}{f} \frac{\partial \eta}{\partial y}, \tag{3.9.19b}$$

$$v = 0. \tag{3.9.19c}$$

这里有几个与众不同的特点需要注意。首先，与通道垂直的 y 方向速度恒等于零。其次，一般地说，即使频率相对于 f 不是小量，x 方向的运动也精确地处于地转平衡中。对这种运动，详细的动力平衡是

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}, \tag{3.9.20a}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -H_0 \frac{\partial u}{\partial x}, \tag{3.9.20b}$$

$$= -\frac{g}{f} \frac{\partial \eta}{\partial y}. \tag{3.9.20c}$$

前两个式子给出了经典的波动方程：

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}=C_0^2\ \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}. \tag{3.9.21}$$

由此可以得到(3.9.17)式，同时地转平衡(3.9.20c)产生一个自由面坡度，以平衡由 u 引起的科氏加速度。对于一个面对波动传播方向的观测者来说，波高在他的右方最高。在 y 方向上振幅变化的 e 折尺度是

$$R=\frac{C_0}{f}, \tag{3.9.22}$$

这与波动场的任何性质无关。这个面有的长度尺度是罗斯贝变形半径，它是这样一段距离，在此距离上，重力使自由表面变平的趋势与科氏加速度使表面变形的趋势相平衡。注意，当 $f\to 0$ 时，$R\to\infty$，所以在这极限情形下，凯尔文波变成(3.9.14)中 $n=0$ 的波型。因此凯尔文波实际上是邦加莱波族中漏掉的 $n=0$ 的波。对于 $\sigma=-C_0k$，即对沿 x 负方向传播的凯尔文波，也可进行同样的考虑。波振幅从 $y=L$ 的侧边界处的极大值随 y 的减小而呈指数减小，所以在面对波的传播方向的观察者的右方，波高也出现极大值。为了使凯尔文波存在，至少要求存在一个内边界。波动呈指数增长的特性，使之不可能存在于一个完全无界的区域中。还需注意，对于 $\sigma\ll f$ 的低频凯尔文波，要求 $kR\ll 1$，即 x 方向的波长远大于运动的横向尺度 R。这种各向异性造成了(3.9.20a)的非地转性，即 x 方向的压力梯度（因为 $kR\ll 1$，它与 y 方向的梯度相比是弱的）不能被科氏加速度平衡（因为 v 恒等于零），而是被弱的 u 的加速度所平衡。凯尔文波说明，当运动的水平尺度不是各向同性时，头两章中所讲的那种简单的、项与项之平衡的考虑需要加以改进。

(iii) (3.9.9)式的第三种显式解是频率为科氏参数的一种振荡，也称为惯性振荡，即

$$\sigma=\pm f \tag{3.9.23}$$

的振荡。然而，当 $\sigma=f$ 时，(3.6.12a,b)式中为了借助 η 得到 u 和 v 而必须反演的算子 $\partial^2/\partial t^2+f^2$ 恒等于零，所以我们必须谨慎地确定这个根是否为虚假的根。实际上，回到出发方程组(3.6.3a,b,c)时，我们可以看到它确实是虚假的根。如果利用(3.9.3)式和 $\sigma=f$，则(3.6.3a,b)变为

$$f\bar{u}-if\bar{v}=gk\bar{\eta}, \tag{3.9.24a}$$

$$f\bar{u}-if\bar{v}=-g\frac{d\bar{\eta}}{dy}, \tag{3.9.24b}$$

式中 $\bar{u}(y)$ 和 $\bar{v}(y)$ 是 u 和 v 的复振幅，即

$$u=Re\,\bar{u}e^{i(kx-ft)}, \tag{3.9.25a}$$

$$v=Re\,\bar{v}e^{i(kx-ft)}, \tag{3.9.25b}$$

注意，不能借助 $\bar{\eta}$ 来求解(3.9.24a,b)而得到 $\bar{u}$ 和 $\bar{v}$，而是将(3.9.24a,b)相减得到需要满足的关系式：

$$\frac{d\bar{\eta}}{dy}+k\bar{\eta}=0, \tag{3.9.26}$$

或者，

$$\bar{\eta}=\eta_0e^{-ky}. \tag{3.9.27}$$

另一方面，对 $\sigma=f$，(3.6.3c)要求

$$-if\bar{\eta}+H_0\left(ik\bar{u}+\frac{d\bar{v}}{dy}\right)=0, \tag{3.9.28}$$

或者由(3.9.24a)和(3.9.27)式有

$$\frac{d\bar{v}}{dy}-k\bar{v}=\frac{if\bar{\eta}}{H_0}\left(1-\frac{k^2C_0^2}{f^2}\right)$$

$$=\frac{if\eta_0}{H_0}(1-k^2R^2)e^{-ky}, \tag{3.9.29}$$

其通解是

$$\bar{v}=V_0e^{ky}-\frac{if}{2k}\frac{\eta_0}{H_0}(1-k^2R^2)e^{-ky}, \tag{3.9.30}$$

式中 V_0 是任意的。为了满足 $\bar{v}(0)$ 为零的条件，必须选适当的 V_0，使得满足

$$\bar{v}=\frac{if\eta_0}{kH_0}(1-k^2R^2)\sinh ky. \tag{3.9.31}$$

最后一个条件，即 $Y=L$ 处 $\bar{v}$ 必须为零，除非在 $k=R^{-1}$ 的特殊情况下，一般是不可能的，在那种特殊情况下，v 恒等于零，$\sigma=C_0k=f$，该波与那个波数的凯尔文波已没有区别。因此，$\sigma=f$ 的振荡是本征值问题的虚假根，而完全的解谱由凯尔文波型、邦加莱波型、当然还有 $\sigma=0$ 的波型组成，后者就是地转运动。图 3.9.2 绘出频散图，即频率作为波数之函数的图。

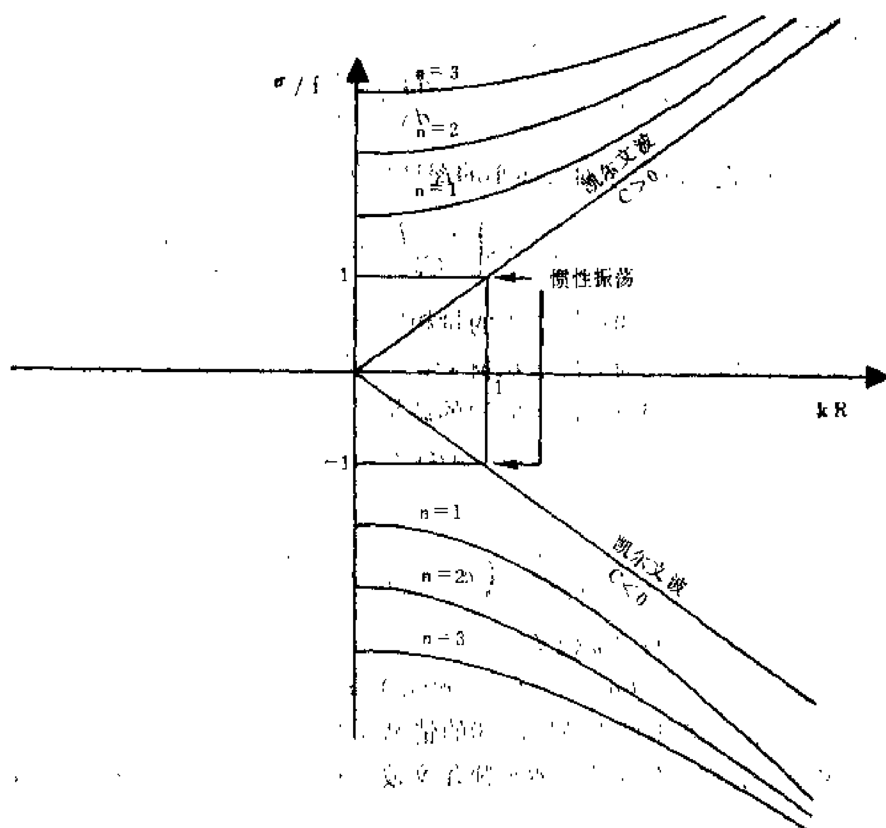


图3.9.2 邦加莱波和凯尔文波的频散图。该图表明 $\sigma/f=\pm1$ 的惯性振荡与 $kR=1$ 的凯尔文波型重合

3.10 罗斯贝波

设有一宽度为L的通道，模式条件基本上与3.9节类似，但是有一个重要区别，即H_0在y方向上稍有变化：

$$H_0=D_0\left(1-\frac{sy}{L}\right). \tag{3.10.1}$$

式中坡度

$$s\ll 1. \tag{3.10.2}$$

我们现在就来考虑该模式中可能存在的自由振荡。

H_0的等值线与x轴平行，并且仅当v恒等于零时，才可能有纯地转运动。流体柱穿越等深线（即H_0的等值线）的运动，将使其本身伸长或缩短，在有牵连涡度f存在的环境场中，上述伸长与缩短将产生相对涡度。我们预期有可能存在新的运动波型，这些波型的存在取决于旋转和底边界倾斜所造成的联合效应。

我们仍然可以寻找(3.6.9)的下述形式的解

$$\eta=Re\bar{\eta}(y)e^{i(kx-\sigma t)}.$$

关于$\bar{\eta}(y)$的方程现在变为

$$\left(1-s\frac{y}{L}\right)\frac{d^2\bar{\eta}}{dy^2}-\frac{s}{L}\frac{d\bar{\eta}}{dy}+\bar{\eta}\left[\frac{\sigma^2-f^2}{gD_0}-k^2\left(1-s\frac{y}{L}\right)-\frac{fs}{L\sigma}k\right]=0. \tag{3.10.3}$$

这里也有边界条件：

$$\text{在 } y=0, L \text{ 处，}\qquad \frac{d\bar{\eta}}{dy}+\frac{fk}{\sigma}\bar{\eta}=0. \tag{3.10.4}$$

由于y/L总小于1，因此，对于小的s，即小的深度变化，(3.10.3)式的一个极好的近似是

$$\frac{d^2\bar{\eta}}{dy^2}-\frac{s}{L}\frac{d\bar{\eta}}{dy}+\bar{\eta}\left[\frac{\sigma^2-f^2}{C_0^2}-k^2-\frac{fs}{L\sigma}k\right]=0. \tag{3.10.5}$$

注意，只有在坡度参数能与已知量级为1的量相比较的那些项中，才可略去含s的小项。(3.10.5)式方括号中的最后一项取决于比值s/σ，不能预先将它略去。实际上，若σ的量级是$O(s)$，则该项的量级将是$O(1)$，(3.10.5)的解是

$$\bar{\eta}=e^{sy/2L}[A\sin\alpha y+B\cos\alpha y], \tag{3.10.6}$$

式中

$$\alpha^2=\frac{\sigma^2-f^2}{C_0^2}-\left(k^2+\frac{s^2}{4L^2}\right)-\frac{fks}{\sigma L}. \tag{3.10.7}$$

再应用(3.10.4)式得到如下的本征值关系：

$$(\sigma^2-f^2)(\sigma^2-k^2C_0^2)\sin\alpha L=0. \tag{3.10.8}$$

重要的是注意，与$\sin\alpha L$相乘的系数同$s=0$的情况（即平底的情况）是完全一样的。因此，精确到s的最低阶，坡度之存在并不改变凯尔文波。对应于$\sin\alpha L$为零的那些根，现在满足

$$\sigma^2-\frac{fksC_0^2}{L\sigma}-C_0^2\left(k^2+\frac{n^2\pi^2}{L^2}+\frac{f^2}{C_0^2}\right)=0. \tag{3.10.9}$$

因为$s\ll 1$，所以式中已略去量级为$O(s^2/L^2)$阶的项（相对于$n^2\pi^2/L^2$项而言）。和以前一样，n必须大于零。

(3.10.9)式有两类性质截然不同的解。

第一类的频率均大于f。对于这一类有s的项可以忽略，精确到量级$O(s)$，我们又一次得到邦加莱波型，即

$$\sigma^2=f^2+C_0^2\left(k^2+\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)+O(s),\quad n=1,2,\cdots\cdots, \tag{3.10.10}$$

所以，高频的邦加莱波也基本上不受底边界小坡度的影响。

重要的新解（即三次方程的第三个根）具有频率$\sigma=O(s)$，对于此解，(3.10.9)式中第一项可以忽略，而第二项为$O(1)$。于是可以导出地形罗斯贝波的频散关系式，即

$$\sigma=-s\left(\frac{f}{L}\right)\frac{k}{k^2+n^2\pi^2/L^2+f^2/C_0^2},\quad n=1,2,\cdots, \tag{3.10.11}$$

关于罗斯贝波的比较完整的讨论，将在3.15节中给出。为了有助于建立低频运动的坚实的动力学框架，在这里讨论罗斯贝波动力学的某些突出特点是有用的。当

$$k=k_n=\left(\frac{n^2\pi^2}{L^2}+\frac{f^2}{C_0^2}\right)^{1/2} \tag{3.10.12}$$

时，罗斯贝波频率达其极大值，此时

$$\sigma=\sigma_{max}=-\frac{s}{2}\ \frac{f}{(n^2\pi^2+f^2L^2/C_0^2)^{1/2}}, \tag{3.10.13}$$

所以对于小的s，罗斯贝波的频率总小于f。因而，罗斯贝波的存在要求s和f均不等于零，而且从第一章所讲述的意义上说，即从它的周期大于旋转周期的意义上说，它是一种低频的波振荡。

罗斯贝波的一个真正值得注意的特点是它在x方向的相速

$$C_x=\frac{\sigma}{k}=-\left(\frac{sf}{L}\right)\Big/\left(k^2+\frac{n^2\pi^2}{L^2}+\frac{f^2}{C_0^2}\right) \tag{3.10.14}$$

总是负的。如果f是正的(负的)，则对所有的k来说，波动位相的传播使得一个跟随波峰一起前进的观测者看到浅流体（即较小的H_0）在他的右（左）方。完善的频散图如图3.10.1所示。注意，对于高波数(即小尺度)，罗斯贝波与邦加莱波和凯尔文波相反，频率随波数增加而减小。

精确到最低阶，罗斯贝波的动力场由下列各式给出：

$$\eta=\eta_0\sin\frac{n\pi y}{L}\cos(kx-\sigma t+\phi)+O(s), \tag{3.10.15a}$$

$$u=-\frac{g}{f}\ \frac{n\pi}{L}\eta_0\cos\frac{n\pi y}{L}\cos(kx-\sigma t+\phi)+O(s), \tag{3.10.15b}$$

$$v=-\frac{g}{f}k\eta_0\sin\frac{n\pi y}{L}\sin(kx-\sigma t+\phi)+O(s), \tag{3.10.15c}$$

式中在利用(3.6.12)，(3.9.8a)和(3.10.6)式时，均已略去量级为$O(s)$的小项。

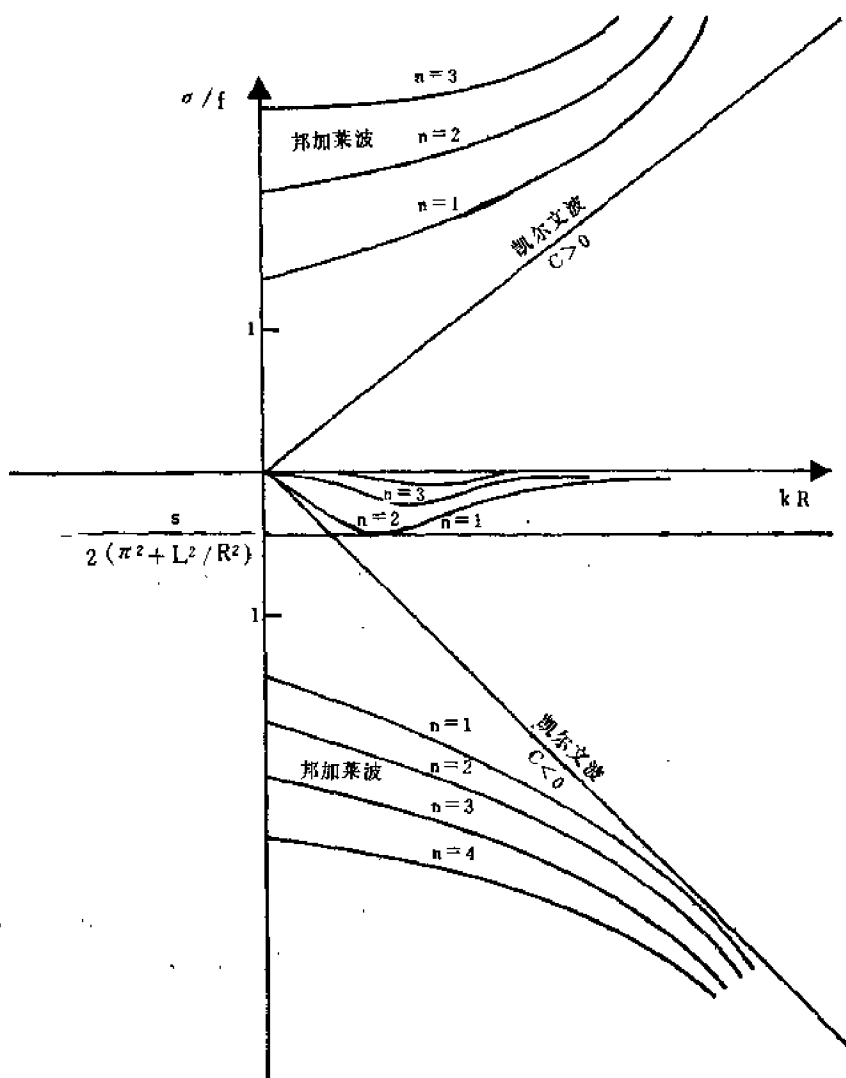


图3.10.1　通道中的邦加莱波、凯尔文波和地形罗斯贝波频散图的概略表示

3.11　罗斯贝波的动力学诊断

罗斯贝波作为一个最早研究的低频波动，在本书中特别重要。正如我们在后面将要看到的那样，这种波动在动力气象学和动力海洋学中占有中心地位。但是在这里，我们的目的是分析这种波动的动力学特征，把它作为适用于低频运动的动力学框架之结构的入门，这些低频运动，虽然在最低阶上是地转运动，但为要确定它们，需要考虑较高阶的动力过程。

从(3.10.15)式可以得出，精确到 s 的最低阶，从而精确到 σ/f 的最低阶，罗斯贝波的运动场满足：

$$u=-\frac{g}{f}\frac{\partial\eta}{\partial y},$$
$$v=\frac{g}{f}\frac{\partial\eta}{\partial x},\tag{3.11.1}$$

这与(3.7.1)式等价。这就是说，在 σ/f 的最低阶上(σ/f 在目前的例子中起着罗斯贝数的作

用)，速度场虽然随时间变化，但它不断与压力场维持地转平衡状态。不过，运动并非是精确的地转运动，否则运动就会限制为平行于等深线运动，即 v 将为零。当 v 等于零时，根据(3.10.15c)式，k 必须为零；而假如 k 是零的话，则由(3.10.11)式，σ 也必为零。即使最低阶速度场是地转的，但正是这非常小的地转偏差引起罗斯贝波。正是这种小的穿越等深线的运动，才是非地转效应，才产生出这种振荡。

在 σ/f 是小量时，可以得出

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\ll f^2\eta, \tag{3.11.2}$$

所以，对小的 s，控制方程(3.6.9)简化为

$$\frac{\partial}{\partial t}[gH_0\nabla^2\eta-f^2\eta]-gf\frac{\partial H_0}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}=0, \tag{3.11.3}$$

式中较小的项 $g(\partial\eta/\partial y)(\partial H_0/\partial y)$，已作为 $O(s)$ 项从方括号内略去。从(3.11.1)式得到

$$gH_0\nabla^2\eta=H_0f\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=H_0f\zeta, \tag{3.11.4}$$

应将此式与(2.9.20)式加以比较。于是借助(3.11.1)式，(3.11.3)式可以写为

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\zeta-\frac{f\eta}{H_0}\right]-v\frac{f}{H_0}\frac{dH_0}{dy}=0, \tag{3.11.5}$$

因为运动是线性的，

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\zeta-\frac{f\eta}{H_0}\right]\approx\frac{d}{dt}\left[\zeta-\frac{f\eta}{H_0}\right], \tag{3.11.6}$$

且因 H_0 与 t 无关，

$$v\frac{dH_0}{dy}=\frac{dH_0}{dt}, \tag{3.11.7}$$

所以在线性理论的精确范围内，

$$\frac{d}{dt}\left[\zeta-\frac{f}{H_0}(H_0+\eta)\right]=0, \tag{3.11.8}$$

或者略去二次项得

$$\frac{d}{dt}\frac{\zeta+f}{H}=0. \tag{3.11.9}$$

所以，对于地转的慢运动（即准地转运动），决定动力学特性的基本运动方程(3.11.3)，是位涡守恒的(3.11.9)式的一种表述，在位涡守恒中，其速度场和涡度场可以用它们的地转值作近似。因此，至少对这个线性问题，位涡方程通过一种无需直接计算地转偏差的、隐含地考虑小地转偏差的方式，为地转速度场得出一个确定的动力系统。我们以后会看到，这个结果可以推广，从而值地转退化问题能够通过系统地使用地转近似和位涡理论而得到解决。

3.12 浅水理论的准地转尺度分析

我们现在回到完整的浅水方程(3.1.15a, b)和(3.3.22)，把注意力集中在时间尺度长于 f^{-1} 的那些运动上，并力图导出一个与上节的准地转位涡方程相类似的非浅性位涡方程，在上

节中曾借助于求解而得出控制方程。一般地说，我们做不到这点，因为比较复杂问题的解的普遍形式对我们来说是不适用的。即使它们是可用的形式，但与近似(如地转近似)有关的问题也是不切实际的。实际上，在非线性问题以及许多线性问题里，只有在近似的地转运动的框架中才能取得进展。现在要做的是，系统地使用有关运动的定性的演绎论述（例如长时间尺度)，来推论合理地计算该运动的定量规则，同时忽视原始理论所固有的不必要的复杂性。原始理论肯定相当复杂，以至于还得计算较高频率的运动。

为了系统地进行分析，引入无量纲变量是十分重要的。首先，我们选择尺度L、T、U和N_0，用以分别表征长度、时间、速度和自由面高度的大小。然后，我们用这些尺度定义无量纲的因变量和自变量，以“$'$”表示如下：

$$\begin{aligned}(x,\ y)&=L(x',\ y'),\\ t&=Tt',\\ (u,v)&=U(u',\ v'),\\ \eta&=N_0\eta'.\end{aligned} \tag{3.12.1}$$

引进以下记号是有益的：

$$H=H_0(x,y)+\eta=D+\eta-h_B, \tag{3.12.2a}$$

式中

$$H_0=D-h_B(x,y). \tag{3.12.2b}$$

如图 3.2.1 所示，η 是自由表面相对于它的静止高度的偏差，h_B 是底边界变化的量度，它表示静止流体深度 H_0 相对于常值 D 的偏差。

重要的假设是，尺度 L、U 等要选择得当，使得无量纲变量的大小是单位 1 的量级，而且任何变量组合的乘积可用尺度因子的乘积正确地量度。如果使用(3.12.1)中引进的带撇号的变量来表示(3.3.15a,b)和(3.3.22)式，我们得到

$$\frac{U}{T}\ \frac{\partial u'}{\partial t'}+\frac{U^2}{L}\left\{u'\frac{\partial u'}{\partial x'}+v'\frac{\partial u'}{\partial y'}\right\}-fUv'=-g\frac{N_0}{L}\ \frac{\partial \eta'}{\partial x'}, \tag{3.12.3a}$$

$$\frac{U}{T}\ \frac{\partial v'}{\partial t'}+\frac{U^2}{L}\left\{u'\frac{\partial v'}{\partial x'}+v'\frac{\partial v'}{\partial y'}\right\}+fUu'=-g\frac{N_0}{L}\ \frac{\partial \eta'}{\partial y'}, \tag{3.12.3b}$$

$$\begin{aligned}&\frac{N_0}{T}\ \frac{\partial \eta'}{\partial t'}+\frac{U}{L}\left\{u'\frac{\partial}{\partial x'}(N_0\eta'-h_B)+v'\frac{\partial}{\partial y'}(N_0\eta'-h_B)\right\}\\ &\quad+\frac{U}{L}[D+N_0\eta'-h_B]\left[\frac{\partial u'}{\partial x'}+\frac{\partial v'}{\partial y'}\right]=0.\end{aligned} \tag{3.12.3c}$$

我们要求，所描述的运动之时间尺度、长度尺度和速度尺度应当满足

$$\begin{aligned}\varepsilon&=\frac{U}{fL}\ll 1,\\ \varepsilon_T&=\frac{1}{fT}\ll 1.\end{aligned} \tag{3.12.4}$$

在这种情况下，(3.12.3)中的相对加速度项与科氏加速度项相比为$O(\varepsilon)$或$O(\varepsilon_T)$，均为小量。为了使u'和v'不为零，压力梯度项必须大到足以与科氏加速度相平衡。因此，我们把参数

N_e 选为

$$N_e = \frac{fUL}{g} = \frac{U}{fL}\frac{f^2L^2}{g}, \tag{3.12.5}$$

这意味着(3.12.2a)可以写为

$$H = D\left[1 + \varepsilon\frac{L^2}{R^2}\eta' - \frac{h_B}{D}\right], \tag{3.12.6}$$

式中 R 是深度为 D 的流体层之罗斯贝变形半径，即

$$R = (gD)^{1/2}/f_{\circ} \tag{3.12.7}$$

如果L/R是量级为 1 的参数或更小的参数，那末流体层厚度相对于无运动时厚度值的偏差是$O(\varepsilon)$。如果每一个动量方程均除以fU，而质量守恒方程除以U/L，那末借助(3.12.5)式，我们可得到一个完全用无量纲变量和无量纲参数表示的方程组，即

$$\varepsilon_T\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon\left\{u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right\} - v = -\frac{\partial \eta}{\partial x}, \tag{3.12.8a}$$

$$\varepsilon_T\frac{\partial v}{\partial t} + \varepsilon\left\{u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right\} + u = -\frac{\partial \eta}{\partial y}, \tag{3.12.8b}$$

$$\varepsilon_T F\frac{\partial \eta}{\partial t} + \varepsilon F\left\{u\frac{\partial \eta}{\partial x} + v\frac{\partial \eta}{\partial y}\right\} - u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h_B}{D}\right) - v\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{h_B}{D}\right) + \left\{1 + \varepsilon F\eta - \frac{h_B}{D}\right\}\left\{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right\} = 0. \tag{3.12.8c}$$

为简洁起见，撇号已全部省略。在本章的其余部分，无量纲变量将是无撇号的，而相应的有量纲变量将以星号标记，例如，$u_* = Uu$。

在(3.12.8c)中出现的参数

$$F = \frac{f^2L^2}{gD} = \left(\frac{L}{R}\right)^2, \tag{3.12.9}$$

是几何长度尺度 L 与罗斯贝变形半径 R 之比的平方。在我们的讨论中，始终假设

$$F = O(1). \tag{3.12.10}$$

罗斯贝数 ε_T 和 ε 衡量局部加速度和平流加速度对于科氏加速度的相对重要性。我们感兴趣的是 ε 和 ε_T 均为小量的情况。局部加速度和平流加速度的相对重要性由比值

$$\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon} = \frac{L}{UT} \tag{3.12.11}$$

来衡量。当此比值为大量时，方程组本质上是线性的，即局部时间导数与非线性平流项相比占主导地位。在此我们容许流体速度U足够大以至使非线性项与线性加速度项同样重要。因此，我们选令

$$\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon} = 1, \tag{3.12.12}$$

即考虑平流时间和局部变化时间尺度一样的情况。以后会看到，这样做是不失一般性的。

我们现在可以系统地考察运动方程中各项大小的量级了。不仅如此，我们还能找到 ε 的同阶项之间的关系式。考虑(3.12.8a,b,c)的任意解。它是 x、y、t 和参数 ε 的函数。例如速

度 u 为

$$u=u(x,y,t,\varepsilon). \tag{3.12.13}$$

对于小的 ε，我们假定 u 可以展开成 ε 的渐近级数. 由于(3.12.8)式中只包含 ε 的整数幂，似乎较为合理的是假定展开式之形式如下：

$$u(x,y,t,\varepsilon)=u_0(x,y,t)+\varepsilon u_1(x,y,t)+\varepsilon^2u_2(x,y,t)+\cdots\cdots, \tag{3.12.14}$$

式中函数 u_0、u_1 等与 ε 无关。函数 u、v 和 η 均可按此方法展开，然后一起代入运动方程中。因为小量 ε 是任意的，所以对所有的 x、y、t 来说，如果方程对任意小量 ε 均成立，那末 ε 的同次幂必须平衡。由于 ε 是小量，所以我们的兴趣主要集中在 u_0、v_0 和 η_0 上。但是一般必须展开到高于确定最低阶场的第一阶以上的量级。

(3.12.8a,b)的$O(1)$项给出

$$v_0=\frac{\partial\eta_0}{\partial x},\qquad u_0=-\frac{\partial\eta_0}{\partial y}, \tag{3.12.15}$$

所以最低阶场满足地转平衡. 由此直接得到

$$\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}=0. \tag{3.12.16}$$

我们立刻看出，(3.12.8c)给我们提供了一个选择。如果 h_B/D 为 $O(1)$，那末利用 (3.12.16)式，则(3.12.8c)的$O(1)$项就直接变为

$$u_0\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h_B}{D}\right)+v_0\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{h_B}{D}\right)=0, \tag{3.12.17}$$

这个式子正是纯地转运动必须沿等深线进行这一强约束关系. 另一选择更为重要，即罗斯贝数和 h_B/D 具有相同量级，就象前述的罗斯贝波的情况一样，在那里 $\sigma/f=\varepsilon_T$为$O(s)$. 也就是说，当罗斯贝数为小量时，我们关心的是它大到足以破坏关系式(3.12.17)的那种情况，即运动与精确的地转运动相差足够大的情况. 用公式表示，这意味着我们考虑下式的情况：

$$\frac{h_B}{D}=\varepsilon\eta_B(x,y), \tag{3.12.18}$$

式中η_B为$O(1)$。然而我们将看到，尽管我们沿着第二条路进行，但仍然能够把(3.12.17)式作为要导出的理论的极限情况而得到。

把约束关系式(3.12.17)除去以后，我们发现，用(3.12.18)的$O(1)$部分无法确定一阶场 u_0、v_0、η_0。现在通过使用方程组的系统的渐近展开式，我们能够继续求解，而不是停留在以前那种粗略的量级估计上。这就说明为什么无量纲公式分析如此有价值。

运动方程的 $O(\varepsilon)$项给出

$$\frac{\partial u_0}{\partial t}+u_0\frac{\partial u_0}{\partial x}+v_0\frac{\partial u_0}{\partial y}-v_1=-\frac{\partial\eta_1}{\partial x}, \tag{3.12.19a}$$

$$\frac{\partial v_0}{\partial t}+u_0\frac{\partial v_0}{\partial x}+v_0\frac{\partial v_0}{\partial y}+u_1=-\frac{\partial\eta_1}{\partial y}, \tag{3.12.19b}$$

$$F\left\{\frac{\partial\eta_0}{\partial t}+u_0\frac{\partial\eta_0}{\partial x}+v_0\frac{\partial\eta_0}{\partial y}\right\}-u_0\frac{\partial\eta_B}{\partial x}-v_0\frac{\partial\eta_B}{\partial y}$$

$$+\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)=0. \tag{3.12.19c}$$

速度 u_1 和 v_1 是非地转的。根据(3.12.19)式，这些速度对于和 $O(\varepsilon)$ 压力场处于地转平衡状态之速度场的偏差，完全是由于处于地转平衡的 $O(1)$ 速度场的加速度所产生的。它们的水平散度不等于零，而必须被流体柱的伸缩所平衡。为了建立一个仅显含 $O(1)$ 场的闭合动力学方程组，我们在(3.12.19a,b)间消去压力后得到

$$\frac{d\zeta_0}{dt}=\frac{\partial\zeta_0}{\partial t}+u_0\frac{\partial\zeta_0}{\partial x}+v_0\frac{\partial\zeta_0}{\partial y}=-\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}\right), \tag{3.12.20}$$

这里

$$\zeta_0=\frac{\partial v_0}{\partial x}-\frac{\partial u_0}{\partial y}=\nabla^2\eta_0. \tag{3.12.21}$$

所以，精确到 $O(\varepsilon)$ 时，相对涡度的变化率等于 $O(\varepsilon)$ 非地转速度场中的辐合。注意，这个结果在速度场中是线性的。这是因为，尽管在最初的涡度方程如（3.4.3）中，它是总涡丝的辐合，然而 ζ_* 比 f 小得多，以至在最低阶中只有行星涡丝的挤压。如果用(3.12.19c)来计算 ε 阶速度场——即在(3.12.20)和(3.12.19c)中消去 $\partial u_1/\partial x+\partial v_1/\partial y$——那末我们得到

$$\frac{d\zeta_0}{dt}=F\frac{d\eta_0}{dt}-\frac{d\eta_B}{dt}, \tag{3.12.22}$$

式中

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u_0\frac{\partial}{\partial x}+v_0\frac{\partial}{\partial y}; \tag{3.12.23}$$

或者

$$\boxed{\frac{d}{dt}\{\zeta_0-F\eta_0+\eta_B\}=0}. \tag{3.12.24}$$

因为 u_0、v_0 和 ζ_0 通过（3.12.15）和(3.12.21)式而与 η_0 有关，所以守恒表达式(3.12.24)可以完全用 η_0 来表示：

$$\boxed{\left[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial\eta_0}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial\eta_0}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right][\nabla^2\eta_0-F\eta_0+\eta_B]=0}, \tag{3.12.25}$$

这是(3.11.3)的非线性推广形式。

有几个重要问题需要注意。

(i) 准地转运动完全可以用表面高度 η_0 或等价地用压力给出。

(ii) 一旦 η_0 作为(3.12.25)的解被确定出来，则 u_0 和 v_0 就可以通过(3.12.15)式的地转关系来确定。

(iii) 如果 h_B/D 比 $O(\varepsilon)$ 大得多，则 η_B 远大于 $O(1)$，所以(3.12.25)式简化为

$$u_0\frac{\partial\eta_B}{\partial x}+v_0\frac{\partial\eta_B}{\partial y}=0,$$

这就是约束关系式(3.12.17)。因此那种可能性包括在我们刚刚导出的理论中。

(iv) η_0的方程是下述量

$$\Pi_g=\zeta_0-F\eta_0+\eta_B \tag{3.12.26}$$

的守恒表达式，考虑有量纲的位涡：

$$\Pi_*=\frac{\zeta_*+f}{H_*}=\frac{f}{D}\ \frac{\varepsilon\zeta+1}{1+\varepsilon F\eta-\varepsilon\eta_B}. \tag{3.12.27}$$

仅有第二个等式用到无量纲变量和(3.12.6)式。对于小的ε,

$$\Pi_*\approx\frac{f}{D}(1+\varepsilon\zeta)(1-\varepsilon F\eta+\varepsilon\eta_B)$$

$$\approx\frac{f}{D}[1+\varepsilon(\zeta-F\eta+\eta_B)], \tag{3.12.28}$$

所以除了一个无关紧要的常数项外，Π_g是无量纲的位涡，而(3.12.25)式是准地转位涡方程。这就是说，它是一个所有的项都用其地转值来估计的位涡方程，是受上一节中罗斯贝波的诊断分析的启发而得出的结果。

因为η_0是$O(1)$速度场的流函数，所以我们引入记号

$$\eta_0=\psi(x,y,t), \tag{3.12.29a}$$

由它来表示$O(1)$速度

$$u_0=-\frac{\partial\psi}{\partial y}, \tag{3.12.29b}$$

$$v_0=\frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{3.12.29c}$$

而(3.12.25)则变为

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\ \frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\ \frac{\partial}{\partial x}\right][\nabla^2\psi-F\psi+\eta_B]=0. \tag{3.12.30}$$

在$\varepsilon/\varepsilon_T\ll 1$的极限情况下，方程(3.12.30)仍然适用。唯一的差别是非线性项可以略去。另一方面，如$\varepsilon_T/\varepsilon\ll 1$，这时可以从(3.12.30)式得到它的定常表达式。因此，只要ε和ε_T都是小量，则(3.12.25)式对所有的$\varepsilon_T/\varepsilon$均成立。实际上，假若把这一比值保留为任意值，那末仍可导出(3.12.25)式，只不过有一点例外，这就是时间导数变为

$$\frac{\partial}{\partial t}\to\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon}\ \frac{\partial}{\partial t}.$$

但是，记住了上述讨论，就完全可以在我们的尺度分析中把ε和ε_T正式考虑为相等的，并实现随后我们所希望的各种线性化。

位涡的准地转近似Π_g是三个项的线性组合。(3.12.26)式中前面两项完全是由相对运动造成的，第一项是相对涡度，而第二项是自由面高度变化所产生的位涡。第二项对第一项的相对重要性由F来衡量，即由运动尺度L与变形半径的比来衡量。如果L与R相比是小量，那末在该运动尺度上，η的变化可以忽略，因此涡管伸缩对位涡所作的贡献也可以忽略。所

以，如果$R\gg L$，那末从涡度平衡的观点来看，自由面好象就是一个刚性盖子。如果$L\gg R$，那么相对涡度是次要的，流体速度在水平方向上看来是均匀的。罗斯贝变形半径是相对涡度和表面高度（涡管伸缩）对位涡具有相同贡献的那个尺度。(3.12.26) 式中最后一项是环境位涡η_b，它的存在与运动无关。用有量纲的量表示，

$$\eta_B=\frac{f}{D}\ \frac{h_B}{U/L}, \tag{3.12.31}$$

所以η_B是衡量可变的环境位涡对于量级为$O(U/L)$的相对涡度之大小的一个相对尺度。若η_B是小量，则就位涡平衡而论，流体层厚度可以认为是常数。若η_B非常大，则环境位涡与相对涡度之比非常大，使得(3.12.17)式成立，并且准地转运动将沿η_B的等值线进行。

3.13 定常的准地转运动

如果运动与时间无关，则准地转位涡方程简化为

$$J(\psi,\ \Pi_g)=0, \tag{3.13.1}$$

即ψ和位涡的雅可比行列式为零。这意味着在xy平面上，等π_g线和等ψ线相重合，或者意味着

$$\Pi_g=G(\psi), \tag{3.13.2}$$

式中G是ψ的任意函数。在轨迹与流线重合的定常运动中，位涡沿流线必定是常数。使用以ψ表示的Π_g的公式，(3.13.2)式为

$$\nabla^2\psi-F\psi+\eta_B=G(\psi), \tag{3.13.3}$$

或者

$$\nabla^2\psi+\eta_B=G(\psi)+F\psi=K(\psi), \tag{3.13.4}$$

显然，式中的$K(\psi)$也是ψ的任意函数。相对涡度与环境位涡之和沿流线守恒。对于定常运动，没有因自由面的变化而引起的涡管伸缩。每一流体元保持其ψ值不变，因此没有上表面引起的涡管伸缩，就动力学特征来说，上表面可能是平的。注意，如果流体穿越η_B的等值线，则会引起涡管伸缩。

一旦$K(\psi)$被确定，则(3.13.4)式就确定了定常运动。为了求$K(\psi)$，必须在每条流线的一个点上规定$\nabla^2\eta_0+\eta_B$.

3.14 惯性边界流

作为上节的概念之应用，我们来考虑如何确定如图 3.14.1 所示的向$x=0$的侧壁冲击的均匀定常流的结构问题。$x=0$处的侧壁与流体的等深线垂直，其未受扰动的流体厚度为

$$H_0=D\left(1-s\frac{y^*}{L}\right). \tag{3.14.1}$$

于是

$$\eta_B=\frac{s}{\varepsilon}y=s\left(\frac{fL}{U}\right)y\equiv\beta y, \tag{3.14.2}$$

式中U是无穷远处无扰流速的量级。注意，在没有这个阻挡η_B等值线的侧壁时，沿η_B的均匀流是处处地转适应的运动，每一流体柱沿其原先所在的η_B等值线流动，即运动是线性的

且严格地转的。障壁之存在产生了新的成分。假如运动处处都严格地为地转运动，则 3.7 节的结果意味着速度必须处处为零。在我们现在讨论的问题中，这一限制必须打破，至少在边界附近是如此，在那里向$x=0$处流动的流体一定离开它们原来所沿循的等深线而平行于侧壁

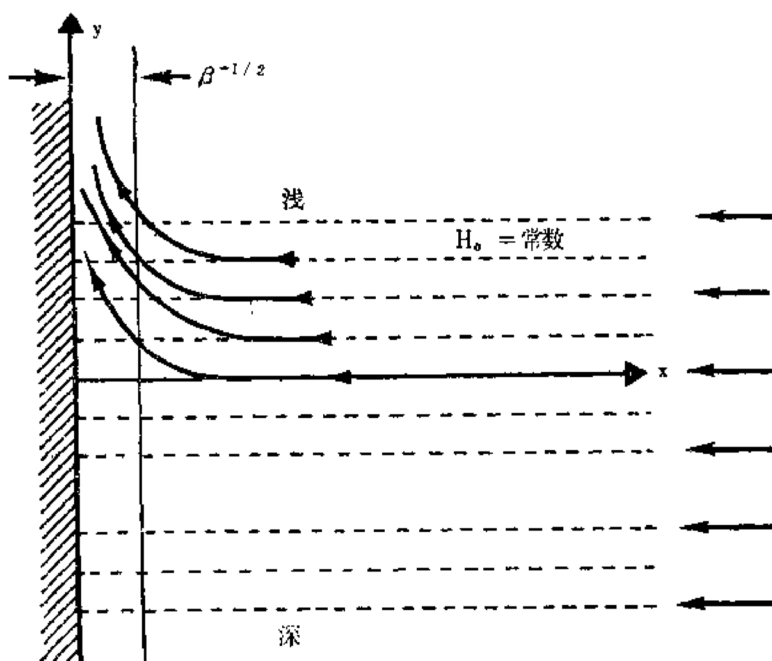


图 3.14.1 沿等深线运动的平行流在它未被 $x=0$ 处的边界转向两侧之前，处于纯地转平衡中。转弯区的宽度是$\beta^{-1/2}$。

运动。根据(3.13.4)式，它们必须改变其相对涡度以补偿η_B沿流线的变化。该过程的控制方程是(3.14.3)式，它与(3.14.2)式合在一起就得到

$$\nabla^2\psi+\beta y=K(\psi). \tag{3.14.3}$$

在远离侧壁处，运动是均匀的，且与 x 轴反向平行，无量纲振幅为1（因为已把U选为速度尺度）。因此在无穷远处，

$$\psi=\psi_\infty=(y-y_0), \tag{3.14.4}$$

式中 y_0 是任意常数。此外，在无穷远处 $\nabla^2\psi$ 为零，故在无穷远处，

$$\beta y=K(\psi_\infty), \tag{3.14.5}$$

或者

$$K(\psi_\infty)=\beta\psi_\infty+\beta y_0. \tag{3.14.6}$$

由于$K(\psi)$在流线上是常数，函数关系(3.14.6)必须对所有流线均在任意 x,y 处成立，而这些流线在无穷远处有其原来的值。在那些流线上，

$$K(\psi)=\beta\psi+\beta y_0. \tag{3.14.7}$$

除了在无穷远处以外，$K(\psi)$不是 y 的线性函数，但它必须保持是 ψ 的线性函数。$K(\psi)$现在被固定了，所以(3.14.3)式为

$$\nabla^2\psi-\beta\psi=-\beta(y-y_0). \tag{3.14.8}$$

把 ψ 写为

$$\psi=(y-y_0)+\phi(x,y), \tag{3.14.9}$$

这里 ϕ 是流函数对均匀流的偏差，它是由侧壁的存在而引起的，而 ϕ 满足

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}-\beta\phi=0. \tag{3.14.10a}$$

ϕ 的适定的边界条件是

$$当 x\to\infty 时，\phi\to 0, \tag{3.14.10b}$$

$$当 x=0 时，\quad \frac{\partial\phi}{\partial y}=-1. \tag{3.14.10c}$$

第一个条件由无穷远处 $\psi=\psi_\infty$ 的要求得到，而第二个条件正是 $x=0$ 处法向速度为零的条件，即 $u=-\partial\psi/\partial y$ 为零的条件。因为在 $x=0$ 处 ϕ 必须是 y 的线性函数，所以似乎可寻找如下形式的试解

$$\phi=(y-y_0)X(x). \tag{3.14.11}$$

$X(x)$ 则必须满足

$$\frac{d^2X}{dx^2}-\beta X=0, \tag{3.14.12}$$

其通解为

$$X=C_1e^{-\beta^{1/2}x}+C_2e^{\beta^{1/2}x}. \tag{3.14.13}$$

由于在无穷远处 X 必须为零，故 C_2 必须为零。应用(3.14.10c)得到

$$C_1=-1, \tag{3.14.14}$$

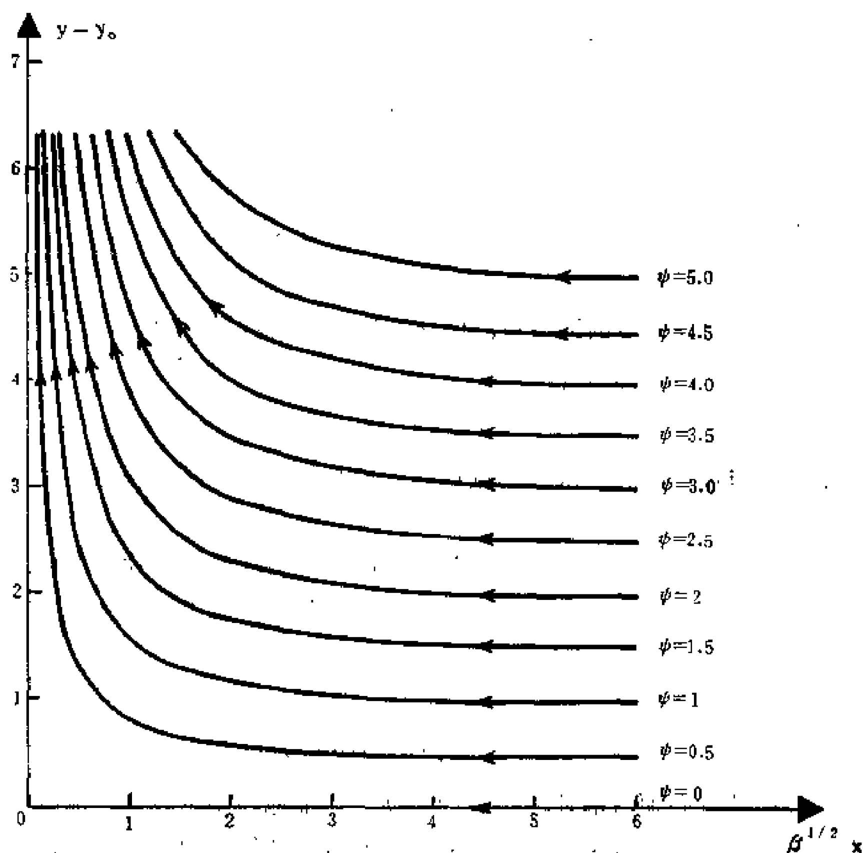


图 3.14.2 惯性边界流中运动之流线。

或者

$$\phi=-(y-y_0)e^{-\beta^{1/2}x}. \tag{3.14.15}$$

所以全流函数是

$$\psi=(y-y_0)[1-e^{-\beta^{1/2}x}]. \tag{3.14.16}$$

运动的流线如图3.14.2所示。注意 u 和 v 均等于零的滞点 $x=0$，$y=y_0$，可取在任意的 y 值上。实际上，对这种无粘运动，我们可以把这种运动等价地设想为由 $x=0$ 处的边界和 $y=y_0$处的边界直交所得到的角域中的流动。事实上，y_0 可以用使它固定的附加条件得到，即

$$\text{在 } y=y_0\text{上,} \qquad v=\frac{\partial\psi}{\partial x}=0.$$

为对称起见，我们可把原点选在 $x=0, y=y_0$ 处，在(3.14.16)式中取 y_0 为零。

若 β 很小，即环境位涡梯度很小，则对于 $x=O(1)$，(3.14.16)式变为

$$\psi=\beta^{1/2}yx. \tag{3.14.17}$$

这是经典的位势理论中无旋（涡度为零）运动的滞点流公式。即 β 小得使相对涡度的产生非常微弱，运动几乎保持为无旋的。

另一方面，对于较大的 β，涡度相对于它在自由流线上的常数值的扰动量，随离侧边界的距离呈指数率递减。对于大的 β，环境位涡的约束使流体柱保持在它们原来的等深线上（即保持它们原来的 y 坐标），直到在侧边界附近，它们被挤到较浅区域为止。β 值越大，线性约束关系式(3.12.17)占主导地位的时间越长，且流体元离开其原来等深线的位置前距侧边界越近。它平行于侧边界流动时所达到的速度是

$$v=\frac{\partial\psi}{\partial x}=y\beta^{1/2}e^{-\beta^{1/2}x}. \tag{3.14.18}$$

因为已转向 y 的正方向的流线越来越多，所以它随 y 增加，同时它也随 β 的增加而增大。总的偏转输送量（它对于每个固定的 y 恰好就等于 y），即

$$\int_0^\infty v\,dx=y, \tag{3.14.19}$$

被挤入一个 β 逐渐增大的较狭窄的区域里，使速度增大。相对涡度为

$$\zeta=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=-\beta ye^{-\beta^{1/2}x}, \tag{3.14.20}$$

所以在 $x=0$ 处，ζ 值与被挤入较浅水中的流体元所经受的环境位涡的变化量大小相等，符号相反。

在靠近侧边界的狭窄区域里，流体被引入顺沿侧壁运动的路径，这一区域叫惯性（即无粘的）边界层，其厚度为$O(\beta^{-1/2})$，且环境位涡越大，此边界层越窄。由(3.14.2)式，这一厚度用有量纲单位表示为

$$\delta_*=L\beta^{-1/2}=\left\{\frac{U}{-f(dH_*/dy_*)/D}\right\}^{1/2}. \tag{3.14.21}$$

所以，尽管严格的地转流必须沿等环境位涡线运动，但准地转理论表明，流体如何能在惯性边界流的狭窄区域内冲破这一约束，而在最低阶上保持为地转运动。对边界流区，局部罗斯贝数是生成涡度与 f 之比，即

$$\frac{v_*}{f\delta_*}=\beta\frac{Uy}{fL}e^{-\beta^{1/2}x}=(sy)e^{-\beta^{1/2}x},$$

即使惯性边界流中的速度和无穷远处的速度相比变为大量，但上述罗斯贝数对小的 s 仍保持为小量。

还有一个更重要的事实值得注意。假设除了 s 改变符号，即流体的深度随 y 的增加而增加以外，该问题的所有其他方面均不变，则可以得出 β 是负的，即

$$\beta=-|\beta|, \tag{3.14.22}$$

所以此时(3.14.10a)变为

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+|\beta|\phi=0. \tag{3.14.23}$$

于是形如(3.14.11)的解变成

$$\phi=(y-y_0)[C_1\cos|\beta|^{1/2}x+C_2\sin|\beta|^{1/2}x]. \tag{3.14.24}$$

虽然可以选择 C_1 和 C_2 使之满足 $x=0$ 处的边界条件，但这两个解都随 x 振荡而不衰减，因而找不到一个解能满足 $x\to\infty$ 时 $\phi\to 0$ 的条件。障壁之存在并不产生惯性边界流，而是产生一个定常波，它在无穷远处对运动有反作用。该波动是驻波，其波长的大小与同样 β 下的惯性边界层厚度相等。实际上，我们从(3.14.21)式这一普遍结果可以预料，惯性边界层的存在要求

$$\mathbf{k}\cdot\left[\mathbf{U}_\infty\times\frac{\nabla f}{H_0}\right]<0, \tag{3.14.25}$$

式中 $\mathbf{U}_\infty$ 是离边界的速度矢量，$\mathbf{k}$ 是垂直方向的单位矢量。如果(3.14.25)式不成立，则代之以产生贯穿远离边界区域的波动。这就明确地提出了几个迫切需要解决的问题。第一，在 s 或 $\mathbf{U}_\infty$ 相反的情况下，为什么运动性质不对称？第二，所产生的波是一类什么样的波？这两个问题是相互关联的，它们自然地引导我们进一步讨论准地转波动问题。

3.15 准地转罗斯贝波

在3.10节中我们看到，一般厚度变化的流体层中有几类小振幅波动，但只有一种罗斯贝波是处于地转平衡的。现在我们在准地转理论的框架内重新考察该系统的动力学特征。

首先考虑无界流体中波动的情况。按照准地转理论，这种运动可以用位涡方程描写，由(3.12.25)和(3.12.29)式，位涡方程可以写为

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi-F\psi)+J(\psi,\nabla^2\psi-F\psi)$$

$$+\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\eta_B}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\eta_B}{\partial x}=0. \tag{3.15.1}$$

为简单起见，令 $\nabla\eta_B$ 是常矢量，这等价于底边界坡度在量级为运动波长的距离上不变这个条件。

考虑下述平面波作为(3.15.1)式的假设解：

$$\psi=A\cos(kx+ly-\sigma t+\phi), \tag{3.15.2}$$

式中振幅 A 和相角 ϕ 是实常数。在此情况下，

$$\nabla^2\psi-F\psi=-(k^2+l^2+F)\psi, \tag{3.15.3}$$

所以波动场的位涡是 ψ 的一个常数倍。因此，ψ 与这个位涡的雅可比行列式恒等于零。所以，如果满足频散关系式

$$\sigma=-\frac{k\partial\eta_B/\partial y-l\partial\eta_B/\partial x}{k^2+l^2+F}, \tag{3.15.4}$$

则平面波是非线性方程(3.15.1)的精确解。

在$H_0=D(1-sy)$的情况下，我们有$\eta_B=sy/\varepsilon$，从(3.15.4)式我们得到有量纲的频率

$$\sigma_*=\frac{U}{L}\sigma=-\frac{sf}{L}\frac{k_*}{k_*^2+l_*^2+(f^2/gH_0)}. \tag{3.15.5}$$

这与频散关系式(3.10.11)完全一样，只不过在那里由于区域是有界的，所以l_*被离散化为π/L的整数倍。准地转理论仅得到低频罗斯贝波。象邦加莱波那样的频率较高的波，已被预先给出的准地转动力学的一系列限制从系统中略去。现在已弄清，罗斯贝波确实是低频涡度方程的有限振幅解。浅水方程组的一般动力学所要求的小振幅限制，至少对平面波解可以除掉。

频散关系式(3.15.4)可以写成

$$\sigma=\mathbf{K}\cdot\frac{(\mathbf{Z}\times\nabla\eta_B)}{(K^2+F)}, \tag{3.15.6}$$

式中 $\mathbf{Z}$ 是垂直方向单位矢量，在这里引入此记号是为了避免同波矢量

$$\mathbf{K}=k\mathbf{i}+l\mathbf{j} \tag{3.15.7}$$

混淆，$\mathbf{K}$ 的大小是K。由于

$$\mathbf{u}=\mathbf{Z}\times\nabla\psi=-(\mathbf{Z}\times\mathbf{K})A\sin(kx+ly-\sigma t+\phi), \tag{3.15.8}$$

所以质点速度与波矢量垂直，其方向平行于波峰，如图3.15.1所示。当波矢量垂直于 $\mathbf{Z}\times\nabla\eta_B$，即垂直于等深线时，由(3.15.6)式得频率为零。在此情况下，流体柱沿等深线运动，如同我们已看到的这是定常运动的状况。只有当流体柱穿越等深线并发生涡管伸缩时，才能产生相对涡度。当$\mathbf{K}$平行于$\mathbf{Z}\times\nabla\eta_B$时，频率取极大值，因为此时流体柱在波动中完全穿越等深线运动，涡管的伸缩也最大。

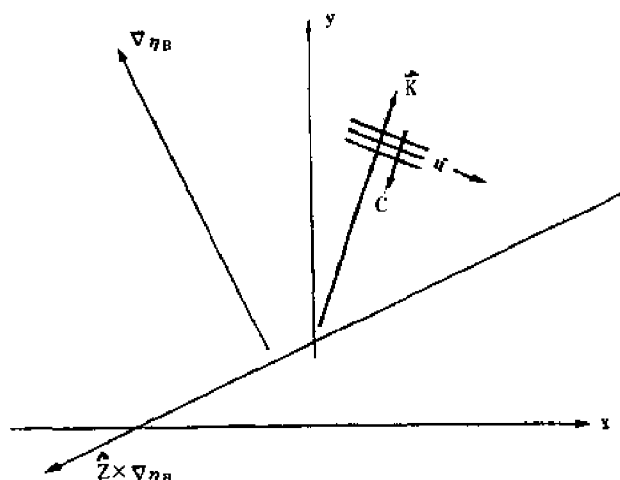


图3.15.1　位涡梯度的方向平行于$\nabla\eta_B$。平面波位相的前进必须使得$\mathbf{C}=(\sigma/K)(\mathbf{K}/K)$总与$\mathbf{Z}\times\nabla\eta_B$构成锐角，这里$\mathbf{Z}$是从$xy$平面指向外的单位矢量。

在$\mathbf{K}$方向上前进峰的速度由下式给出，

$$\mathbf{C}=\frac{\sigma}{K}\left(\frac{\mathbf{K}}{K}\right), \tag{3.15.9}$$

即由相速度乘以波矢量方向的单位矢量$\mathbf{K}/K$来表示。因此，根据(3.15.6)式，$\mathbf{C}$和$\mathbf{Z}\times\nabla\eta_B$的内积是

$$\mathbf{C}\cdot(\mathbf{Z}\times\nabla\eta_B)=\frac{[(\mathbf{Z}\times\nabla\eta_B)\cdot\mathbf{K}/K]^2}{K^2+F},\tag{3.15.10}$$

它总是正的。无论K的方向如何，相速度的传播总是使C和$\mathbf{Z}\times\nabla\eta_B$构成锐角，但它有可能与K平行或反向平行。简单地说，波动的传播必须使得跟随波峰一起前进的观察者总看到η_B的较大值在他的右方。也就是说，该观察者总看到较高的环境位涡在他的右方。与邦加莱波不同，相速度是单向的。对于给定的K，不存在对应平行于K和反向平行于K的两种进行波解。环境位涡梯度的引入，在空间中选出一个独特的方向，所以空间在动力学上不再是各向同性的，在方向反射下的对称性也消失了。

不失一般性，我们可以把y轴调整到环境位涡增加的方向上，于是(3.15.4)变为

$$\sigma=-\frac{\beta k}{k^2+l^2+F},\tag{3.15.11}$$

其中

$$\beta=\frac{\partial\eta_B}{\partial y}=-\frac{1}{eD}\frac{\partial H_0}{\partial y}.\tag{3.15.12}$$

等位相线总是在x的负方向上以速率

$$C_x=-\frac{\beta}{k^2+l^2+F}\tag{3.15.13a}$$

运动。而y方向的相速

$$C_y=-\frac{\beta k/l}{k^2+l^2+F}\tag{3.15.13b}$$

可正可负，视波矢量的方向（即k/l的符号）而定。

对于已知的l，罗斯贝波的最大频率（在数值上）是

$$\sigma_m=-\frac{\beta}{2(l^2+F)^{1/2}},\tag{3.15.14}$$

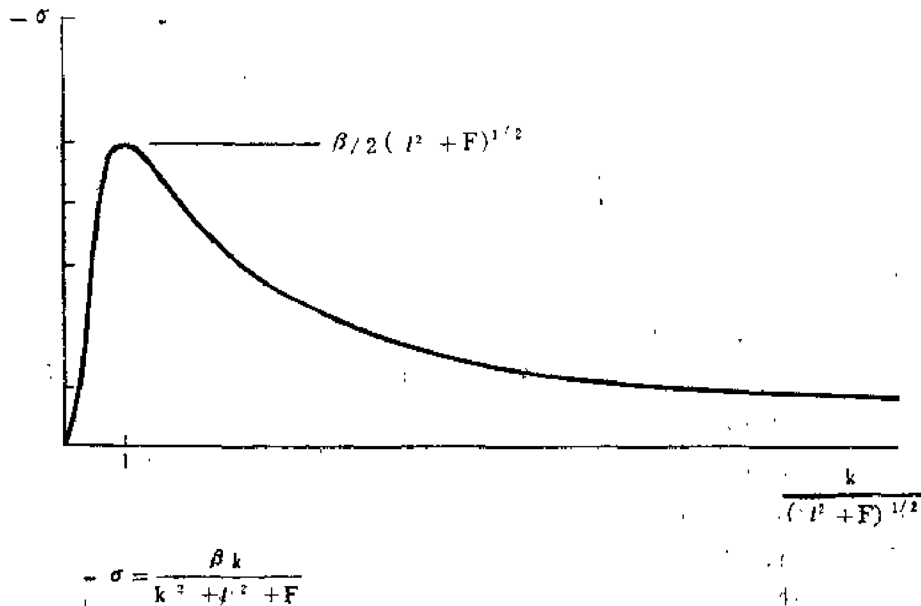


图3.15.2　罗斯贝波之频率，它是平行于等深线的波矢量分量之函数

如图 3.15.2 所示，这一频率对应的波数是

$$k=(l^2+F)^{1/2}, \tag{3.15.15}$$

当 $l=0$ 时，出现绝对极大值，它是

$$\sigma_M=-\frac{\beta}{2F^{1/2}}, \tag{3.15.16}$$

与它相应的有量纲波长是

$$\lambda_*=\lambda L=2\pi\frac{L}{F^{1/2}}=(2\pi)R, \tag{3.15.17}$$

或者恰为罗斯贝变形半径的 2π 倍。

3.16 罗斯贝波的机制

从频散关系式可清楚地看到，罗斯贝波仅当有环境位涡梯度时才能存在，这一点为振荡的物理解释提供了一条线索。我们考虑如图3.16.1所示的初始时静止地位于环境位涡等值线上（即 $y=$常数）的三个流体柱 A、B、C .值设流体柱 B 在开始时被移向正 y 方向，即环境

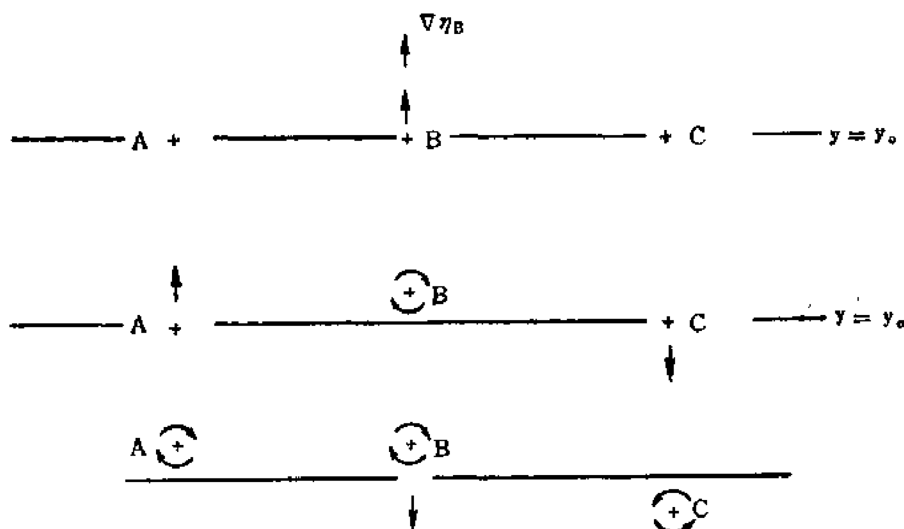


图3.16.1 三个点涡A、B、C在三个相继时刻的位置。开始时是共线的，并位于同一条等深线上。B 向上移动，在A和 C 处产生使A、C 作如图所示的运动速度。在A和C上诱生的速度又在B处产生涡度，使其有恢复到原来位置的趋势。

位涡增加的方向。为了保持其总位涡守恒，波动位涡 $\zeta_0-F\eta_0$ 必须减小，以抵消流体柱 B 在新位置所得到的环境位涡的增加。这个过程以两种方式发生。首先，向浅水运动的流体柱将被压缩，在有行星涡度场存在时，涡管的压缩将在 B 点引起负的相对涡度。其次，由于上表面不是刚性的，所以值体柱不只是被挤压到新位置上，它也有一部分爬坡的趋势，因而在其新位置上，它的 η_0 值比周围流体柱大。$\zeta_0<0$ 和 $\eta_0>0$ 这两种效应都值 $\zeta_0-F\eta_0$ 减小。而且这两种效应都会在流体中产生围绕 B 点的顺时针环流——第一种效应是由集中的负涡度诱生出这种环流，第二种效应是由于 η_0 的局部升高造成 B 点处压力的局部增大，这也将产生一个顺时针环流以达到地转平衡。流体中的顺时针环流则使流体柱 C 向深水移动，而值流体柱 A 向浅水区挤压，如图所示。上述两种运动都对 B 的速度有贡献，使它将返回自己的初始位置。由于惯性作用，B 又会越过初始位置向下运动，从而继续发生振荡。显然这是一个过分

简单的解释，因为这里有无数多流体柱同时参与这一涡度平衡。关于这一点的合理描述，将由3.25节的公式给出。上述解释衡实衡示了一个关键性问题，恢复机制的强弱取决于位移流体柱对相邻流体柱所诱生之环流的力量。我们再来考虑位移了一个距离 Y 的流体柱，并假定位涡增量集中在横截面无限小的流体柱的一点上。这时，位移流体柱的环境位涡增量 βY 所诱生出来的流场 ψ 满足

$$\nabla^2\psi - F\psi = -\beta Y\frac{\delta(r)}{2\pi r}, \tag{3.16.1}$$

这里 r 是距柱中心的距离。注意，

$$-\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\frac{\beta Y\delta(r)}{2\pi r}r\,dr\,d\phi = -\beta Y, \tag{3.16.2}$$

所以在流体柱截面上总的环境位涡增量是 βY。对流体来说，它被$\zeta_0 - F\eta_0$值的增量所平衡。(3.16.1)式对 ψ 的解[1]是

$$\psi = \beta Y\frac{K_0(F^{1/2}r)}{2\pi}, \tag{3.16.3}$$

式中 K_0 是修正的第二类零阶贝塞尔函数。

在流体柱上诱生出来的切向速度 v_θ 是

$$v_\theta = \frac{\partial\psi}{\partial r}$$

$$= -\frac{\beta Y}{2\pi}F^{1/2}K_1(F^{1/2}r), \tag{3.16.4}$$

其值如图3.16.2所示。对于 $F^{1/2}r$ 的小值，即对位于位移流体柱变形半径内的流体元来说，K_1 的渐近形式给出

$$v_\theta \approx -\frac{\beta Y}{2\pi r},\quad F^{1/2}r \ll 1. \tag{3.16.5}$$

这是环绕线位涡的环流速度。另一方面，对大的 $F^{1/2}r$ 来说，

$$v_\theta \approx -\frac{\beta Y F^{1/4}}{2^{3/2}\pi^{1/2}r^{1/2}}e^{-F^{1/2}r}. \tag{3.16.6}$$

如果柱B和C之间的距离远

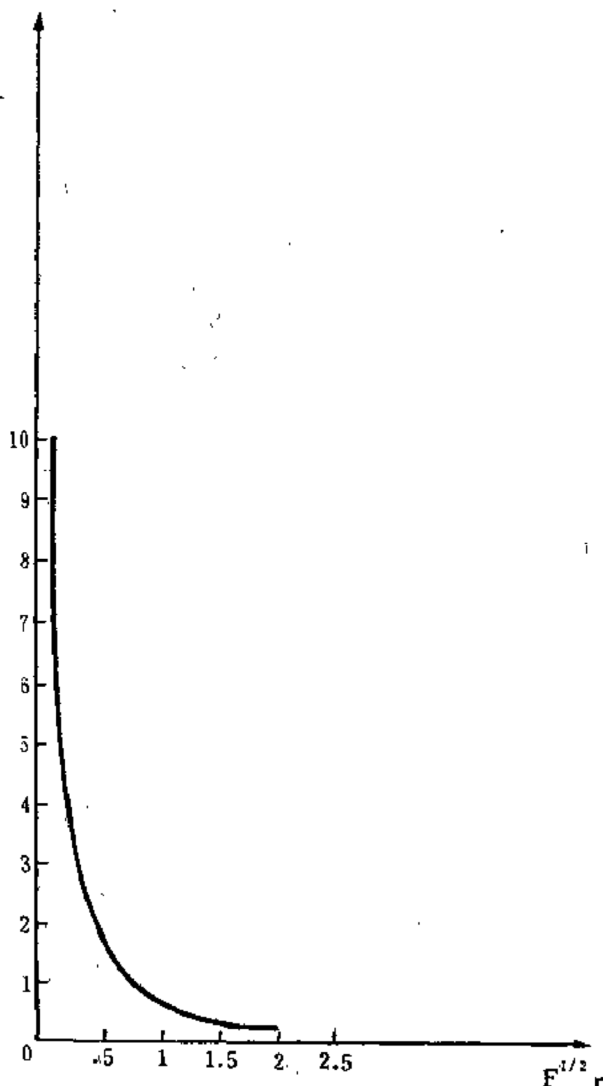


图3.16.2 绕一浓缩涡旋(Concentrated Vortex)产生的环流速度随径向距离的变化。速度在罗斯贝变形半径的尺度上呈指数减小。

(1) 在本章末附录A中有推导。

超过变形半径；(3.16.6)式表明，诱生的环流非常弱，因此恢复机制将十分弱。这解释了(3.15.11)式中 σ 对 F 的依赖关系，即对于一定的波长，变形半径的减小(F 的增加)，使振荡频率减低。

还需注意，对于很小的波长，每个位移区的横截面积很小，涡度诱生效果本身也变得很弱，所以对于很短的波（高波数），振荡频率也变小。

3.17 β平面

Rossby(1939)用完全不同的考虑研究了波解(3.15.2)和频散关系式(3.15.11)。他在一篇以卓越的直觉推理为特征的著名论文中，介绍了球面上均质流体层的研究，他用球面上的均质流体层作为研究地球大气中观测到的大尺度波动动力学之最简单而恰当的模式。他指出一个我们在第二章里已注意到的事实，即大气壳的浅薄特性使得大尺度运动主要是水平运动，所以只有地球行星涡度的局部垂直分量 $f=2\Omega\sin\theta$，在动力学上才起显著作用。现在让我们象 Rossby 那样假设流体柱的运动使位涡[1]

$$\pi=\frac{\zeta+f}{H} \tag{3.17.1}$$

守恒，其中H是流体层厚度。

下一个关键步骤是，意识到 f 是纬度 θ 的函数，所以除非有 ζ 或H的补偿变化，即除非引起相对运动，否则流体元穿越纬圈的运动将使 π 发生变化。让我们来估计一下，流体元为了使其经受的 f 之变化与它的相对涡度 ζ 有相同的量级而必须移动的距离。这将表明 f 的变化对于涡度动力学的重要性。在纬距 Y 上，f 的增量可以由下式估计，

$$\Delta f=\frac{1}{r_0}\frac{\partial f}{\partial\theta}Y=\frac{Y}{r_0}2\Omega\cos\theta, \tag{3.17.2}$$

式中 r_0是地球的半径。

用运动的特征尺度来表示，有

$$\zeta=O\left(\frac{U}{L}\right). \tag{3.17.3}$$

所以，当

$$\frac{Y}{r_0}=O(\varepsilon\tan\theta) \tag{3.17.4}$$

时，Δf 将为 ζ 的量级。因此，在 $\varepsilon=U/fL$ 为小量的中纬度地区，较小的纬度变化，仍能产生在动力学上显著的、足够大的行星涡度之变化。Rossby 甚至对此做了进一步的论证。令运动在南北范围内的尺度如(3.17.4)式那样足够小，以至于在几何形状上是局部平面，可以使用笛卡尔坐标系，其中地球的球形效应仅是科氏参数 f 随纬度的变化。对于这样的运动，可以把 f 相对于一个平均纬度 θ_0 作线性化处理，即对于小的Y/r_0，

$$f\sim f_0+\beta_0 y,\quad \beta_0 y\ll f_0 \tag{3.17.5}$$

式中

$$f_0=2\Omega\sin\theta_0, \tag{3.17.6a}$$

(1) 本节中所有变量均是无量纲的。

$$\beta_0=\frac{2\Omega}{r_0}\cos\theta_0. \tag{3.17.6b}$$

如果

$$H=D+\eta-h_B, \tag{3.17.7}$$

这里η是运动引起的自由面偏差，h_B代表静止时流体层厚度的变化，那末对于η和h_B的微小变化，Π可以写成

$$\Pi=\frac{f_0+\left(\beta_0 y+f_0\frac{h_B}{D}\right)+\zeta-f_0\frac{\eta}{D}}{D}. \tag{3.17.8}$$

注意，环境位涡的变化部分就是$\beta_0 y+f_0h_B/D$。在均质模式范围内，科氏参数随纬度的变化，即β效应，与有常值f存在时地形的变化之间，有着精确的动力等价性。也就是说，在位涡动力学中，$\beta_0 y$与f_0h_B/D的作用是一样的。因此，如果在(3.14.3)和(3.15.11)式中把解β解释为关系式

$$\beta=\beta_0\frac{L^2}{U}, \tag{3.17.9}$$

且将x和y分别理解为向东和向北的坐标，那末前几节中，我们使用线性地形梯度所得到的所有结果，可以直接表示为球面上具有均匀环境深度之流体层动力学的结果.

把地球的球形效应通过另外一个平面上f的线性变化进行模拟的模式（与我们在本章中已引入的f平面模式相对照），称为β平面模式。

本节的讨论是直观的和启发式的。关于β平面近似的详细推导和论证，放到第六章中讲。然而不管怎么说，本节的论证本质上是正确的，而且直接把一个平坦地球面模式中的地形罗斯贝波转变为大尺度大气运动的（至少是）基本的正压模式。而且在第五章中将看到，由于同样的原因，3.14节的惯性边界层对于研究象湾流这样的强洋流有着直接的应用。注意，根据(3.14.21)式，惯性边界层的厚度是$L\beta^{-1/2}$，它利用(3.17.9)式给出一个宽度为

$$\delta_I=\left(\frac{U}{\beta_0}\right)^{1/2} \tag{3.17.10}$$

的流动。在$30°N$，β_0是1.9×10^{-13}厘米$^{-1}$秒$^{-1}$，所以对5厘米/秒的向岸流，预报宽度是50公里，这与实测洋流之水平范围极为吻合。因此，3.14节中讨论的模式，可以认为是解释湾流形成区域的简单模式，在那里风生洋流从东边冲击着由北美大陆形成的、在佛罗里达与哈特腊斯角之间区域的障碍。

3.18 纬向流中的罗斯贝波

考虑一支沿环境位涡等值线运动的均匀流对罗斯贝波的影响。对于

$$\eta_B=\beta y, \tag{3.18.1}$$

流线为平行于x轴的直线运动，将是位涡方程的精确解。有了β平面的概念，坐标x和y可以认为是向东和向北的坐标。沿着纬圈，即指向东的运动，称为纬向流。最简单的例子是

$$\psi=-\hat{U}y. \tag{3.18.2}$$

如果$\hat{U}$是$+1$则有量纲的运动是大小为U的向东运动（用气象学术语即为西风）；如果$\hat{U}$是-1，则速度是具有同样大小U的向西运动（东风）。引进无量纲常数$\hat{U}$后，我们可以把东风和西风

的情况统一起来考虑。

我们现在来探讨，是否有可能存在一个迭加在平均流上的波型，即令

$$\psi=-\hat{U}y+\phi(x,y,t), \tag{3.18.3}$$

把它代入(3.15.1)式，利用(3.18.1)式可得

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\hat{U}\frac{\partial}{\partial x}\right][\nabla^2\phi-F\phi]+\frac{\partial\phi}{\partial x}[\beta+F\hat{U}]+J(\phi,\nabla^2\phi-F\phi)=0. \tag{3.18.4}$$

和以前一样，形如

$$\phi=A\cos(kx+ly-\sigma t) \tag{3.18.5}$$

的平面波解具有如下性质：

$$\nabla^2\phi-F\phi=-(k^2+l^2+F)\phi, \tag{3.18.6}$$

所以(3.18.4)式中的非线性项恒等于零。因此若

$$\sigma=\frac{k}{K^2+F}[\hat{U}K^2-\beta], \tag{3.18.7}$$

其中

$$K^2=k^2+l^2, \tag{3.18.8}$$

则不论振幅大小如何，平面波都是一个精确解。

x 方向上的相速度是

$$C_x=\frac{\sigma}{k}=\frac{\hat{U}K^2-\beta}{K^2+F}=\hat{U}-\frac{\beta+F\hat{U}}{K^2+F}. \tag{3.18.9}$$

如果 $\hat{U}=+1$（即对于西风基本流），则当 $K^2>\beta$ 时，C_x 为正，面 $K^2<\beta$ 时 C_x 为负。若

$$K=K_s=\beta^{1/2}, \tag{3.18.10}$$

则波动变为驻波。如果 $\hat{U}=-1$（即对于东风流），则对任何K，C_x 都是负的，而且不可能有稳定驻波。显然，仅当 $\hat{U}\beta>0$ 时，才会有稳定的罗斯贝波。如果 $\hat{U}\beta<0$，则仅当 $K^2<0$ 时才有驻波解，而 $K^2<0$ 将意味着至少在空间一个方向上呈指数增长或衰减，其 e 折尺度是 $\beta^{-1/2}$。在无界区域中，这种情况显然被排除在外。

我们现在可以更好地理解 3.13 节中关于惯性定常流存在性问题的结果。在那里我们看到，惯性边界流要求$\hat{U}\beta<0$，面当$\hat{U}\beta>0$时，运动对边界的响应则是波状运动。现在已弄清，在后一种情况下，因边界而产生了罗斯贝驻波，而在前一种情况下，不可能有罗斯贝驻波，故出现指数衰减。所以，定常运动是波动还是具有边界流特征，其实是罗斯贝驻波存在标准的反映。

用有量纲的单位表示，罗斯贝驻波波长是

$$\lambda_*=L\lambda=L\frac{2\pi}{K_s}=L2\pi\beta^{-1/2}=2\pi\left(\frac{U}{\beta_0}\right)^{1/2}, \tag{3.18.11}$$

式中 β_0 由(3.17.6b)式给出，即我们按照公式(3.17.9)式把 β 看作是无量纲的科氏参数的变化。对于大气，U 的典型值是 O(10米/秒)，如果 β_0 在纬度45°处计算，则λ_*是5,400公里。正是这一尺度与西风带中大型波动的特征尺度的相似性，引起人们对罗斯贝波感兴趣。在以后几章中将看到，这里讨论的模式过于简单，不能恰当地预报大尺度大气波动的结构和运动。但是我们也将看到，上述考虑是解决那些问题的良好开端，而(3.18.11)式切合实际的预报正是那些运动规律的体现。对于海洋，U 的数值较小，在同一纬度上所给出的长度尺度也比

大气小得多。例如，若 U 是10厘米/秒(即速度比大气小一百倍)，则 λ^* 的量级是 540 公里，比大气小十倍。

(3.18.9)式提出了一个令人感兴趣的问题。在无流动时，罗斯贝波的相速是

$$C_x=-\frac{\beta}{K^2+F}, \tag{3.18.12}$$

且朝负 x 方向（即向西倒退），为使波动驻止所需要的向东的流速有较大的量值：

$$\hat{U}=\frac{\beta}{K^2}. \tag{3.18.13}$$

从(3.18.9)式看出，平均流对波动有两种影响。第一种是简单的多普勒频移效应，即由于载波介质的速度而使相速增加。第二种影响是通过以 $\beta+F\hat{U}$ 代替 β 来改变相对于基本流的相速度。除了简单的波速变化以外，平均流的存在还改变有效环境位涡梯度。在没有波动但有平均流动时，有量纲厚度 H_0 为

$$H_0=1+\varepsilon F\eta_0-\varepsilon\eta_B=1+\varepsilon F\psi-\varepsilon\eta_B=1-\varepsilon\{F\hat{U}+\beta\}y. \tag{3.18.14}$$

平均流动使自由表面倾斜（如图3.18.1所示），

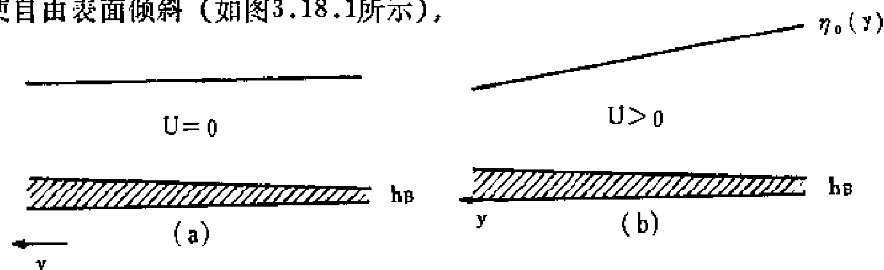


图3.18.1 流体在静止(a)和向纸内作匀速运动(b)时的自由面。

这是因为它处于地转平衡的缘故。如(3.18.14)式所指出的那样，如果 $\hat{U}>0$，那末自由面的倾斜使流体层在 y 方向的厚度梯度增大，因而随波动所看到的环境位涡梯度增大。这种增大将通过 β 的有效值增加之方式而使波振荡频率增加。这使波动在负 x 方向所固有的相速增大，从而得到 (3.18.13) 式。如果罗斯贝变形半径远大于波长，则 $F\ll1$，而且基本流所引起的自由面倾斜在波动尺度上是难以觉察的。注意，对于 $\hat{U}<0$，β效应减弱，如果 $\hat{U}=-\beta/F$，那末 β 效应甚至会消失。

在更普遍的情况下，基本流在 y 方向并非是均匀的，β 效应本身也是 y 的函数。可以预料运动之性质更为复杂。这种问题将在第七章中讨论。不管怎么说，波传播之动力学性质，取决于载波气流的总位涡梯度，这一基本思想仍体现在我们的简单模式中。这一点还是正确的。

3.19 群 速 度

波动的最基本性质之一，是它们能引起扰动，即当其传播时能够在比流体元特征位移大得多的距离上传送能量。在一个波动周期里，质点的位移是

$$l_*=O\left(u_*\frac{2\pi}{\sigma_*}\right), \tag{3.19.1}$$

其中u_*是流体的特征速度，它与波振幅成正比，σ_*是频率。l_*与波长之比是

$$\frac{l_*}{\lambda_*}=O\left(u_*\frac{k_*}{\sigma_*}\right)=\frac{u_*}{C_*}, \tag{3.19.2}$$

式中 C_* 是相速。小振幅波以 u_*/C_* 是小量为特征；而且我们看到，这等价于波动中质点位移相对小的程度。流体波动是在很大尺度上的许多相互关联、而又作轻微运动的流体元之协同运动，它在远大于每个流体元之位移的距离上影响着信息的传播——很象一长排传递水桶的人，能够把许多桶水传到远大于他们每个人所能达到的范围之外的远处。

对于某些目的来说，特别是对于揭示引起波振荡的基本机制来说，平面波是一种有用的理想化模型。但是波动场是具有固定振幅的严格的周期函数这一限制，却是很不真实的。假如波型在空间中变化很慢，它可以作为波动图型的有用的近似。但是任何真实的波列，无论在空间还是在时间上都有始有终。实际上我们经常观测到以波群或波包前进的波动。具有均匀振幅的平面波已经占据了整个空间，因此波扰动的传播问题，需要考虑更复杂的波动场，其中振幅本身是空间与时间的函数。当然，在局部看来较复杂的波象一个平面波时，也可以应用平面波的动力学来作为真实波动力学的局部近似。

也许有限范围之波扰动的最简单的例子是波包，如

$$\psi=A(x,y,t)\cos(kx+ly-\sigma t), \tag{3.19.3}$$

式中 A 是 x,y,t 的缓变函数。即

$$\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial x}\ll K, \quad \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial y}\ll K, \quad \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial t}\ll\sigma, \tag{3.19.4}$$

其中$K^2=k^2+l^2$。条件(3.19.4)保证了在一个波长范围上，波振幅很接近于常数；在一个波周期的时间上，振幅的变化也可以略去不计。一维波包的示意图如图3.19.1所示。主要的问题是，

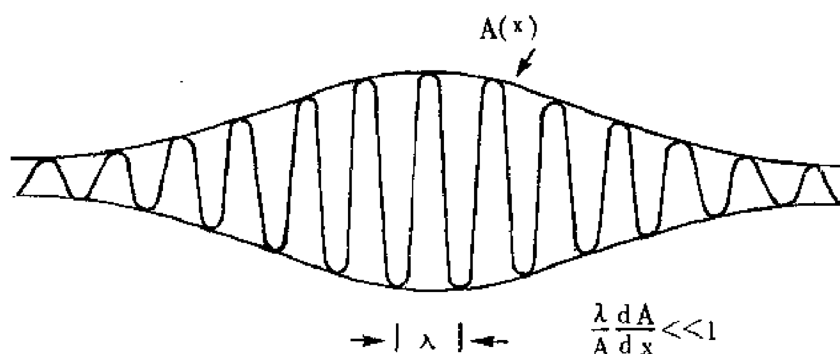


图3.19.1 波包。$A(x)$是波长为λ 的扰动的包络线。

什么因素确定着波包络线的运动？因为正是该包络线决定波动能量的分布。在远离波包中心处，包络线振幅很小，显然波的活动也很弱。为了确定波包传播的规律，我们必须找到(3.19.3)是位涡方程之解所需要的条件。尽管一个纯平面波是完整方程的精确解，但波包并不是精确解，因面（象波动问题中通常所采用的方法）我们必须把波动方程线性化。

为了略掉(3.15.1)式中的非线性项，对于 $\eta_B=\beta y$ 的原始模式，我们要求

$$J(\psi,\nabla^2\psi)\ll\beta\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{3.19.5}$$

由于所有的尺度和变量都假设为 $O(1)$，这要求对地形波有

$$\beta=\frac{sfL}{U}\gg 1 \tag{3.19.6}$$

或者对球面上的罗斯贝波有

$$\beta=\frac{\beta_0 L^2}{U}\gg 1.$$

如果L与波长相等的话，则在前一种情况下，罗斯贝波的有量纲相速为$O(sfL)$，而在后一种情况下则为$O(\beta_0 L^2)$。所以对上述两种情况，线性化的条件都是

$$\frac{C_*}{U}\gg 1. \tag{3.19.7}$$

正如我们已经看到的，这正是流体元小位移的条件。故在我们的尺度分析方案中，$\beta\gg 1$实际上是对于线性波动的一般条件。在这些条件下，线性化的位涡方程是

$$\frac{\partial}{\partial t}[\nabla^2\psi-F\psi]+\beta\frac{\partial\psi}{\partial x}=0. \tag{3.19.8}$$

把(3.19.3)代入(3.19.8)式得到

$$\begin{aligned}&\sin(kx+ly-\sigma t)\times\left[-\{\sigma(K^2+F)+\beta k\}A\right.\\&\left.-2\left(k\frac{\partial^2 A}{\partial x\partial t}+l\frac{\partial^2 A}{\partial y\partial t}\right)+\sigma\nabla^2 A\right]+\cos(kx+ly-\sigma t)\\&\times\left[-(K^2+F)\frac{\partial A}{\partial t}+2\sigma\left(k\frac{\partial A}{\partial x}+l\frac{\partial A}{\partial y}\right)\right.\\&\left.+\beta\frac{\partial A}{\partial x}+\nabla^2\frac{\partial A}{\partial t}\right]=0.\end{aligned} \tag{3.19.9}$$

因为A是x、y和t的缓变函数，所以$\sin(kx+ly-\sigma t)$和$\cos(kx+ly-\sigma t)$的系数对于最低阶必须为零，即如果用$\sin(kx+ly-\sigma t)$乘(3.19.9)式，然后对一个波周期求平均，则精确到最低阶我们得到

$$\sigma(K^2+F)+\beta k=0. \tag{3.19.10}$$

这就是纯平面波的频散关系式，而且在这里出现于缓变波包的第一近似中。所以，对平面波位相传播所建立的基本观念以及频率-波数关系式，可直接用于缓变的波包。对于最低阶，$\cos(kx+ly-\sigma t)$的系数为零的条件给出

$$\frac{\partial A}{\partial t}-\frac{2\sigma k+\beta}{K^2+F}\frac{\partial A}{\partial x}-\frac{2\sigma l}{K^2+F}\frac{\partial A}{\partial y}=0, \tag{3.19.11}$$

或用(3.19.10)式有

$$\frac{\partial A}{\partial t}+C_{gx}\frac{\partial A}{\partial x}+C_{gy}\frac{\partial A}{\partial y}=0, \tag{3.19.12}$$

式中

$$C_{gx}=\beta\frac{k^2-l^2-F}{(K^2+F)^2}, \tag{3.19.13a}$$

$$C_{gy}=2\frac{\beta kl}{(K^2+F)^2}. \tag{3.19.13b}$$

(3.9.12)式的矢量形式就是

$$\frac{\partial A}{\partial t}+(\mathbf{C}_g\cdot\nabla)A=0. \tag{3.19.14}$$

因此，对于一个以速度$\mathbf{C}_g$移动的观察者来说，A是常数，或者

$$A=A(\mathbf{r}-\mathbf{C}_g t), \tag{3.19.15}$$

这里$\mathbf{r}$是xy平面的位置矢量。对于第一近似，波包的包络以$\mathbf{C}_g$运动，$\mathbf{C}_g$称为群速度，其x和y分量由(3.19.13a,b)给出。与相速不同，群速度确实满足通常的矢量合成法则。

可以直接从(3.19.10)和(3.19.13a,b)式证明

$$C_g x=\frac{\partial\sigma}{\partial k},\qquad C_g y=\frac{\partial\sigma}{\partial l}, \tag{3.19.16}$$

或者

$$\mathbf{C}_g=\nabla_K\sigma\equiv\mathbf{i}\frac{\partial\sigma}{\partial k}+\mathbf{j}\frac{\partial\sigma}{\partial l},$$

式中∇_K表示对波数的梯度矢量。因为$\sigma=KC$，其中C是在波矢量方向上波峰前进的速度，所以

$$\mathbf{C}_g=\nabla_K(KC)=\frac{\mathbf{K}}{K}C+K\nabla_K C$$
$$=\mathbf{C}+K\nabla_K C. \tag{3.19.17}$$

因此除非相速与$\mathbf{K}$无关，否则群速度与相速度的大小和方向均不相同。$\mathbf{C}_g\neq\mathbf{C}$的波动称为频散波，罗斯贝波是频散波的一个特别明显的例子。$\mathbf{C}_g$的大小与相速度不同，我们以后将看到，其方向与$\mathbf{K}$有很大偏差。有限范围的波包络将以群速度运动，而不是以相速度运动。由波位相确定的个别波峰仍以平行（或反向平行）于$\mathbf{K}$的相速运动。因此，个别波峰将穿过波包运动，它在波包的一端出现，穿过波包而取波包振幅的局部值，然后消失在振幅为零的波包的另一端。

借助对σ求导数而得到群速度的微分关系式(3.19.16)，正如在以下论证中将看到的那样，它是一个普遍结果，并不局限于这里给出的对罗斯贝波的特定计算。考虑下述形式的常系数线性波动方程

$$\mathscr{L}\left(\frac{\partial}{\partial t},\ \frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y}\right)\psi=0, \tag{3.19.18}$$

式中$\mathscr{L}$是时间导数和空间导数的多项式。例如对于罗斯贝波

$$\mathscr{L}=\frac{\partial^3}{\partial t\partial x^2}+\frac{\partial^3}{\partial t\partial y^2}-F\frac{\partial}{\partial t}+\beta\frac{\partial}{\partial x}. \tag{3.19.19}$$

如果把形如

$$\psi=R_e A e^{i(kx+ly-\sigma t)} \tag{3.19.20}$$

的解代入(3.19.18)式，则A的方程变为

$$\mathscr{L}\left(-i\sigma+\frac{\partial}{\partial t},\ ik+\frac{\partial}{\partial x},\ il+\frac{\partial}{\partial y}\right)A=0. \tag{3.19.18a}$$

若A是x、y和t的缓变函数，则多项式$\mathscr{L}$可展为泰勒级数，得到：

$$\left\{\mathscr{L}(-i\sigma,ik,il)+\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(-i\sigma)}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(ik)}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(il)}\frac{\partial}{\partial y}\right]\right\}A=0, \tag{3.19.21}$$

式中已略去高阶项．这个级数中所有含"小参数"$(1/A)\partial A/\partial t$，$(1/A)\partial A/\partial x$等的项必须分别为零，故对最低阶有

$$\mathscr{L}(-i\sigma,\ ik,\ il)=0. \tag{3.19.22}$$

然而，这是用频率和波数代替原微分算子中的时间导数和空间导数后，对平面波所得到的σ的多项式。实际上，(3.19.22)式只是一个频散关系式，它对于罗斯贝波就是(3.19.10)式。为了使展开式中第二项也为零，应有

$$\frac{\partial A}{\partial t}-\frac{\partial\mathscr{L}/\partial k}{\partial\mathscr{L}/\partial\sigma}\frac{\partial A}{\partial x}-\frac{\partial\mathscr{L}/\partial l}{\partial\mathscr{L}/\partial\sigma}\frac{\partial A}{\partial y}=0. \tag{3.19.23}$$

根据定义，

$$\begin{aligned}-\frac{\partial\mathscr{L}/\partial k}{\partial\mathscr{L}/\partial\sigma}&=\left(\frac{\partial\sigma}{\partial k}\right)_{l,\mathscr{L}},\\-\frac{\partial\mathscr{L}/\partial l}{\partial\mathscr{L}/\partial\sigma}&=\left(\frac{\partial\sigma}{\partial l}\right)_{k,\mathscr{L}},\end{aligned} \tag{3.19.24}$$

即(3.19.23)式中的系数是当$\mathscr{L}$值固定（实际上是零）时σ对k和l的偏导数。也就是说，它们是根据频散关系式由波数固定所得到的频率之导数，所以，(3.19.16)式是适用于任意波型的波包速度的一般公式。因而为了确定波包的运动，只需知道频散关系式即可。

回到罗斯贝波的特殊情形，让我们更详细地考察该例中群速度的特征．尤其是要注意，虽然x方向的相速总是负的，但如图3.19.2所示，

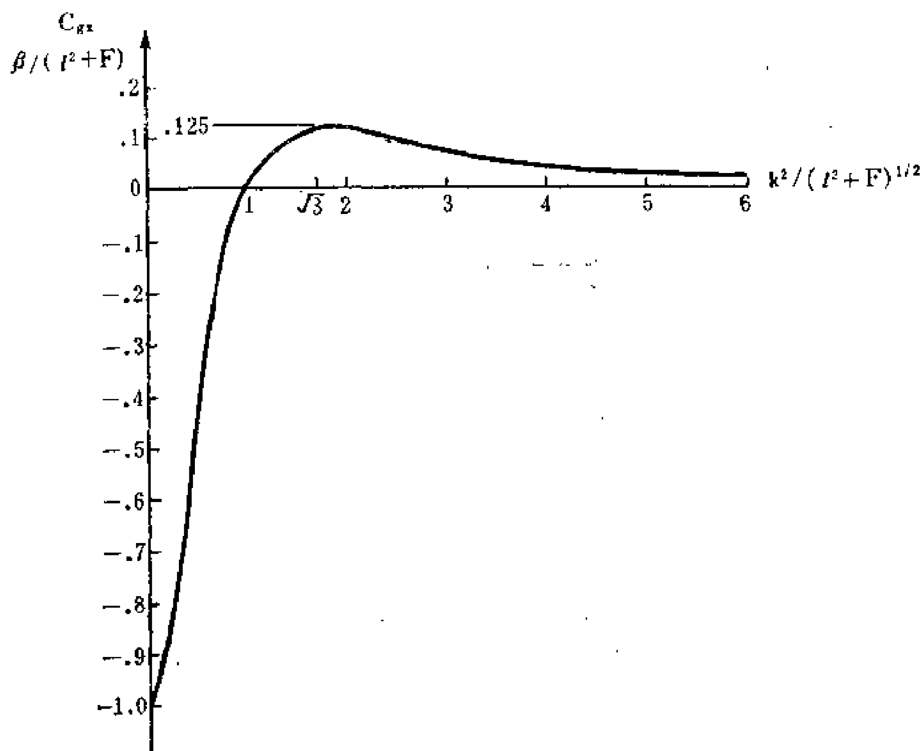


图3.19.2　罗斯贝波在x方向的群速度

群速度的 x 分量可正可负。对于满足

$$k^2>l^2+F \tag{3.19.25}$$

的短波，波包将沿正 x 方向（若我们想象成是 β 平面上的罗斯贝波，那就是朝东）传播，面对于 x 方向的长波，即对于

$$k^2<l^2+F \tag{3.19.26}$$

的波动，波包将沿负 x 方向（在 β 平面上朝西）传播。对于 $k^2=l^2+F$ 的波动，将有驻止的波包络。在每一种情况中，个别波峰的相速与包络的速度不同。实际上对(3.19.25)式成立的短波，其波峰运动方向与包络的运动方向相反。在 $k=3^{1/2}(l^2+F)^{1/2}$ 时，C_{gx} 达到其最大正值，即

$$最大正\ C_{gx}=\frac{\beta}{8(l^2+F)}; \tag{3.19.27}$$

面在 $k=0$ 时，C_{gx} 达到其最大负值：

$$最大负\ C_{gx}=-\frac{\beta}{(l^2+F)}, \tag{3.19.28}$$

它比 x 方向上最大正群速度快 8 倍。

图 3.19.3 表明 x 方向上群速与相速之比，注意 $|C_{gx}|\leqslant|C_x|$.

因为

$$\frac{C_{gy}}{C_y}=-\frac{2l^2}{K^2+F}<0, \tag{3.19.29}$$

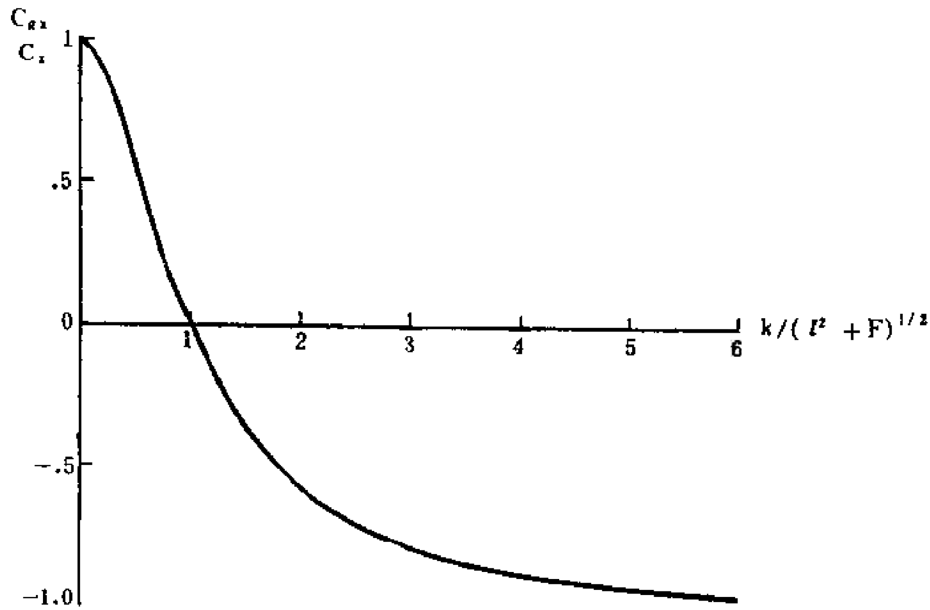


图 3.19.3　x 方向的群速与相速之比值

所以 y 方向上的群速度（在 β 平面上朝北）总是和 y 方向上的相速相反。例如，由波的包络线边界所定义的波扰动区向北运动时，波峰将向南运动。

在进一步讨论罗斯贝波的能量传播之前，我们在下一节中先讨论用多时间尺度方法推导(3.9.14)式。对本节的推导感到满意的读者可以直接看3.21节。

3.20 多时间尺度方法

缓变波动场之存在，使观察者明显地辨认出总波动场具有两种不同的振荡时间尺度。对于这类缓变的波动场问题，可以用一种比较正规的、经常是较为有用且有效的方法来处理。这两种时间尺度，即所谓“快时间”尺度和“慢时间”尺度。前者即波振幅似乎不变的局部振荡周期，而在后一时间尺度上，波振幅渐渐地变化，象波包缓慢而平滑地经过一个观察者时的变化那样。为了把这个直觉概念变成一个有用的计算方法，只需要考虑明显地依赖于下述两组变量的 ψ 场，

$$\begin{gathered}\tilde{t}=t,\ \tilde{x}=x,\ \tilde{y}=y,\\ T=\Delta t,\ X=\Delta x,\ Y=\Delta y,\ \Delta\ll 1,\end{gathered} \tag{3.20.1}$$

式中带“~”的变量是快变量，而大写字母表示慢变量，Δ 是一个衡量该场的时间变化和空间变化缓慢程度的小参数。于是函数 ψ 可借助这两组变量写为显函数形式，即

$$\psi=\psi(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{t};X,Y,T). \tag{3.20.2}$$

通常由链锁法则（复合函数求导数规则）给出其导数，例如，

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial t}&=\frac{\partial\psi}{\partial\tilde{t}}+\Delta\frac{\partial\psi}{\partial T},\\ \frac{\partial\psi}{\partial x}&=\frac{\partial\psi}{\partial\tilde{x}}+\Delta\frac{\partial\psi}{\partial X},\\ \frac{\partial\psi}{\partial y}&=\frac{\partial\psi}{\partial\tilde{y}}+\Delta\frac{\partial\psi}{\partial Y}.\end{aligned} \tag{3.20.3}$$

用这些变量表示，(3.19.8)式在按 Δ 并项后得

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\tilde{t}}\left\{\frac{\partial^2\psi}{\partial\tilde{x}^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\tilde{y}^2}-F\psi\right\}+\beta\frac{\partial\psi}{\partial\tilde{x}}\\ &=-\Delta\left\{\frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial\tilde{x}^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\tilde{y}^2}-F\psi\right]+2\left(\frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial^2\psi}{\partial\tilde{x}\partial\tilde{t}}+\frac{\partial}{\partial Y}\frac{\partial^2\psi}{\partial\tilde{y}\partial\tilde{t}}\right)\right.\\ &\quad\left.+\beta\frac{\partial\psi}{\partial X}\right\}-\Delta^2\left[\frac{\partial}{\partial T}\left(2\frac{\partial^2\psi}{\partial X\partial\tilde{x}}+2\frac{\partial^2\psi}{\partial Y\partial\tilde{y}}\right)+\frac{\partial}{\partial\tilde{t}}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial X^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial Y^2}\right)\right]\\ &\quad-\Delta^3\left[\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial X^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial Y^2}\right)\right].\end{aligned} \tag{3.20.4}$$

由于 Δ 是小参数，故 ψ 可以写成

$$\psi=\psi_0+\Delta\psi_1+\Delta^2\psi_2+\cdots\cdots. \tag{3.20.5}$$

若将(3.20.5)代入(3.20.4)式，则 Δ 的同次幂项必须为零。一阶项给出

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial^2\psi_0}{\partial\tilde{x}^2}+\frac{\partial^2\psi_0}{\partial\tilde{y}^2}-F\psi_0\right\}+\beta\frac{\partial\psi_0}{\partial\tilde{x}}=0, \tag{3.20.6}$$

这是只含快变量的方程，因此有如下形式的解：

$$\psi_0=Re A(X,Y,T)e^{i(k\tilde{x}+l\tilde{y}-\sigma\tilde{t})}. \tag{3.20.7}$$

就(3.20.6)式的算子来说，A 是未知的常数（即与 $\tilde{x},\tilde{y},\tilde{t}$ 无关），把(3.20.7)式代入(3.20.6)式得到熟悉的频散关系式(3.19.10)。A 对 X,Y 和 T 的依赖关系至此尚未确定。

Δ 阶的方程是

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}\left\{\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\tilde{x}^2}+\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\tilde{y}^2}-F\psi_1\right\}+\beta\frac{\partial\psi_1}{\partial\tilde{x}}$$

$$=-\left[\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial^2\psi_0}{\partial\tilde{x}^2}+\frac{\partial^2\psi_0}{\partial\tilde{y}^2}-F\psi_0\right)+2\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial^2\psi_0}{\partial\tilde{x}\partial\tilde{t}}\right)+2\frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\partial^2\psi_0}{\partial\tilde{y}\partial\tilde{t}}\right)\right.$$

$$\left.+\beta\frac{\partial\psi_0}{\partial X}\right]=(K^2+F)\left[\frac{\partial A}{\partial T}-\frac{2\sigma k+\beta}{K^2+F}\frac{\partial A}{\partial X}\right.$$

$$\left.-\frac{2\sigma l+\beta}{K^2+F}\frac{\partial A}{\partial Y}\right]e^{i(k\tilde{x}+l\tilde{y}-\sigma\tilde{t})}. \tag{3.20.8}$$

式中已用(3.20.7)式来计算(3.20.8)式的右端项。ψ_1的计算给我们提出了一个明显的困难。就(3.20.8)式对 $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}$ 的依赖关系而论，其右端项以 ψ_1 的齐次方程的频率作振荡。这就是说，对于固定的 k 和 l，(3.20.8)式右端的强迫项以系统振荡的固有频率而振荡。ψ_1的解将以与无阻尼振子的共振强迫作用完全类似的方式，随 $\tilde{t}$ 线性增长，即可能含有随 $\tilde{t}$ 的久期增长，在那种情况下

$$\frac{\Delta\psi_1}{\psi_0}=O(\Delta\tilde{t})=T, \tag{3.20.9}$$

所以在时间 $t=O(\Delta^{-1})$(这时 $T=O(1)$)上，展开式 (3.20.5) 中的第二项会变得与第一项一样大。当然，我们正是想在 $t=O(\Delta^{-1})$ 的时间内描写波振幅的演变，故我们必须要求展开式(3.20.5)对这一时间长度仍然成立。为达此目的，我们必须消除(3.20.8)式右端的共振强迫项，这就要求

$$\frac{\partial A}{\partial T}-\frac{2\sigma k+\beta}{K^2+F}\frac{\partial A}{\partial X}-\frac{2\sigma l+\beta}{K^2+F}\frac{\partial A}{\partial Y}=0, \tag{3.20.10}$$

该式规定了 A 对慢变量的依赖关系。把(3.20.10)式与(3.19.11)式相比较表明，(3.20.10)式实际上就是用前一节中不太系统的方法推导出来的振荡方程。

多时间尺度方法的主要优点是，它把时间和空间上的局部动力学问题与缓变的大尺度变化问题系统地分开。在我们刚才讨论的问题中，该方法只是加深了我们对导出近似式(3.19.14)的理解。但是，如果需要的话，它的确能给出系统地计算高阶修正的方法。更为重要的是，这种方法可以有效地用到那些启发式方法失效的问题中去。例如，可应用于3.26节讨论的罗斯贝波非线性相互作用的问题中。

3.21 罗斯贝波中的能量和能通量

如果用 ψ 乘线性波动方程(3.19.8)，经过少量运算后可得

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{(\nabla\psi)^2+F\psi^2}{2}\right]+\nabla\cdot\left\{-\psi\nabla\frac{\partial\psi}{\partial t}-\mathrm{i}\beta\frac{\psi^2}{2}\right\}=0, \tag{3.21.1}$$

该式用能量可以直接解释其物理意义。用有量纲单位表示，单位质量的动能[1]对深度积分后是

$$D\left(\frac{u_*^2+v_*^2}{2}\right)=\frac{u^2}{2}D\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right\}, \tag{3.21.2}$$

(1) 垂直速度对动能没有贡献，这是因为在浅水理论中 $w=O(\delta u)$

而用静止的自由面作零参考面时，位能是

$$g\int_0^\eta Z_* dZ_* = g\frac{\eta_*^2}{2} = \frac{U^2 D}{2} F\psi^2 \tag{3.21.3}$$

其中使用了尺度分析的定义(3.12.1)、(3.12.5)和(3.12.29a)。因此位能与动能之比是$O(F)$，即取决于运动尺度和变形半径之比。其次，(3.21.1)式方括号中的项显然是动能与位能之和的无量纲形式，动能与位能之和随时间的增长率与通量矢量

$$\mathbf{S} = -\psi\nabla\frac{\partial\psi}{\partial t} - \mathbf{i}\beta\frac{\psi^2}{2} \tag{3.21.4}$$

的辐合相平衡。故能量$E(x,y,t)$满足守恒律

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{S} = 0. \tag{3.21.5}$$

对罗斯贝波包，

$$\psi = A\cos(kx + ly - \sigma t). \tag{3.21.6}$$

且最低阶的能量是

$$E = \frac{K^2 A^2}{2}\sin^2(kx + ly - \sigma t) + \frac{F}{2}A^2\cos^2(kx + ly - \sigma t), \tag{3.21.7}$$

这里已略去A的空间梯度对能量的较小的贡献。在任意固定点处，如上式所示，E随波动的半周期在其平均值

$$\langle E\rangle = (K^2 + F)\frac{A^2}{4} \tag{3.21.8a}$$

附近迅速变化，所以

$$E = \langle E\rangle + \frac{A^2}{4}(K^2 - F)\cos 2(kx + ly - \sigma t). \tag{3.21.8b}$$

正是波动能量在一个周期中的平均值$\langle E\rangle$，给出局部波能量的不随时间变化的定义，它是合理的波能量的定义。注意$\langle E\rangle$在波包上随A^2缓慢变化。根据(3.21.4)式和(3.21.6)式，能通量矢量为

$$\begin{aligned}\mathbf{S} = &-A^2\sigma\mathbf{K}\cos^2(kx + ly - \sigma t)\\ &-\mathbf{i}\beta\frac{A^2}{2}\cos^2(kx + ly - \sigma t).\end{aligned} \tag{3.21.9}$$

它在一个周期上的平均值是

$$\langle\mathbf{S}\rangle = \frac{A^2}{2}\left[-\sigma\mathbf{K} - \frac{\beta}{2}\mathbf{i}\right]. \tag{3.21.10}$$

它借助频散关系式(3.15.11)和(3.19.13a,b)可以写为[1]：

$$\begin{aligned}\langle\mathbf{S}\rangle &= \frac{A^2}{4}\left[\mathbf{i}\beta\frac{k^2 - l^2 - F}{K^2 + F} + \mathbf{j}\frac{\beta 2kl}{K^2 + F}\right]\\ &= \mathbf{C}_g\langle E\rangle.\end{aligned} \tag{3.21.11}$$

所以，平均能通量矢量等于波动能量乘以群速度。或者，由于$\mathbf{C}_g$与空间坐标无关，(3.21.5)式在一个波动周期上求平均后变成

(1) 关于S的较普遍的讨论及其物理意义见6.9节。

$$\frac{\partial\langle E\rangle}{\partial t}+\mathbf{C}_g\cdot\nabla\langle E\rangle=0. \tag{3.21.12}$$

由(3.21.8)式定义的波动能量是守恒的，且以群速度随波包传播．能量传播的速度根本不是由波峰或波谷之传播给出的，即不是由相速给出的．

3.22 能量传播图

Longuet-Higgins(1964)介绍了一种用波矢量对群速度方向（从而也是能通量方向）作几何表示的有用方法．假定罗斯贝波（或波包）的频率为σ．对任意给定的σ，波数分量(k,l)必须满足

$$k^2+l^2+F-\frac{\beta k}{-\sigma}=0, \tag{3.22.1}$$

这只不过是重新改写的频散关系式。不失一般性，可以认为k是正数，故$\sigma<0$，从(3.22.1)得到

$$\left[k-\frac{\beta}{-2\sigma}\right]^2+l^2=\frac{\beta^2}{4\sigma^2}-F. \tag{3.22.2}$$

所以，对给定的σ可能有的波矢量必须位于kl平面的一个圆上，其圆心O的坐标是$(\beta/(-2\sigma),0)$，其半径为$(\beta^2/4\sigma^2-F)^{1/2}$，如图3.22.1所示。因为根据(3.15.16)式有$\sigma\leqslant-\beta/2F^{1/2}$，故半径总是实数。圆周到原点的距离由满足$\sigma$的最小$x$波数给出，其值是

$$k_m=\frac{\beta}{-2\sigma}-\left(\frac{\beta^2}{4\sigma^2}-F\right)^{1/2}\geqslant 0. \tag{3.22.3}$$

因而，在$F=0$的极限情况下（即对很大的变形半径），圆周与l轴相切．$\mathbf{K}$的方向给出位相传播的方向，对罗斯贝波来说，当$k>0$时，位相传播方向与$\mathbf{K}$反向平行．由(3.21.11)式，能通量矢量为

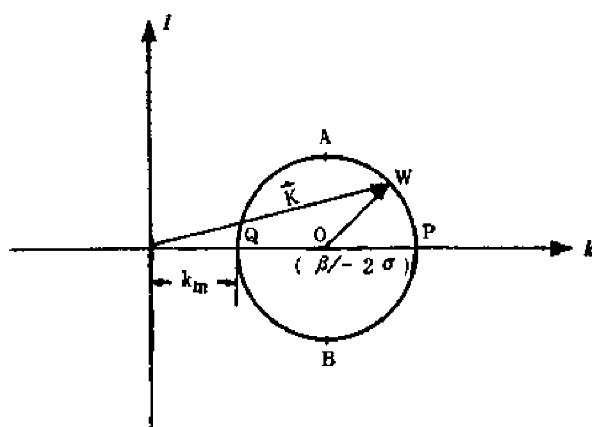


图3.22.1 矢量$\mathbf{OW}$指出频率为σ、波矢量为$\mathbf{K}$的罗斯贝波的群速度方向。

$$\langle\mathbf{S}\rangle=\frac{A^2}{2}\frac{\beta}{K^2+F}k\left[\mathbf{i}\frac{k^2-(l^2+F)}{2k}+\mathbf{i}l\right]=\frac{A^2}{2}(-\sigma)\left[\mathbf{i}\left(k-\frac{K^2+F}{2k}\right)+\mathbf{j}l\right], \tag{3.22.4}$$

或者

$$\langle\mathbf{S}\rangle=\frac{A^2}{2}(-\sigma)\left\{\mathbf{i}\left[k-\left(\frac{\beta}{-2\sigma}\right)\right]+\mathbf{j}l\right\}=\frac{A^2}{2}(-\sigma)\mathbf{OW}, \tag{3.22.5}$$

式中$\mathbf{OW}$是从圆心指向位于圆周上的波矢量端点的矢量．因为$\mathbf{OW}$的大小是

$$|\mathbf{OW}|=\left(\frac{\beta^2}{4\sigma^2}-F\right)^{1/2}, \tag{3.22.6}$$

所以对于振幅和频率相同的所有波，能通量的大小是一样的．波矢量位于半圆APB上的波向

右（较大的 x）传播能量。而波矢量位于半圆 AQB 上的波向左传播能量。前者是短波，后者是长波。

3.23 反射过程和辐射条件

能量传播和群速度概念的一个重要应用，出现于罗斯贝波在固体边界的反射之研究中。如果我们考虑的是 β 平面，那末所要讨论的反射问题直接与罗斯贝波在大洋盆地边界的反射有关。考虑图 3.23.1(a) 所示的情形。罗斯贝波（或缓变波包）入射到 $x=0$ 处的刚性边界上。在 β 平面上，这个边界是大洋的西边界。对于真正接近于边界的波包，其群速度必须指

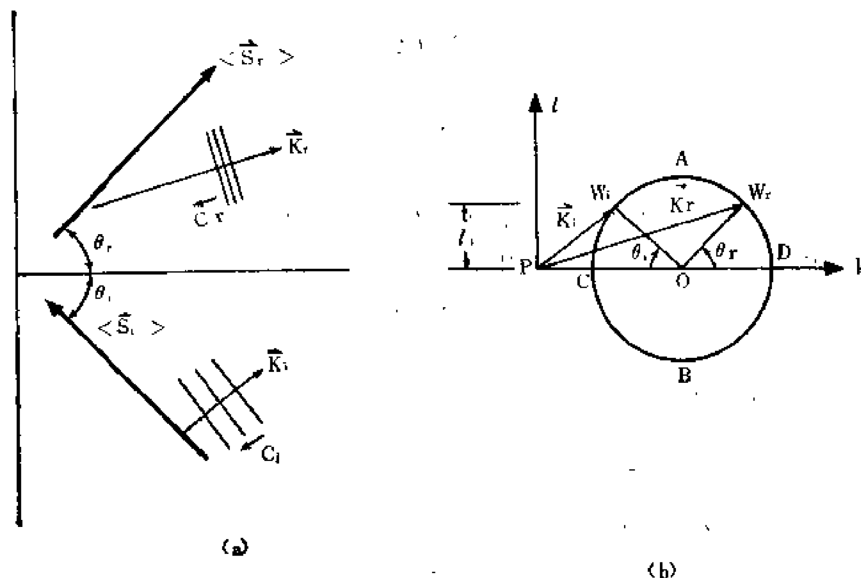


图 3.23.1 入射和反射的平面波及其在能量传播图上的表示。

向边界，所以能通量矢量指向西。波包的路径，或它的射线，是沿 $\mathbf{C}_g$ 方向的直线。在图 3.23.1 上，入射能量的路径用标记 $\langle \mathbf{S}_i \rangle$ 的粗箭头表示。入射线与边界之法线的交角是 θ_i。入射波的流函数可以表示为

$$\psi_i = R_e A_i e^{i(k_i x + l_i y - \sigma_i t)}. \tag{3.23.1}$$

即它的频率为 σ_i，波矢量为 $\mathbf{K}_i$，当然，

$$\sigma_i = \frac{-\beta k_i}{k_i^2 + l_i^2 + F}, \tag{3.23.2}$$

所以 $\mathbf{K}_i$ 必须位于如图 3.23.1(b) 所示的图上，该圆的半径是 $(\beta^2/4\sigma_i^2 - F)^{1/2}$，圆心是 $(\beta/-2\sigma_i, 0)$。我们由上节结果知道，$\mathbf{K}_i$ 是 kl 平面上的矢量 $\mathbf{PW}_i$，这里 W_i 是 kl 平面上该圆周上的一个点，且半径矢量 $\mathbf{OW}_i$ 平行于 $\langle \mathbf{S}_i \rangle$。这样确定的矢量 $\mathbf{K}_i$ 也画在图 3.23.1(a) 上。波峰反向平行于 $\mathbf{K}_i$，即向西南方向运动，而波动能量向西北移动。入射波必须是长波，即它的波矢量必须位于 kl 平面的弧 ACB 上。根据 (3.22.2) 式，对给定的 σ_i 和 l_i, k_i，必须或者有

$$k_i = \left(\frac{\beta}{-2\sigma_i}\right) - \left\{\frac{\beta^2}{4\sigma_i^2} - (F + l_i^2)\right\}^{1/2}, \tag{3.23.3a}$$

或者有

$$k_i=\left(\frac{\beta}{-2\sigma_i}\right)+\left\{\frac{\beta^2}{4\sigma_i^2}-(F+l_i^2)\right\}^{1/2}. \quad (3.23.3b)$$

前者是长波，其波射线趋向边界；后者是短波，其射线从边界向外。因此，正是(3.23.3a)确定了入射波的 x 方向波数（注意，$-\sigma$ 是正的）。

侧边界的存在将产生一个反射波

$$\psi_r=R_eA_re^{i(k_rx+l_ry-\sigma_rt)}. \quad (3.23.4)$$

代表入射和反射能通量的连续方程的全流函数场为

$$\psi=\psi_i+\psi_r. \quad (3.23.5)$$

同样，(3.23.5)式也是大尺度波包自边界反射所需要的长"反射时间"中的流函数场。上述两种情况下，x 方向的速度在 $x=0$ 上都必须为零，即

$$x=0; \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y}=0, \quad (3.23.6)$$

或者

$$l_iA_ie^{i(l_iy-\sigma_it)}+l_rA_re^{i(l_ry-\sigma_rt)}=0. \quad (3.23.7)$$

(3.23.7)式对所有的 t 均成立的唯一条件是

$$\sigma_i=\sigma_r=\sigma, \quad (3.23.8)$$

故频率在反射中不变。由此得到一个直接结果是，在 kl 平面上反射波，必须有与入射波相同的波矢量圆周，因为该圆的圆心和半径只取决于频率。此外，为使(3.23.7)式对所有的 y 成立，必须有

$$l_i=l_r=l, \quad (3.23.9)$$

所以波矢量在平行于边界方向上的投影在反射时不变。这完全确定了反射波的波矢量，因为如果 $l_i=l_r$，则波矢量的端点必须位于波数圆上的 W_r 点，以便使反射波的波通量方向可以从边界指向外。由于 $l_i=l_r$，稍加几何证明可知，反射角 θ_r 等于入射角，所以能通量矢量从边界上"弹性"反射回来，即能量和波包轨迹的反射角等于入射角。反射波的 x 方向波数由(3.23.3b)给出。所以，尽管只知道 σ 和 l 不能够确定 k 的两个根中哪一个是适当的根，但是，反射波必须有向外的能通量的辐射条件却可以确定 k。因为 $k_r>k_i$，所以作为反射之结果，波矢量的长度增加。由于 $l_i=l_r$，故上述结果意味着反射波的波矢量，将被转到一个与 x 轴更接近同向共线的位置上。对地转运动，速度与波矢量垂直，所以反射波的速度由于反射而向（朝北的）y 轴方向旋转。由于反射引起 k 的的变化是

$$k_r-k_i=2\left[\frac{\beta^2}{4\sigma^2}-(l^2+F)\right]^{1/2}, \quad (3.23.10)$$

所以 k 的变化量随频率 σ 的减小而增加，只要考虑如图3.23.2所示的频散曲线，立即可以得到以上结果。

(3.23.7)式所要求的其他条件是

$$A_i=-A_r=A, \quad (3.23.11)$$

所以在反射中压力场的振幅不变，而位相突变了 180°，因振幅不变，故速度场与波数成正比，即对于入射波有

$$\begin{aligned}u_i&=-R_e(il)Ae^{i(k_ix+ly-\sigma t)},\\ v_i&=R_e(ik_i)Ae^{i(k_ix+ly-\sigma t)},\end{aligned} \quad (3.23.12)$$

而对于反射波有

$$u_r = R_e(il)Ae^{i(k_r x + ly - \sigma t)},$$
$$v_r = -R_e(ik_r)Ae^{i(k_r x + ly - \sigma t)}. \tag{3.23.13}$$

x 方向速度（即纬向速度）大小在反射时不变，而速度的 y 分量在反射过程中增加了。因为$k_r^2 > l^2 + F > l^2$，所以反射速度必定主要在 y 方向上。

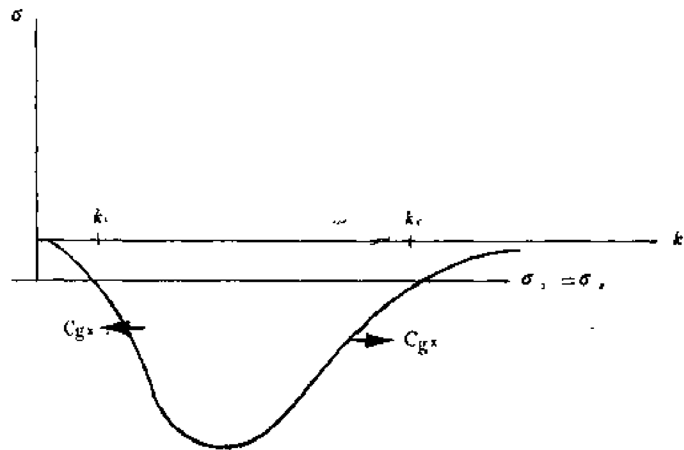


图3.23.2 入射和反射的x方向波数分别是 k_i 和 k_r，在低频处差值 $k_r - k_i$ 变大。

注意，反射波的能量密度（即单位面积上的能量）大于入射波的能量密度，因为

$$\langle E_i \rangle = (K_i^2 + F)|A_i|^2,$$
$$\langle E_r \rangle = (K_r^2 + F)|A_r|^2 = (K_r^2 + F)|A_i|^2, \tag{3.23.14}$$

故

$$\frac{\langle E_r \rangle}{\langle E_i \rangle} = \frac{K_r^2 + F}{K_i^2 + F} > 1. \tag{3.23.15}$$

但是，在方程(3.22.6)中我们已经证明，对于位于波数圆上的、振幅和频率相同的一切波动，能通量 $\langle \mathbf{S} \rangle$ 是相同的。尽管反射波的能量密度因反射而增加，但是入射波和反射波的能通量是一样的。尤其是由于

$$|\mathbf{C}_g| = \frac{2(-\sigma)}{K^2 + F}\left\{\frac{\beta^2}{4\sigma^2} - F\right\}^{1/2}, \tag{3.23.16}$$

反射波沿射线或波包轨迹的速度比入射波慢，其比值是

$$\frac{|\mathbf{C}_{gr}|}{|\mathbf{C}_{gi}|} = \frac{K_i^2 + F}{K_r^2 + F}, \tag{3.23.17}$$

所以能通量不因反射过程而改变。对频率很低的波，因其 x 方向波数很高，故反射波的群速度很小。

由于群速度在反射后减小，所以如图3.23.3所示，入射波包将使其长度沿射线方向压缩，从纯运动学角度考虑，其比率为

$$\frac{L_r}{L_i} = \frac{|\mathbf{C}_{gr}|}{|\mathbf{C}_{gi}|}. \tag{3.23.18}$$

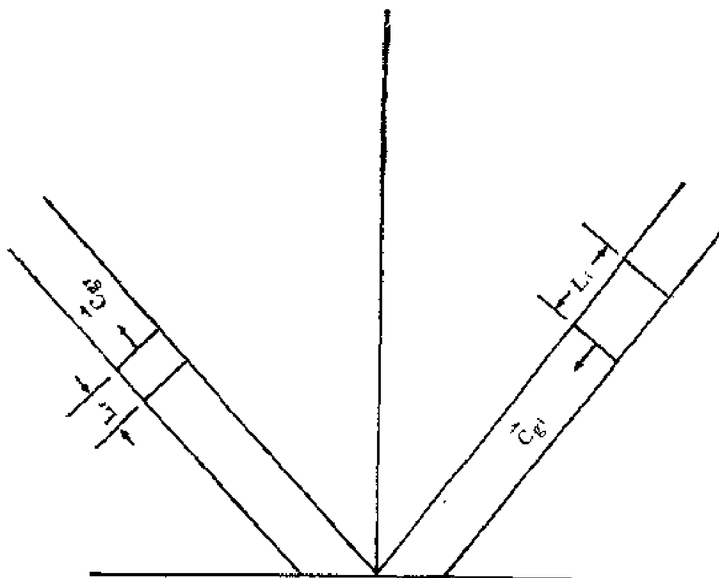


图3.23.3 波包从$x=0$处的边界反射时的轨迹。注意，波包因反射波群速度的减小而变短。

波包在垂直于射线路径方向

上的宽度不受反射的影响。因此，虽然从局部地区看，在波包内部当能量被挤入一个从边界缓慢移出的较狭窄的区域时，反射运动具有较多的能量，但是由于

$$L_i\langle E_i\rangle = L_r\langle E_r\rangle, \tag{3.23.19}$$

故从(3.23.18)、(3.23.17)和(3.23.15)式得到，波包中的总能量在反射过程中不变。

反射过程的这一显著特性取决于边界的方向。波动自纬向边界（即平行于 x 轴的边界）反射的特殊情况清楚地表明了这个事实。分析方法和上述相同，频率和平行于边界的波矢量分量也都不变。这意味着在反射过程中 k 守恒。看一下图 3.23.4 就会明白，反射前后，l 只有

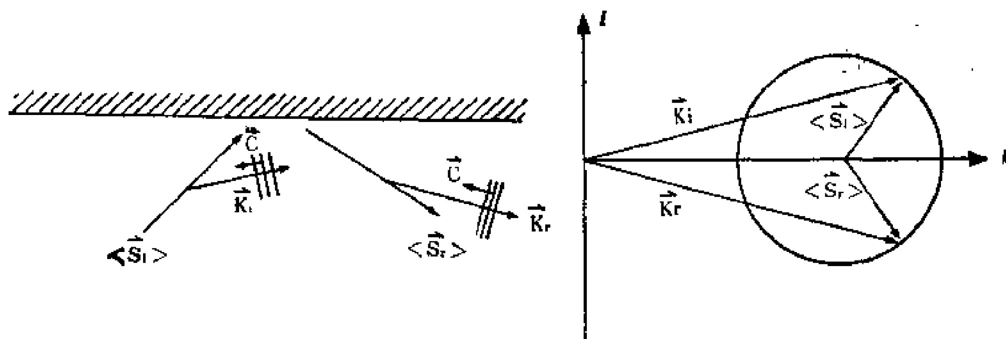


图3.23.4 平面波在与环境位涡等值线重合的边界处的反射。在这种情况下，波动之波长在反射中不变。

符号的变化，所以在这个特殊例子中，波长、群速度和能量密度在反射中均不改变。在这里，虽说罗斯贝波的引人注目的特点是明显的，但在观测两个波中的波峰前进时，很容易不知不觉地把反射波和入射波弄混淆。

3.24 初始扰动产生的罗斯贝波

包络着单一频率波列的波包，以适合于该单一波的波矢量的群速度运动。如果波包振幅缓慢地变化，(3.19.15)式表明，振幅在从边界反射之前，一直保持形状不变而前进。控制这类波包传播的规则，我们已作过详细的讨论，群速度的概念是理解波包运动的基础。

在很多情况下，一个扰动，尽管清楚地表现为波状，但并非（甚至近似地也不）只包含单个波长的波。相反地，我们常看到的是相邻峰谷之间的距离不同并有变化的波动。自然感到奇怪的是，群速度和相速度的概念在描写那些波长（假定它可清楚地定义出来的话）随时间和空间变化的扰动中究竟起什么作用（如果有的话）。为了考察这一问题，让我们来考虑一个特例。在讨论过程中将会看到，这个特例所建立的概念相当有代表性。

想像如图 3.24.1 所示的 β 平面上无限长通道中流体的准地转运动。设此通道介于 $y=0$ 和 $y=1$ 的两个“纬圈”之间。最初，通道中的流体处于静止状态，在 $t=0$ 时刻，于 $x=0$ 附近给流体施加一个任意形状的局部扰动。如果扰动振幅很小，则扰动被传至远离原点的地方去的过程是波动造成的，但传播性质是复杂的，因为根据富里叶定理，任意初始扰动将包含许多波长的波动。$y=0$，1 处边界的存在，使我们能将传播问题加以简化：能量传播方向局限于 x 方向上。对于 β 平面上的运动，这相当于这样一个模式，其中任意地把一个纬度带与其周围隔开，并只考虑能量在 x 方向的传播。

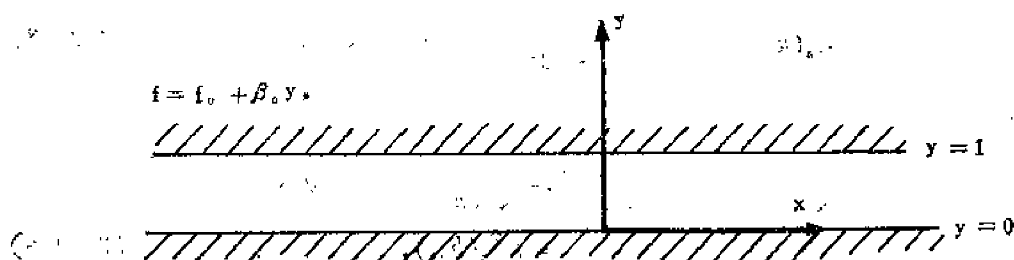


图3.24.1 扰动传播的通道。环境位涡在 $y=0$ 到 $y=1$ 之间线性增长，就象科氏参数随纬度线性增长一样。

小振幅扰动的控制方程是

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi-F\psi)+\beta\frac{\partial\psi}{\partial x}=0, \tag{3.24.1}$$

边界条件为

$$v=\frac{\partial\psi}{\partial x}=0, \text{在 } y=0、1 \text{ 处}, \tag{3.24.2}$$

初始条件为

$$\psi(x,y,0)=\psi_0(x,y). \tag{3.24.3}$$

为了不失去基本特点而又使讨论尽可能地简单，我们考虑

$$\psi_0(x,y)=\psi_n(x)\sin\pi y, \tag{3.24.4}$$

的情形，这里的 n 是任意的。一般的初始扰动可以通过形如(3.24.4)式的几个扰动的富里叶级数表示，并且因我们所讨论的问题是线性的，一般情形下所产生的运动就是每一个 n 所对应的运动的线性迭加。

观察(3.24.1)式可以发现，如果 $\phi_n(x,t)$ 满足：

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial^2\phi_n}{\partial x^2}-a^2\phi_n\right\}+\beta\frac{\partial\phi_n}{\partial x}=0, \tag{3.24.5}$$

式中

$$a^2=n^2\pi^2+F,$$

那末，自动满足(3.24.2)的形如

$$\psi=\phi_n(x,t)\sin n\pi y$$

的解是可能存在的。

ϕ_n 的富里叶变换由积分

$$\hat{\phi}_n(k,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ikx}\phi_n(x,t)dx \tag{3.24.6}$$

定义，而反演关系式为

$$\phi_n(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ikx}\hat{\phi}_n(k,t)dk. \tag{3.24.7}$$

任何在 x 的无穷区间$(-\infty,\ \infty)$上性质较好的函数均可表示为富里叶积分(3.24.7)。富里叶积分是对平面波的所有波数 k 求和（积分），其中每个波的振幅是 $\hat{\phi}_n(k,t)dk$。$t=0$ 时，(3.24.4)的富里叶变换为

$$\hat{\phi}_n(k,\ 0)=A_n(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ikx}\Psi_n(x)dx. \tag{3.24.8}$$

通过分部积分得到

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ikx}\frac{\partial\phi_n}{\partial x}dx=\frac{ik}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ikx}\phi_n dx$$
$$=ik\hat{\phi}_n(k,t). \tag{3.24.9}$$

和

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ikx}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial\phi_n}{\partial t}dx=-\frac{k^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ikx}\frac{\partial\phi_n}{\partial t}dx$$
$$=-k^2\frac{\partial\hat{\phi}_n}{\partial t}(k,t).$$

这里我们已不言而喻地利用了这样一个事实，即对任意有限的t，当$|x|\to\infty$时，ϕ_n必须为零，亦即我们只需要假定能量传播的速度有限。借助于(3.24.9),(3.24.5)式变为一个$\hat{\phi}_n$的常微分方程（实际上这正是引入富里叶变换的原因），即

$$\frac{\partial\hat{\phi}_n}{\partial t}-\frac{i\beta k}{k^2+a^2}\hat{\phi}_n=0, \tag{3.24.10}$$

其通解是

$$\hat{\phi}_n(k,t)=C_n(k)e^{-i\sigma(k)t}. \tag{3.24.11}$$

这里

$$\sigma(k)=-\frac{\beta k}{k^2+a^2}. \tag{3.24.12}$$

为了满足初始条件(3.24.8)，$C_n(k)$必满足

$$C_n(k)=A_n(k); \tag{3.24.13}$$

或者有

$$\hat{\phi}_n=A_n(k)e^{-i\sigma(k)t}, \tag{3.24.14}$$

由此可以得出

$$\boxed{\phi_n(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}A_n(k)e^{i(kx-\sigma(k)t)}dk}. \tag{3.24.15}$$

扰动由无限多个平面波的富里叶分量迭加组成，其中每个平面波具有不同的波数k，并以频率$\sigma(k)$振荡。如(3.24.12)所指出，此频率等于该波数的平面波的罗斯贝波频。每个富里叶波型的振幅$A_n(k)$完全由初始条件(3.24.8)式确定。例如，考虑初始扰动

$$\Psi_n(x)=\frac{1}{2^{1/2}x_0}e^{-(x/x_0)^2}e^{ik_0x} \tag{3.24.16a}$$

（式中，隐含地取了实部），即特征空间范围是x_0，空间周期是$2\pi/k_0$的扰动．如果$k_0x_0\gg1$，那末至少在开始时，这扰动看上去象一个波包。(3.24.16a)的富里叶变换是

$$A_n(k)=\frac{e^{-x_0^2(k-k_0)^2/4}}{2}. \tag{3.24.16b}$$

若$k_0x_0\gg1$，$A_n(k)$的谱（即$A_n(k)$对k的扰动）在$k=k_0$附近很陡。也就是说，缓变的波包是如图3.24.2所示的、位于中心波数$k=k_0$附近的波动的迭加——即在k空间中的特征宽度与空间范围x_0成倒数的分布。于是，波包在x方向上越宽，则k空间上的谱越窄。对于适合于缓变波包的非常窄的谱，除了k在k_0附近以外，$A_n(k)$均为零，故对(3.24.15)式的估值来说，只要考虑k_0附近的$\sigma(k)$的形式即可，

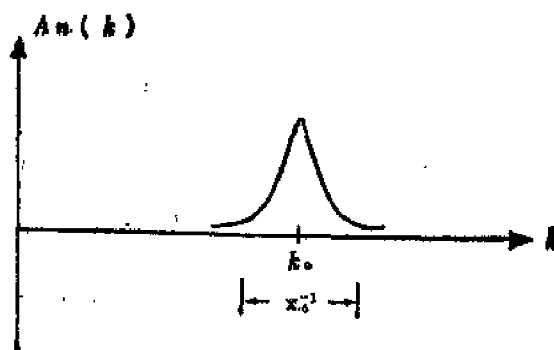


图3.24.2 波包的谱。当波包长度x_0增加时，谱也变陡。

$$\sigma(k)=\sigma(k_0)+\left(\frac{\partial\sigma}{\partial k}\right)_{k=k_0}(k-k_0)+\cdots\cdots,\tag{3.24.17}$$

所以

$$\begin{aligned}\phi_n(x,t)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}A_n(k)e^{i(k_0x-\sigma(k_0)t)}\times\exp\left\{i\left[x-\left(\frac{\partial\sigma}{\partial k}\right)_{k_0}t\right](k-k_0)\right\}dk\\&=\frac{e^{i(k_0x-\sigma(k_0)t)}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}A_n(k)\times\exp\left\{i\left[x-\left(\frac{\partial\sigma}{\partial k}\right)_{k_0}t\right](k-k_0)\right\}dk\\&=e^{i(k_0x-\sigma(k_0)t)}\Phi_n(x-C_{gx}(k_0)t),\end{aligned}\tag{3.24.18}$$

其中$\Phi_n(x)$是初始时刻包络的形状。这就是以前曾推导过的缓变波包的传播公式。

本节中我们所关心的是另一种情形，即初始扰动在x方向上局部很陡，故$A_n(k)$的谱很clear的情形。在这种情况下，近似关系式(3.24.17)和(3.24.18)是全然不适用的，因为必须考虑散布很宽的许多波数的贡献。在基本上保证不失一般性的前提下，我们可以假定初条件是x的偶函数，即关于$x=0$对称的函数。

在扰动开始产生的短时间内，运动的形式取决于扰动的初始形式之特殊性质。这当然是任意的，所以(3.24.15)式对短的时间t的解（可以用按时间作泰勒级数展开的方法计算）不能揭示波动的动力学实质。另一方面，对于长的时间t，可以预料能量会分布在一个比源大的区域上。所以，经过足够长的时间以后，固有的波动传播动力学性质才变得明显。因此我们将考察(3.24.15)式在x和t均很大时的渐近形式。使用的方法是驻位相方法，在此我们只是启发性地描述一下这种方法。为了得到更严格的推导，读者可参阅更标准的教科书[1]。基本思路是注意在$t\to\infty$而x/t固定时，(3.24.15)式中指数位相是k的速变函数，即对于大的t，

$$\theta=tq(k)=t\left[\left(\frac{x}{t}\right)k-\sigma(k)\right]\tag{3.24.19}$$

对于k的任何小增量变化很大：

$$\frac{\partial\theta}{\partial k}=t\frac{\partial q}{\partial k}=t\left[\frac{x}{t}-\frac{\partial\sigma}{\partial k}\right],\tag{3.24.20}$$

（1） Jeffreys和Jeffreys(1962)书中有特别清楚的讨论。

所以 $e^{itq(k)}$ 的实部与虚部在正值与负值之间很快地振荡，且当 t 增加时，振荡越来越快，直到最后对于很大的 t，某个 k 值处积分之贡献将被 k 的相邻值处的积分所抵消为止（后者的位相已相差了 180°），这是因为光滑函数 $A_n(k)$ 对上述两个相邻的 k 值几乎一样。上述性质几乎出现在 k 的整个区间上，只有在一些特殊点 k_s 附近例外。在这些点 k_s 处，k 的增量并不引起 q 的增加，即在那些 $\partial q/\partial k$ 为零的驻位相点上是例外的。这些驻位相点出现在

$$\frac{x}{t}=\frac{\partial\sigma}{\partial k}(k_s). \tag{3.24.21}$$

因此，对(3.24.15)式中积分的主要贡献出现在所有满足(3.24.21)式的那些k值附近。这件事本身有一个简单的解释。在 $t\gg1$ 时，x 点处对 $\phi(x,t)$ 的主要贡献来自原来谱中的那些群速度使扰动在时间 t 内传播距离 x 的波数。于是(3.24.21)式可以对这样的点 k_s 求解，即(3.24.21)式可以反解得到：

$$k_s=k_s\left(\frac{x}{t}\right). \tag{3.24.22}$$

假定 $\psi_n(x)$ 是 x 的偶函数，因为由(3.24.8)式

$$A_n(-k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ikx}\psi_n(x)dx, \tag{3.24.23}$$

故 $A_n(x)$ 也是k的偶函数。令 $x=-\xi$，作为积分的哑变量给出

$$\begin{aligned}A_n(-k)&=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{+\infty}^{-\infty}e^{-ik\xi}\psi_n(-\xi)d\xi=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ik\xi}\psi_n(\xi)d\xi\\&=A_n(k)\ ,\end{aligned} \tag{3.24.24}$$

式中用到 $\psi_n(\xi)$ 为偶函数的性质，即

$$\psi_n(\xi)=\psi_n(-\xi). \tag{3.24.25}$$

这又意味着，(3.24.15)式可用k在区间$(0,\infty)$上的积分表示，即，因 $A_n(k)$ 是 k 的偶函数，

$$\begin{aligned}\phi_n(x,t)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}A_n(k)\cos(kx-\sigma(k)t)dk\\&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}A_n(k)\cos(kx-\sigma(k)t)dk\\&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}Re\int_0^{\infty}A_n(k)e^{i(kx-\sigma(k)t)}dk.\end{aligned} \tag{3.24.26}$$

所以在估计(3.24.26)式时，只需考虑是(3.24.21)式的解的那些正 k 值[1]。

在对(3.24.26)式有贡献的 $k=k_s$ 附近的小区间上，

$$\sigma(k)=\sigma(k_s)+\frac{\partial\sigma}{\partial k}(k_s)(k-k_s)+\frac{\partial^2\sigma}{\partial k^2}(k_s)\frac{(k-k_s)^2}{2}+\cdots\cdots, \tag{3.24.27}$$

所以，

$$kx-\sigma(k)t=[k_sx-\sigma(k_s)t]+t\left[x-\frac{\partial\sigma}{\partial k}(k_s)t\right](k-k_s)$$

---

(1) 如果 $\Psi_n(x)$ 是x的奇函数，则 $A_n(k)$ 也是k的奇函数，积分也可以写为(3.24.26)式的形式，其中保留的是所得结果之虚部而不是实部。因为任何函数均可表示为偶函数与奇函数之和，所以这里提出的分析可直接应用于普遍情况。

$$-t\frac{\partial^2\sigma}{\partial k^2}(k_s)\frac{(k-k_s)^2}{2}+\cdots\cdots , \tag{3.24.28}$$

根据(3.24.21)式，其第二项（即 $k-k_s$ 的线性项）应等于零。所以对于很大的 t，(3.24.26)式近似地为

$$\phi_n(x,t)=R_e\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{k_s-\Delta}^{k_s+\Delta}A_n(k_s)e^{i(k_s x-\sigma(k_s)t)}$$

$$\times\exp\left(-it\frac{\partial^2\sigma}{\partial k^2}(k_s)\frac{(k-k_s)^2}{2}\right)dk$$

$$=R_e\sqrt{\frac{2}{\pi}}A_n(k_s)e^{i(k_s x-\sigma(k_s)t)}$$

$$\times\int_{k_s-\Delta}^{k_s+\Delta}\exp\left(-it\frac{\partial^2\sigma}{\partial k^2}(k_s)\frac{(k-k_s)^2}{2}\right)dk . \tag{3.24.29}$$

我们已利用了这样一个事实，即在 k_s 附近的小区间 2Δ 上 $A_n(k)$ 是光滑函数，故 $A_n(k)$ 可以相当近似地由它的中值 $A_n(k_s)$ 来代替。只要 Δ 很小，所得结果与区间 Δ 的精确大小无关。

引进

$$\alpha=(k-k_s)\left\{\frac{t}{2}\left|\frac{\partial^2\sigma}{\partial k^2}(k_s)\right|\right\}^{1/2}, \tag{3.24.30}$$

借助此式，(3.24.29)式变成

$$\phi_n(x,t)\approx Re\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{A_n(k_s)e^{i(k_s x-\sigma(k_s)t)}}{\left(t\left|\frac{\partial^2\sigma}{\partial k^2}(k_s)\right|\right)^{1/2}}\times\int_{-\alpha_s}^{\alpha_s}\exp\left[-i\alpha^2\,\mathrm{sgn}\frac{\partial^2\sigma}{\partial k^2}(k_s)\right]d\alpha , \tag{3.24.31}$$

式中

$$\mathrm{sgn}\frac{\partial^2\sigma}{\partial k^2}(k_s)=\begin{cases}+1, & 若\frac{\partial^2\sigma}{\partial k^2}(k_s)>0,\\ -1, & 若\frac{\partial^2\sigma}{\partial k^2}(k_s)<0,\end{cases} \tag{3.24.32}$$

及

$$\alpha_s=\Delta\left\{\frac{t}{2}\left|\frac{\partial^2\sigma}{\partial k^2}(k_s)\right|\right\}^{1/2} . \tag{3.24.33}$$

当 $t\to\infty$ 时，$\alpha_s\to\infty$，故(3.24.31)式的积分变为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-i\alpha^2\,\mathrm{sgn}\frac{\partial^2\sigma}{\partial k^2}(k_s)\right\}d\alpha=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(1-i\,\mathrm{sgn}\frac{\partial^2\sigma}{\partial k^2}(k_s)\right)$$

$$=\sqrt{\pi}\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\,\mathrm{sgn}\frac{\partial^2\sigma}{\partial k^2}(k_s)\right), \tag{3.24.34}$$

所以

$$\phi_n(x,t)=2R_eA_n(k_s)\frac{e^{i(k_s x-\sigma(k_s)t)}}{\left(t\left|\frac{\partial^2\sigma}{\partial k^2}(k_s)\right|\right)^{1/2}}\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\,\mathrm{sgn}\frac{\partial^2\sigma}{\partial k^2}(k_s)\right).$$

类似于推导(3.24.24)式时所做的那种论证说明，由于 $A_n(k)$是 x 的偶函数，故它一定是实函数。对于所有满足(3.24.21)式的 $k_s>0$ 求和，得到 $\phi_n(x,t)$的最后的渐近表达式：

$$\boxed{\begin{aligned}\phi_n(x,t)\approx\sum_{k_s}&\frac{2A_n(k_s)}{\left(t\left|\dfrac{\partial^2\sigma}{\partial k^2}(k_s)\right|\right)^{1/2}}\\&\times\cos\left(k_s x-\sigma(k_s)t-\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}\frac{\partial^2\sigma}{\partial k^2}(k_s)\right)\end{aligned}}. \tag{3.24.35}$$

可以证明，用(3.24.35)式来逼近(3.24.15)式时产生的误差是$O(t^{-1})$。因此时间越长，这一近似越好。

解答(3.24.35)似乎具有波振幅呈 $t^{-1/2}$ 缓慢衰减的平面波之形式。这多少有些误解，因为我们根据(3.24.22)式得知，k_s（从而 $\sigma(k_s)$）是 x/t 的相当复杂的函数。不管怎么说，如果适当作解释的话，这一最初印象基本上正确。ϕ_n 振荡部分的波位相中之可变部分是

$$\theta(x,t)=k_s x-\sigma(k_s)t. \tag{3.24.36}$$

θ 随 x 的增长率，与(3.8.3)式类似，它正是局部波数 k。但因为根据(3.24.21)式有

$$k=\frac{\partial\theta}{\partial x}=k_s+\left(x-t\frac{\partial\sigma(k_s)}{\partial k_s}\right)\frac{\partial k_s}{\partial x}=k_s(x,t), \tag{3.24.37}$$

所以现在 k 是空间和时间的函数。只有对一个从原点向外，并以对应于那个波数的群速度运动的观察者来说，波数才将表现为常数。静止的观察者或以其他速度运动的观察者，都将看到一种波长随时间改变的振荡。

类似地，根据(3.24.36)式，局部频率为

$$\sigma=-\frac{\partial\theta}{\partial t}=-\left(x-t\frac{\partial\sigma}{\partial k_s}(k_s)\right)\frac{\partial k_s}{\partial t}+\sigma(k_s). \tag{3.24.38a}$$

对于一个以相对于波数 k_s 的群速度运动的观察者来说，这意味着

$$\sigma=\sigma(k_s), \tag{3.24.38b}$$

式中 $\sigma(k_s)$是 k_s 处的频率，由平面波的频散关系式(3.24.12)确定。局部相速度（即特定波峰前进的速率）为

$$C=\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{\theta}=\frac{\sigma(k_s)}{k_s}. \tag{3.24.39}$$

因为 k 仅对以 $C_g(k_s)$移动的观察者来说，才是常数，而且对象罗斯贝波这样的频散波有$C\neq C_g$，所以跟随特定波长的波一起前进的观察会看到不同的波峰滑过。想随特定波峰运动的观察者，必须以不同于 C_g 的相速 C 的局部值运动。所以随给定波峰运动的观察者将会看到波长随时间变化（从而相速 C 也随时间变化）的波动。于是，跟随特定波长的扰动之位置前进的观察者，以群速度匀速运动，而想跟随特定波峰运动的观察者则必须加速或减速，这是由于载波峰的波动之波长随时间变化所造成的。由(3.24.37)式和(3.24.38)式，得

$$\frac{\partial k_s}{\partial t}+\frac{\partial\sigma_s}{\partial x}=0. \tag{3.24.40}$$

由于 k_s 是单位长度上完整波动的数目，而 $\sigma(k_s)$是任意特定位相（如波峰）通过固定观测点的频率，故(3.24.40)式意味着，扰动传播时，即使不同波长的波峰之间的距离随时间改变

(因其相速C随波长变化)，但波列(3.24.35)中的峰数是不变的，然而正是波列的这一频散关系使得峰数守恒。因 σ_s 只是通过 k_s 而成为 x 的函数，故从(3.24.40)式得到

$$\frac{\partial k_s}{\partial t}+\left\{\frac{\partial \sigma(k_s)}{\partial k_s}\right\}\frac{\partial k_s}{\partial x}=0 \quad , \tag{3.24.41a}$$

及

$$\frac{\partial \sigma(k_s)}{\partial t}+\frac{\partial \sigma(k_s)}{\partial k_s}\frac{\partial \sigma}{\partial x}=0 \, . \tag{3.24.41b}$$

这是曾经导出过的波长和频率以群速度传播这一事实的数学表述。

现在考虑 $x=x_s$ 和 $x=x_s+\Delta x_s$ 处两个间隔很近的平面之间的波动能量。设每个点均以 t 时刻相应于该点处波数的群速度运动。若 Δx_s 很小，波动之波长在 Δx_s 内显然不变，那末(3.21.8)式可局部地用来计算能量密度。注意到波振幅 A 在这里是

$$\frac{2A_n}{\left(t\left|\frac{\partial^2\sigma}{\partial k^2}(k_s)\right|\right)^{1/2}} ,$$

我们得到 x 方向宽为 Δx_s，y 方向单位长度的条状面积上的能量是

$$E(x_s,t)=\frac{(k_s^2+a^2)A_n^2(k_s)}{t\left|\frac{\partial^2\sigma}{\partial k^2}\right|}\frac{\Delta x_s}{2} . \tag{3.24.42}$$

在 t 时刻，x_s 点对应于由(3.24.21)式给出的波数 k_s，所以在同一时刻 t，邻点间的距离可以写为：

$$\Delta x_s=t\left|\frac{\partial^2\sigma}{\partial k^2}\right|\Delta k_s \quad , \tag{3.24.43}$$

其中绝对值符号使我们对于 k_s 的正增量将能考虑一个正区间Δx_s。在$\Delta k_s\to 0$ 的极限情况下，宽度为 dx_s 的条状面积元上的总能量是

$$E(x_s,t)dx_s=\frac{1}{2}(k_s^2+a^2)A_n^2(k_s)dk_s , \tag{3.24.44a}$$

而且当该面积保持k_s不变而离开原点运动时，即以适合于 $k=k_s$ 的群速度运动时，该总能量不变。在初始时刻波动场的总能量是

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_0^1 dy\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2+F\psi^2\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}dx\left\{\left(\frac{\partial\phi_n}{\partial x}\right)^2+a^2(\phi_n)^2\right\}. \tag{3.24.44b}$$

由于根据帕塞瓦定理有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi_n^2dx=\int_{-\infty}^{\infty}|\tilde{\phi}_n(k)|^2dk ,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial\phi_n}{\partial x}\right)^2dx=\int_{-\infty}^{\infty}k^2|\tilde{\phi}_n(k)|^2dk ,$$

所以在 $t=0$ 时的总能量是

$$\int_{0}^{\infty}\frac{k^{2}+a^{2}}{2}A_{n}^{2}(k)dk=\int_{-\infty}^{\infty}E(x)dx, \tag{3.24.45}$$

该式和(3.24.44a)的物理意义如下。在初始时刻，总能量位于原点附近，根据(3.24.45)式，这一总能量可视为无穷多能量束之和（每个能量束是振幅为 $A_n(k)$ 的一个波包）。随着时间的推移，每个波束以包络波数 k_s 所确定的群速度从原点向外运动。在从原点向外运动的过程中，每一波束保持其频率和波数不变，但它的物理长度随时间逐渐线性伸长。既然每个波束的能量不变，那末为了补偿波速因 C_g 从束的一端到另一端的轻微变化所引起的空间频散，波振幅必须以 $t^{-1/2}$ 减小。个别波峰因 $C(k)\neq C(k_s)$ 而从一个波束滑移到另一个波束，所以由相继的波束所构成的波列之形状随时间而改变。

具有最大群速度的波束将大大超越其他波束。余下的波束最终将拉伸到一条线上，最快的波束在其前列，而较慢的波束落在后面。

对于罗斯贝波，k_s 必须满足

$$\frac{x}{t}=C_{gx}(k_s)=\beta\frac{k_s^2-a^2}{(k_s^2+a^2)^2}. \tag{3.24.46}$$

参看前面图 3.19.2 可知，对于 $x>\beta t/8a^2$，k_s 不可能有解；对于 $x<-\beta t/a^2$ 的情形，k_s 也

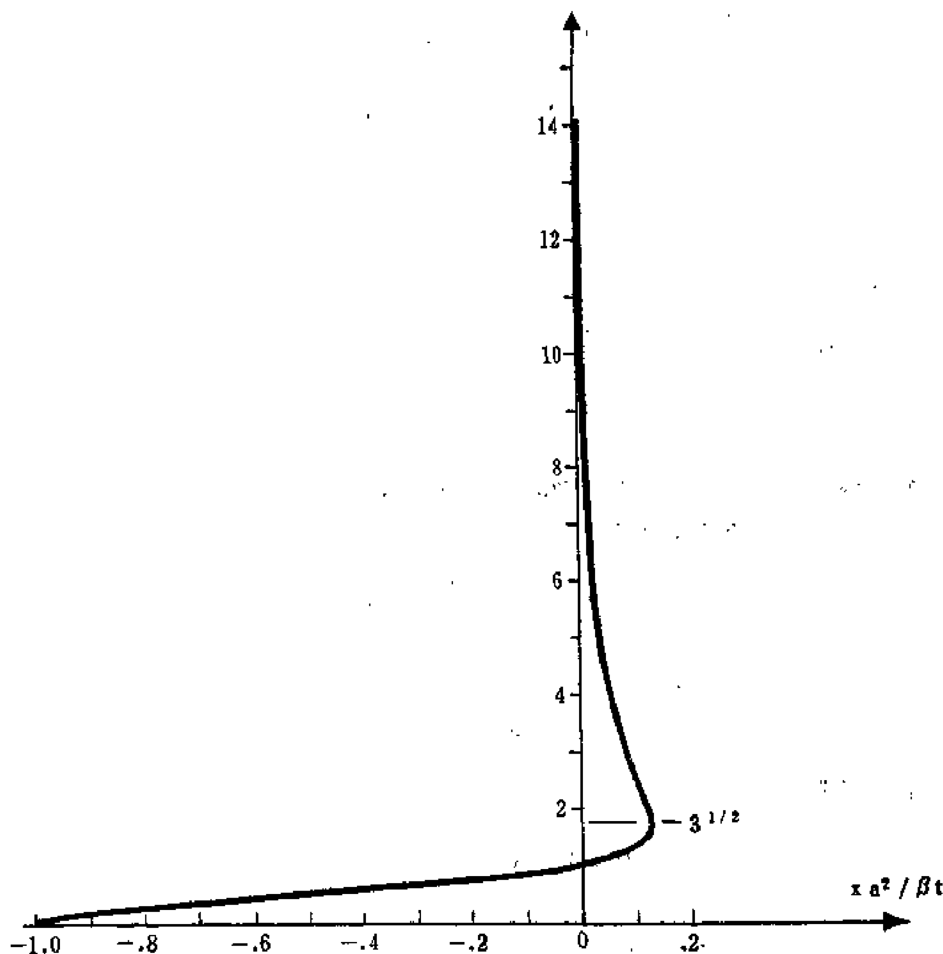


图3.24.3　作为距扰动原点之距离的函数的驻位相波数。注意当 $x>0$ 时，对任意 $xa^2/\beta t<0.125$ 有两个 k_s 值。

无解。仅当 x 在区间 $(-(\beta/a^2)t,\ \beta t/8a^2)$ 内才有解，这一区间对应于分别具有最大负、正群速度的波束的横跨的区间。在这一级近似上，该区间以外的流体仍处于未受扰动的状态。在该区间以内，所出现的波数是(3.24.46)式的解，如图3.24.3所示。注意，$k_s<a=(n^2\pi^2+F)^{1/2}$ 的长波在初始扰动左边（西边）的负 x 处，而短波($k_s>a$)在初始扰动东边的正 x 处。当 $-\beta t/a^2<x<0$ 时，对应每一个 x 能找到一个波长，但当 $x>0$ 时，在每一个 x 处有两个波长：位于波数区间 $1\leqslant k_s\leqslant\sqrt{3}$ 的中尺度波带和波数 $k_s>\sqrt{3}$ 的短波带。波扰动从原点向西扩展的距离是向东扩展距离的八倍。由(3.24.46)式得

$$\frac{k_s}{a}=\left[\frac{1}{2\xi}-1\pm\frac{(1-8\xi)^{1/2}}{2\xi}\right]^{1/2}, \tag{3.24.47}$$

其中

$$\xi=\frac{x}{t}\frac{a^2}{\beta}. \tag{3.24.48}$$

对于固定的 x，当 t 增加时 ξ 变小，所以在固定点 x 处，对于大的 t，根号下的展开式给出两个解：

$$\frac{k_s}{a}=1,$$

或

$$\frac{k_s}{a}=\xi^{-1/2}, \tag{3.24.49}$$

相当于移动最慢的波包。后一个解，显然仅当 $x>0$ 时才成立。无论 x 为正还是为负，第一个解给出对 $\phi_n(x,t)$ 的贡献，它为

$$\phi_n^{(1)}=\frac{2A_n(a)}{(t\beta/2a^3)^{1/2}}\cos\left(ax+\frac{\beta t}{2a}-\frac{\pi}{4}\right), \tag{3.24.50}$$

而对于 $x>0$，还必须附加的贡献是

$$\phi_n^{(2)}=2^{1/2}A_n\left(\left(\frac{\beta t}{x}\right)^{1/2}\right)\frac{(\beta t)^{1/4}}{x^{3/4}}\cos\left[2(\beta xt)^{1/2}+\frac{\pi}{4}\right]. \tag{3.24.51}$$

当然，每一部分贡献的大小依赖于初始条件，即 $A_n(k)$ 谱的形状。如果谱是平的，以至 A_n 与 k 无关（这相当于 x 方向初始扰动是极端局部化的），则最后当 $t\to\infty$ 时，任意固定 x 处的主要扰动将由（3.24.51）式给出。在 $k\to\infty$ 时 $A_n(k)\to 0$ 的较为真实的情形中，主要项由(3.24.50)式给出，在这种情况下被波列留在后面的扰动，总是一个波长为 $2\pi/a$(对此波长 C_g 为零）的振荡。

对于那些使得

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial k^2}=\frac{\partial C_{gx}}{\partial k}=\frac{2\beta k(3a^2-k^2)}{(k^2+a^2)^3}=0 \tag{3.24.52}$$

的波数，上述近似显然失效，因为此时(3.24.35)式的分母为零。$C_g(k)$ 的这些极值肯定是很重要的，因为它们恰好对应于波列前峰（即具有最大群速度的能束）处的扰动。因为对于此能束 $\partial^2\sigma/\partial k^2$ 为零，(3.24.43)式表明该能束随时间的伸长是小量，所以有理由预料振幅减小得比 $t^{-1/2}$ 慢。这就是(3.24.35)式失效的原因。更确切地说，在群速度极大值的附近

（如在 $k=k_m$ 处），有必要回到(3.24.26)式，并把位相 θ 写为

$$\theta=kx-\sigma(k)t=k_m x-\sigma(k_m)t+[x-C_g(k_m)t](k-k_m)$$
$$-\frac{\partial C_g}{\partial k}(k_m)\frac{(k-k_m)^2}{2}t-t\frac{\partial^2 C_g}{\partial k^2}\frac{(k-k_m)^3}{6}+\cdots\cdots \ . \qquad (3.24.53)$$

因$(\partial C_g/\partial k)(k_m)$为零，故 k_m 附近的波数带对 $\phi_n(x,t)$的贡献是 I 的实部，而 I 为

$$I=\sqrt{\frac{2}{\pi}}A_n e^{i(k_m x-\sigma(k_m)t)}$$
$$\times\int_{k_m-\Delta}^{k_m+\Delta}dk\exp i\left[x-C_g t(k-k_m)-\frac{C_g''}{6}(k-k_m)^3 t\right], \qquad (3.24.54)$$

对于大的 t，式中积分限和以前一样可趋于正负无穷。在这里我们要用到积分关系式

$$\int_0^{\infty}\cos(ak^3+bk)dk=\frac{\pi}{(3a)^{1/3}}A_i((3a)^{-1/3}b) \ . \qquad (3.24.55)$$

$Ai(x)$是满足微分方程

$$\frac{d^2Ai}{dx^2}-xA_i=0 \qquad (3.24.56)$$

的，已制成表的艾里函数(Airy function)。

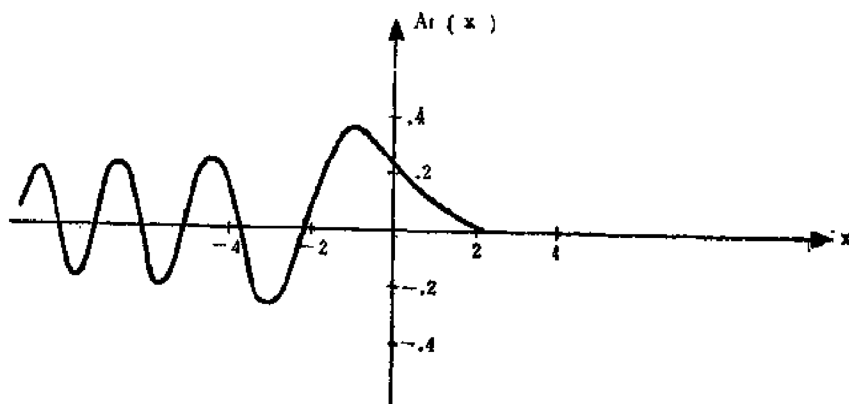


图3.24.4 艾里函数$Ai(x)$

图 3.24.4 给出 $A_i(x)$的略图。用 A_i 来表示，波列前沿附近的扰动即为

$$\phi_n(x,t)=2^{1/2}\pi^{1/2}\frac{A_n(k_m)}{|C_g''(k_m(t/2))|^{1/3}}\cos[k_m x-\sigma(k_m)t]$$
$$\times A_i\left(\frac{x-C_g(k_m)t}{|C_g''(k_m)t/2|^{1/3}}\right), \qquad (3.24.57)$$

式中

$$C_g''(k_m)=\frac{\partial^2 C_g}{\partial k^2}(k_m).$$

如图 3.24.4 所示，艾里函数对正辐角呈指数衰减，对负辐角呈振荡状。实际上这一点也可从(3.24.56)式在 x 为正和为负时的特性推断出来。所以在点 $x=C_g(k_m)t$ 之前，扰动是短暂且衰减的，而在此前沿之后，扰动呈波状。因此在受扰流体与未受扰流体之间的前沿

处的过渡，是平缓的，而不是突然的。由于 $\phi_n(x,t)$ 在前沿上随时间呈 $t^{-1/3}$ 的衰减，因此，

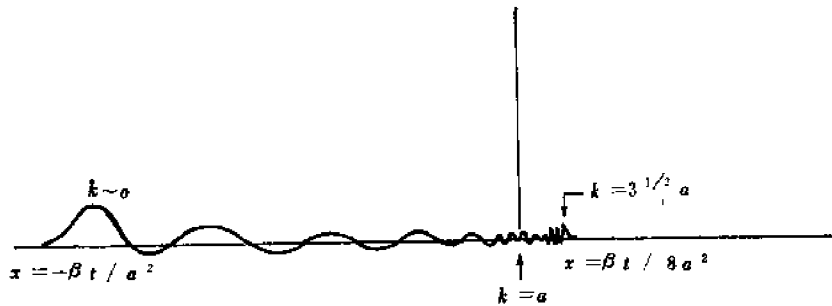


图3.24.5 说明对于大的 t 扰动之渐近分布的示意图。

除非 $A_n(k_m)$ 偶然很小，否则前沿处的振幅有支配波列振幅的趋势。把我们所得到的定性图像并合在一起的波列示意图，可用图 3.24.5 来表示。注意，对于 $x>0$，$k_m=3^{1/2}a$；而对于 $x<0$，$k_m=0$。

3.25 闭区域中的准地转标准波型

到现在为止，我们只考虑了至少在一个方向上是开区域的、由环境位涡梯度维持的波动动力学。当扰动尺度远小于闭区域的尺度、且扰动必须经过很长时间才能到达区域的边界时，上述考虑自然是理想的模式。然而，对于象海洋这样的闭区域，强迫作用（如风应力）的尺度相当大，以至于使边界的影响成为支配的因素。在这种情况下，利用振荡的标准波型，可以对依时变化的强迫作用之响应作最方便的讨论。

让我们来设想如图3.25.1所示的 β 平面上的一个闭曲域。用于小振幅振荡的控制方程是位涡方程的线性化形式，即

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\nabla^2\psi-F\psi\}+\beta\frac{\partial\psi}{\partial x}=0\,. \qquad (3.25.1)$$

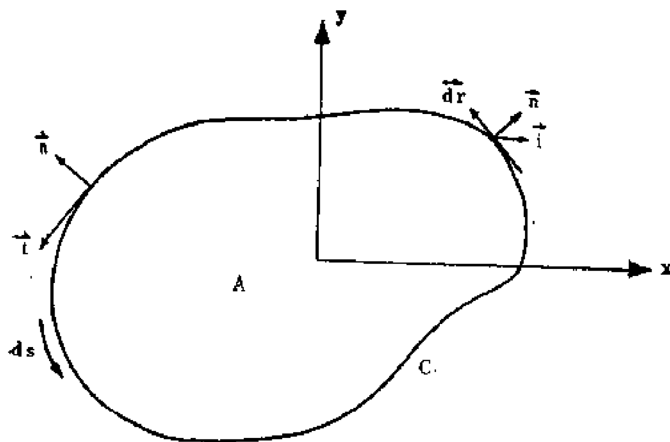


图3.25.1 用以计算准地转自由振荡波的、以 C 为边界的区域 A。矢量 $\mathbf{n}$ 垂直于 C，$\mathbf{t}$ 是 C 的切向矢量，$\mathbf{i}$ 是 x 方向的单位矢量。

必须谨慎地使用边界条件。因为 $O(1)$ 的速度场 (u_0,v_0) 是与流线相切的矢量，要在罗斯贝数为 $O(1)$ 时满足区域边界处法向速度为零的条件，可以规定边界 C 与一条流线重合，即在 C 上 ψ 为常数，或

$$\text{在 } C \text{ 上}，\quad \psi=\Gamma_0， \qquad (3.25.2)$$

式中 Γ_0 可以只是时间的函数。

尽管对 ψ 附加上一个空间常数并不影响对速度的计算，但 ψ 也是 $O(1)$ 自由面偏差 η_0 的事实，意味着 Γ_0 是与沿边界处的流体深度有关的一个非零常数，而且它不是任意的。如果 ψ 沿边

界只是呈正弦形(象已讨论过的通道模式中的情况)，那末 ψ 为常数的条件，意味着 $\Gamma_0=0$。在即将讨论的例子中，运动沿边界不需要恰好是（实际上也不是）周期性的，因而必须确定 Γ_0。

在 3.5 节中我们已经证明过，由于在闭边界上法向速度为零，所以在 C 上，

$$\frac{\partial}{\partial t}\oint_c \mathbf{u}_H\cdot d\mathbf{r}=0\ . \tag{3.25.3}$$

这一约束关系式对各阶罗斯贝数均成立。对最低阶罗斯贝数，由于

$$\mathbf{u}_0=\mathbf{i}u_0+\mathbf{j}v_0=\mathbf{k}\times\nabla\psi, \tag{3.25.4}$$

故上述关系意味着

$$\oint_c (\mathbf{k}\times\nabla\psi)\cdot d\mathbf{r}=\oint_c (\mathbf{k}\times\nabla\psi)\cdot\mathbf{t}ds=0, \tag{3.25.5}$$

式中 $\mathbf{t}$ 是与 C 相切的单位矢量，而 ds 是沿 C 的标量微分线元。因

$$\mathbf{t}=\mathbf{k}\times\mathbf{n}, \tag{3.25.6}$$

故(3.25.3)式表示

$$\frac{\partial}{\partial t}\oint_c (\nabla\psi\cdot\mathbf{n})ds=0. \tag{3.25.7}$$

把(3.25.3)和(3.25.5)与(3.12.9a、b)式相比较说明，(3.25.3)式应用到最低阶速度场时，等价于速度的 $O(\varepsilon)$ 阶修正量在边界上也为零的条件。一般(3.25.7)式与 ψ 在边界上为常数的条件无关。注意，正如上面所指出的，如果 ψ 在 C 上是周期性的，则(3.25.7)式无疑是明显满足的。所以当 Γ_0 是一个有意义的未定常数时，(3.25.7)式是非平凡条件，且可用来确定 Γ_0，但是 3.5 节中还有另一个约束关系式，即

$$\frac{\partial}{\partial t}\iint_A dxdy\psi=0\ , \tag{3.25.8}$$

此式得自精确到 ε 最低阶的(3.5.8)式，而且也意味着在 C 上 $O(\varepsilon)$ 速度的法向分量为零。(3.25.8)、(3.25.7)和(3.25.2)式是独立的吗？如果是独立的，那末我们有的条件太多了，以至于无法确定 Γ_0。

考虑(3.25.1)式在该区域的面积 A 上的积分。使用散度定理得到

$$\frac{\partial}{\partial t}\oint_C (\nabla\psi\cdot\mathbf{n})ds=F\iint_A\frac{\partial\psi}{\partial t}dxdy-\beta\iint_A\frac{\partial\psi}{\partial x}dxdy\ . \tag{3.25.9}$$

如图 3.25.2 所示有

$$\iint_A\frac{\partial\psi}{\partial x}dxdy=\int_{y_L}^{y_u}dy[\psi(x_R,y)-\psi(x_L,y)]=0\ , \tag{3.25.10}$$

若应用(3.25.2)式，则该积分为零。因此，如果 ψ 在 C 上为常数，那末满足(3.25.8)式必然自动满足(3.25.2)式，反之亦真。所以二者均可用来确定 Γ_0。

其次，(3.25.9)式表明，在 $F\to 0$ 的极限情况下（这相当于区域的长度 L 远小于变形半径的情况），(3.25.7)式对任何常数 Γ_0 都是自动满足的。在此极限情况下，它有很好的物理意义，我们已经看到它等价于一个刚性盖近似（即上表面变形程度之确定对动力学是无关紧要的)。为了简单起见，我们首先考虑这一极限情况。基本概念并不受影响。故在此极限情况下，我们可任意令 Γ_0 等于零。

形如

$$\psi(x,y,t)=R_e e^{-i\sigma t}\Phi(x,y) \tag{3.25.11}$$

的振荡是(3.25.1)式的解，只要对 $F=0$ 有

$$\nabla^2\Phi+\frac{i\beta}{\sigma}\frac{\partial\Phi}{\partial x}=0 \quad . \tag{3.25.12}$$

对Φ作变换是有益的，旨在从(3.25.12)式中消去x的一阶偏导数项，为此令

$$\Phi=e^{-i\beta x/2\sigma}\phi(x,y). \tag{3.25.13}$$

把(3.25.13)式代入(3.25.12)式，可以看出ϕ必须满足

$$\nabla^2\phi+\lambda^2\phi=0\ , \tag{3.25.14}$$

这里 $\lambda^2=\beta^2/4\sigma^2$.

这个方程等价于膜振动的振幅方程，而在C上，$\phi=\Phi=0$的条件是指解在空间上等价于无穷多类固定膜波型。

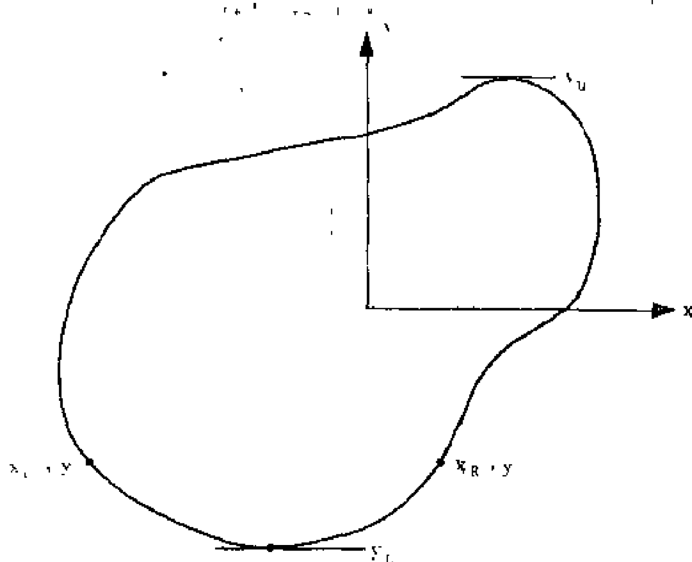


图3.25.2 点 x_R 和 x_L 确定区域对于每个 y 的 x 区间范围。点 y_u 和 y_L 确定该区域所占据的y方向上的最大区间。

例如，考虑一个矩形域：$0\leqslant x\leqslant x_0$，$0\leqslant y\leqslant y_0$，此时，集合

$$\phi=\phi_{mn}=\sin\frac{m\pi x}{x_0}\sin\frac{n\pi y}{y_0},\quad m=1,2,3,\cdots\cdots,\quad n=1,2,3,\cdots\cdots \tag{3.25.15a}$$

中的任何一个分量都满足边界条件和(3.25.14)式，只要σ等于相应的本征值，即

$$\sigma=\sigma_{mn}=-\frac{\beta}{2\pi\{(m^2/x_0^2)+(n^2/y_0^2)\}^{1/2}}. \tag{3.25.15b}$$

必须注意，最低波型（即m和n最小的波型）具有最高的频率，而尺度越小的波型振荡越慢。每个波型的形式是吸引人的。略去了一个任意位相的流函数是

$$\psi=\cos\left[\frac{\beta x}{2\sigma_{mn}}+\sigma_{mn}t\right]\sin m\pi\frac{x}{x_0}\ \sin n\pi\frac{y}{y_0}. \tag{3.25.16}$$

它由载波$\cos(\beta x/2\sigma_{mn}+\sigma_{mn}t)$组成，其位相传播总是向左（西），并受满足边条件的正弦函数的包络所调制。每个波型都有固定的和活动的波节，这些波节把运动分为许多环流(cell)，当载波的活动波节接近并通过一个固定波节时，每个环流的大小交替地减小和增加。向西传播的相速度是

$$C=-\frac{2\sigma_{mn}^2}{\beta}=-\frac{\beta}{2\pi^2\{(m^2/x_0^2)+(n^2/y_0^2)\}}. \tag{3.25.17}$$

对于最低波型 $m=n=1$，上述显著特性如图 3.25.3 所示。较高的波型具有更多的固定内波节，它们有类似的、但更复杂的涡旋运动的伸缩环流型。

每一个标准波型可以写为具有波矢量

$$\mathbf{K}=\mathbf{i}\left(\frac{\beta}{-2\sigma}\pm\frac{m\pi}{x_0}\right)+\mathbf{j}\left(\pm\frac{n\pi}{y_0}\right)=\mathbf{i}k+\mathbf{j}l \tag{3.25.18}$$

的四个罗斯贝平面波之和。容易证明，每个波矢量都满足平面罗斯贝波的频散关系式：

$$\sigma=-\frac{\beta k}{k^2+l^2}. \tag{3.25.19}$$

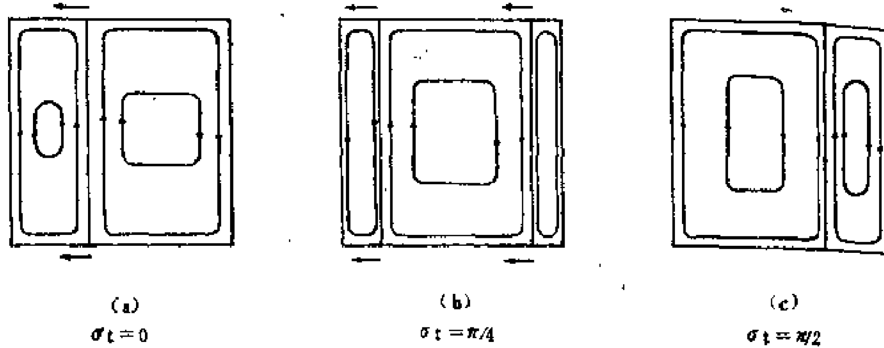


图3.25.3　矩形域中的第一个标准波型。注意在该振荡型上，位相向负 x 方向传播。

图 3.25.4 表明频率圆（对 $F=0$）上的四个平面波。

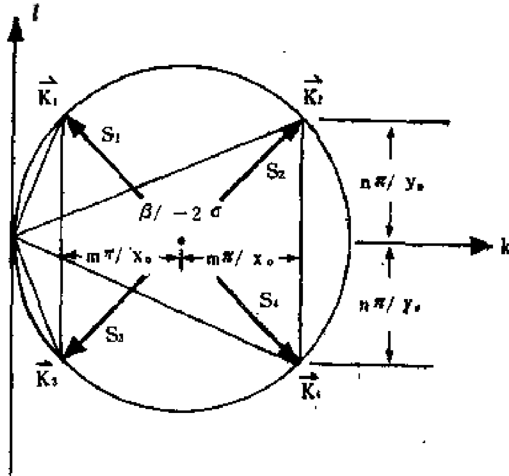


图3.25.4　罗斯贝标准波型在能量传播图上的表示，该波型是四个能通量相加为零的平面波之和。

由图上可明显地看出，在区域的每个点上，净的能通量矢量恒等于零，这是因为四个能通量矢量相加为零。即使位相在该区域中自东向西传播，但在每个波型中并没有能量从区域的一部分向另一部分传播。

其他形状区域的标准波型也有同样的性质，即向西传播的载波受定常包络的调节，该包络的节线是固定的，且由(3.24.14)式的膜波型所确定。例如，对于半径为单位长的圆形域有

$$\psi_{mn}=\cos(m\theta+\alpha)J_m(k_{mn}r)\times e^{-i(\beta x/2\sigma_{mn}+\sigma_{mn}t)}, \tag{3.25.20}$$

式中 r 和 θ 是通常的极坐标，J_m 是 m 阶贝塞尔函数，

$$\sigma_{mn}=-\frac{\beta}{k_{mn}^2}\ ; \tag{3.25.21}$$

k_{mn} 是 J_m 的第 n 个零点，即

$$J_m(k_{mn})=0\ , \tag{3.25.22}$$

α 是任意位相角。固定波节是 $\cos(m\theta+\alpha)$ 为零的圆或是径向线。该图型又进一步被平行于 y 轴的载波之运动波节所分割。

F 不为零的标准波型问题相当复杂，我们仅简略地概述其分析方法，结果得到与上面讨

论的波型定性相似的区域波型。以下的处理方法，在很大程度上是根据 Flierl (1977) 的工作，他计算了圆形域中的标准波型。和以前一样，仍考虑形如

$$\psi = R_e e^{-i(\beta x/2\sigma+\sigma t)}\phi(x,y) \tag{3.25.23}$$

的解，其中 ϕ 满足

$$\nabla^2\phi + \left(\frac{\beta^2}{4\sigma^2} - F\right)\phi = 0 \quad . \tag{3.25.24}$$

(3.25.24)式关于 x 轴对称的解可以表示为如下的普遍形式：

$$\phi = \sum_{m=0}^{\infty}\phi_m \cos m\theta J_m(\lambda r) \quad , \tag{3.25.25}$$

式中

$$\lambda^2 = \frac{\beta^2}{4\sigma^2} - F \quad . \tag{3.25.26}$$

对于标准波型，条件(3.25.2)变为

$$\psi(r=1) = \Gamma_0 = \gamma_0 e^{-i\sigma t}, \tag{3.25.27a}$$

或者

$$\phi = \sum_{m=0}^{\infty} J_m(\lambda)\phi_m \cos m\theta = \gamma_0 e^{i(\beta/2\sigma)\cos\theta} . \tag{3.25.27b}$$

ϕ_m 由通常的富里叶积分确定，即

$$J_m(\lambda) r_m \pi \phi_m = \gamma_0 \int_0^{2\pi} \cos m\theta e^{i(\beta/2\sigma)\cos\theta} d\theta, \tag{3.25.28}$$

其中

$$r_m = \begin{cases} 2, & 若 m=0, \\ 1, & 若 m \geqslant 1. \end{cases} \tag{3.25.29}$$

利用贝塞尔函数的标准积分表达式，

$$J_n(z) = \frac{e^{-i\pi n/2}}{\pi}\int_0^{\pi} e^{iz\cos\theta}\cos n\theta d\theta, \tag{3.25.30}$$

可将(3.25.28)式写为

$$\phi_m = \gamma_0 \frac{2}{r_m} i^m \frac{J_m(\beta/2\sigma)}{J_m(\lambda)} \quad . \tag{3.25.31}$$

而条件(3.25.7)变成

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial\psi}{\partial r} d\theta = \int_0^{2\pi} e^{-i(\beta/2\sigma)\cos\theta} \frac{\partial\phi}{\partial r}(r=1) d\theta \\
&\quad - \frac{i\beta}{2\sigma}\int_0^{2\pi} \cos\theta e^{-i(\beta/2\sigma)\cos\theta}\phi(r=1) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} e^{-i(\beta/2\sigma)\cos\theta} \frac{\partial\phi}{\partial r}(r=1) d\theta - \frac{i\beta}{2\sigma}\gamma_0 \int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} e^{-i(\beta/2\sigma)\cos\theta} \frac{\partial\phi}{\partial r}(r=1) d\theta
\end{aligned}$$

$$= \int_0^{2\pi} 2\gamma_0 \sum_{m=0}^{\infty} \lambda \frac{1}{r_m} \frac{J_m(\beta/2\sigma)}{J_m(\lambda)} J'_m(\lambda) \cos m\theta \, e^{-i(\beta/2\sigma)\cos\theta} d\theta \tag{3.25.32}$$

把(3.25.30)式用于(3.25.32)式中，可以得到关于 σ 的本征关系式

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_m^2(\beta/2\sigma)}{r_m} \frac{J'_m(\lambda)}{J_m(\lambda)} = 0 \quad , \tag{3.25.33}$$

式中

$$J'_m(\lambda) = \frac{dJ_m(\lambda)}{d\lambda} . \tag{3.25.34}$$

注意，如果我们希望得到一个 $\gamma_0 = 0$ 的解，则由(3.25.11)式可知，除了 $m=M$（此时 $J_M(\lambda)$ 为零）外，所有的 ϕ_m 都为零。在那种情况下，(3.25.33)只含 $m=M$ 的一项，且是奇异的（除非 $\lambda=\beta/2\sigma$），这恰是 $F=0$ 的条件。故当 $F=0$ 时，(3.25.33)式将化为(3.25.22)式。当 $F\neq 0$ 时，频率与(3.25.21)式不同。然而，Flierl(1977)的详细计算表明，频移总小于 5%，波型的结构与(3.25.20)式类似，但有一个重要差别，即边界处的流体表面环绕区域一致地交替上升和下降。表 3.25.1 表明，$F\neq 0$ 时的频移是由于应用(3.25.27)式和(3.25.32)式、而不是应用波数最小的对称波型的错误条件 $\phi=0$ 所得到的。

(3.25.24)式对于 $y=0$ 的反对称解可表为以下形式：

$$\phi = \sum_{m=0}^{\infty} \phi_m \sin m\theta J_m(\lambda r) . \tag{3.25.35}$$

分析过程与前面一样，只要把 $\cos m\theta$ 全部换成 $\sin m\theta$ 即可。然而可以得出(3.25.28)现在为

$$J_m(\lambda) r_m \pi \phi_m = \gamma_0 \int_0^{2\pi} \sin m\theta \, e^{i(\beta/2\sigma)\cos\theta} d\theta \equiv 0 \quad , \tag{3.25.36}$$

表3.25.1

F	$\beta/2\sigma$ (a)	$\beta/2\sigma$ (b)
0.2	2.435	2.446
0.5	2.481	2.507
1	2.556	2.604
2	2.706	2.790
5	3.148	3.284
10	3.852	3.973
20	5.066	5.078
30	5.976	5.982
50	7.455	7.469

(a) 对最低阶对称波型使用正确的边界条件(3.25.33)的计算；
(b) 错误地把(3.25.27)应用于最低阶对称波型的频率计算。

所以，所有的 $\phi_m(m\neq M)$ 对于任意 γ_0 均可选为零，只要 λ 满足

$$J_M(\lambda) = 0 \; , \tag{3.25.37a}$$

于是

$$\lambda = k_m M \; ,$$

所以对于 $y=0$ 为反对称的波型之形状，恰好与 $F=0$ 的情况相同，而频率是

$$\sigma_{mn}=\frac{\beta}{k_{mn}^2+F},\tag{3.25.37b}$$

且仅因自由面变形而减小。留给读者验证形如

$$\psi=e^{-i(\beta x/2\sigma+\sigma t)}\sin m\theta J_m(k_{mn}r)\tag{3.25.38}$$

的反对称波型平凡满足(3.25.32)式。在海岸处反对称波型的振幅为零。由于 β 效应造成的动力学性质在空间上的各向异性，只有关于 $y=0$ 对称的波型在 $r=1$ 处才有非零的振幅，且对这些波型，关系式(3.25.7)才有意义。

对任意 F 和任意形状的区域，这些标准波型的正交条件可直接从 $\Phi=e^{i\sigma t}\psi$ 的方程得到。考虑对应于频率 σ_{kl} 和 σ_{mn} 的两个波型 Φ_{kl} 和 Φ_{mn}，则

$$\sigma_{kl}[\nabla^2\Phi_{kl}-F\Phi_{kl}]+i\beta\frac{\partial\Phi_{kl}}{\partial x}=0,\tag{3.25.39a}$$

而

$$\sigma_{mn}^*[\nabla^2\Phi_{mn}^*-F\Phi_{mn}^*]-i\beta\frac{\partial\Phi_{mn}^*}{\partial x}=0,\tag{3.25.39b}$$

式中*代表复共轭。第一个方程以 Φ_{mn}^* 乘之，而第二个方程以 Φ_{kl} 乘之，然后，在区域而积上积分后相减得

$$(\sigma_{kl}-\sigma_{mn}^*)\iint_A dxdy[\nabla\Phi_{kl}\cdot\nabla\Phi_{mn}^*+F\Phi_{kl}\Phi_{mn}^*]$$

$$=\sigma_{kl}\oint_C\Phi_{mn}^*\nabla\Phi_{kl}\cdot\mathbf{n}ds-\sigma_{mn}^*\oint_d\Phi_{kl}\nabla\Phi_{mn}^*\cdot\mathbf{n}ds$$

$$+i\beta\oint_C\mathbf{n}\cdot\mathbf{i}\Phi_{kl}\Phi_{mn}^*ds.\tag{3.25.40}$$

由于 Φ_{kl} 和 Φ_{mn} 在 C 上为常数，所以把(3.25.7) 式用于(3.25.40)式的右边项时，(3.25.7)式必须满足如下的正交条件：

$$(\sigma_{kl}-\sigma_{mn}^*)\iint_A[\nabla\Phi_{kl}\cdot\nabla\Phi_{mn}^*+F\Phi_{kl}\Phi_{mn}^*]dxdy=0\ .\tag{3.25.41}$$

如果我们选 Φ_{mn}^* 等于 Φ_{kl}^*——即若将(3.25.41)式用于单个波型上——可以得到

$$\sigma_{kl}=\sigma_{kl}^*,\tag{3.25.42}$$

故标准波型频率必须是实数。当然，这肯定是对的，否则指数因子 $e^{-i\sigma t}$ 将在无能源的情况下产生指数增长或衰减。实际上，(3.25.41)式用于单个波型恰好得出了能量守恒的表述。对于频率不同的两个波型，积分本身必须为零。

现在考虑一个任意初始扰动：

$$t=0\ ;\qquad \psi(x,y,t)=\psi(x,y).\tag{3.25.43}$$

在以后的时间里，ψ 可以表示成标准波型的线性组合，即

$$\psi(x,y,t)=\sum_{m,n}A_{mn}\Phi_{mn}(x,y)e^{-i\sigma_{mn}t},\tag{3.25.44}$$

这里意味着右端取实部。在 $t=0$ 时

$$\psi(x,y,o)=\Psi(x,y)=\sum_{m,n}A_{mn}\Phi_{mn}(x,y) . \tag{3.25.45}$$

因此得到

$$\iint_A dxdy[\nabla\Phi^*_{mn}\cdot\nabla\Psi+F\Phi^*_{mn}\Psi]=A_{mn}C_{mn}, \tag{3.25.46}$$

式中 C_{mn} 是波型标准化常数。

$$C_{mn}=\iint_A dxdy[|\nabla\Phi_{mn}|^2+F|\Phi_{mn}|^2] . \tag{3.25.47}$$

所以，A_{mn} 完全由初始条件在区域的每个标准波型上的投影确定，随后的运动只是所有的标准波型的迭加。

3.26 共振相互作用

虽然单个的任意振幅的平面罗斯贝波是准地转位涡方程的精确解，但波动的迭加却不是其解。波动之间的非线性相互作用（通过这种相互作用，一个波的速度场平流另一个波的涡度）,引起波动间的非线性耦合和能量输送。这一个非线性作用是由（3.15.1）式中的雅可比项来描写的。在最早的 β平面罗斯贝波的例子中，(3.15.1)式是

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi-F\psi)+\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\nabla^2\psi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\nabla^2\psi}{\partial x}+\beta\frac{\partial\psi}{\partial x}=0 . \tag{3.26.1}$$

本节旨在考察 $\beta\gg1$ 的情况下（即在最低阶上，罗斯贝波能够迭加的情况下），非线性相互作用的性质。当 $\beta\gg1$ 时，用有量纲单位表示的罗斯贝波的特征周期$(\beta_{oL})^{-1}$ 远小于平流时间 L/U，这里 U 是波动中流体元的特征速度。在此清楚地认识到这一事实，并借助新的无量纲时间 $\bar{t}$ 来重新规定有量纲时间 t_* 的尺度是很有用的，即令

$$t_*=(\beta_{oL})^{-1}\bar{t}=\frac{L}{U}t , \tag{3.26.2}$$

或者

$$\bar{t}=\frac{\beta_0L^2}{U}t=\beta t . \tag{3.26.3}$$

有了上述新定义，(3.26.1)式变为

$$\frac{\partial}{\partial\bar{t}}[\nabla^2\psi-F\psi]+\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{1}{\beta}\left[\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2\psi-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2\psi\right]. \tag{3.26.4}$$

（3.26.4）式中的非线性项，现在已明显地是 $O(\beta^{-1})$,这个量级是罗斯贝波周期与平流时间之比，也是相对涡度梯度和行星涡度梯度 β_0 之比。当该比值很小时，线性迭加的罗斯贝波在最初一段时间内描写运动是适宜的，但只要 β^{-1} 是有限量，波动之间的非线性相互作用将会出现。

对 $\beta\gg1$ 的情况，似乎有理由寻找如下形式的解：

$$\psi(x,y,\bar{t},\beta)=\psi_0(x,y,\bar{t})+\frac{1}{\beta}\psi_1(x,y,\bar{t})+\frac{1}{\beta^2}\psi_2(x,y,\bar{t})+\cdots\cdots , \tag{3.26.5}$$

把它代入(3.26.4)式，经过比较β^{-1}的同阶项，可以得到关于ψ_0、ψ_1等的一系列方程。ψ_0的最低阶或$O(1)$方程是

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi_0-F\psi_0)+\frac{\partial\psi_0}{\partial x}=0 \quad . \tag{3.26.6}$$

其解可以表示为罗斯贝波的一般迭加，即

$$\psi_0=\sum_j a_j\cos\theta_j, \tag{3.26.7}$$

其中对整数下标j求和的范围，按说是无穷大，但实际上在这里只有有限个振幅a_j不为零。每个波的位相是

$$\theta_j=k_jx+l_jy-\sigma_jt+\phi_j, \tag{3.26.8}$$

这里ϕ_j是任意相角，波数为$\mathbf{K}_j=\mathbf{i}k_j+\mathbf{j}l_j$的第$j$个波的频率$\sigma_j$由线性罗斯贝波频散关系式给出，

$$\sigma_j=-\frac{k_j}{k_j^2+l_j^2+F} \quad . \tag{2.26.9}$$

这些是线性理论之结果；仅在ψ_1的方程中，非线性相互作用才变得明显起来，ψ_1的方程是：

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi_1-F\psi_1)+\frac{\partial\psi_1}{\partial x}=\frac{\partial\psi_0}{\partial y}\frac{\partial\nabla^2\psi_0}{\partial x}-\frac{\partial\psi_0}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2\psi_0 \tag{3.26.10}$$

$$=\sum_m\sum_n a_ma_nK_m^2(k_nl_m-k_ml_n)\sin\theta_m\sin\theta_n, \tag{3.26.11a}$$

根据对m,n求和的对称性，上式又可写为

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi_1-F\psi_1)+\frac{\partial\psi_1}{\partial x}$$

$$=\sum_m\sum_n\frac{a_ma_n}{2}(K_m^2-K_n^2)(k_nl_m-k_ml_n)\sin\theta_m\sin\theta_n$$

$$=\sum_m\sum_n a_ma_nB(K_m,K_n)[\cos(\theta_m+\theta_n)-\cos(\theta_m-\theta_n)] \quad , \tag{3.26.11b}$$

式中

$$B(K_m,K_n)=\frac{1}{4}(K_m^2-K_n^2)\mathbf{Z}\cdot(\mathbf{K}_m\times\mathbf{K}_n), \tag{3.26.12}$$

而$\mathbf{Z}$是垂直方向单位矢量，第m个和第n个波的相互作用产生了ψ_1问题的一个强迫项，这个强迫项以这两个波的位相和与位相差振荡，即它的波矢量为

$$\mathbf{K}_{mn}\equiv\mathbf{K}_m\pm\mathbf{K}_n, \tag{3.26.13a}$$

频率为

$$\omega_{mn}\equiv\sigma_m\pm\sigma_n. \tag{3.26.13b}$$

注意，对于波长相同($K_m^2=K_n^2$)或者波矢量平行($\mathbf{K}_m\times\mathbf{K}_n=0$)的两个波没有相互作用，因为它们的相互作用系数$B(K_m,K_n)$为零。第一种情况相当于这两个波之和的涡度等于它们的流函数之和的常数倍，故两个波场的雅可比项恒为零；而第二种情况相当于在单一方向

上的平行运动，因而(3.26.4)式中的非线性平流项也是明显为零的。

ψ_1 的方程是线性的非齐次方程，因此对每个强迫项的响应可以分别加以考虑，然后把结果迭加起来。考虑由 $a_m a_n B(K_m, K_n)\cos(\theta_m+\theta_n)$ 项强迫产生的解。设 ψ_1 的周期性强迫解的形式如下：

$$\psi_1 = A_{1mn}\sin(\theta_m+\theta_n), \tag{3.26.14}$$

其中 A_{1mn} 由(3.26.11b)确定，其值为

$$A_{1mn}=\frac{a_m a_n B(K_m, K_n)}{(K_{mn}^2+F)(\omega_{mn}-\sigma_{mn})} . \tag{3.26.15}$$

这里 σ_{mn} 是对应于波矢量为K_{mn}的波动的罗斯贝波频，即

$$\sigma_{mn}=-\frac{-k_{mn}}{k_{mn}^2+l_{mn}^2+F}=-\frac{-(k_m+k_n)}{(k_m+k_n)^2+(l_m+l_n)^2+F}. \tag{3.26.16}$$

显然，仅当强迫作用频率 ω_{mn} 不等于波数为强迫波数 K_{mn} 的自由罗斯贝波的固有振荡频率 σ_{mn} 时，由(3.26.14)和(3.26.15)式给出的解才成立，否则将发生共振。也就是说，两个波结合起来强迫产生第三个波，它具有适合于自由线性振荡的波数和频率。由(3.26.15)式预测的、对外界强迫的响应振幅无限大的这样一种相互作用，称之为共振相互作用。这一相互作用显然是十分重要的，因为所有的非共振相互作用对大的 β 来说，只不过产生一个小振幅的强迫波的背景"噪声"，其振幅与共振相互作用产生的振幅相比是很小的。发生共振时，如同共振强迫作用的通常情况那样，解(3.26.14)必须用解

$$\psi_1=\tilde{t}a_{1mn}\cos(\theta_m+\theta_n) \tag{3.26.17}$$

来代替，从而得到如下形式的 ψ：

$$\psi=\psi_0+(\beta^{-1}\tilde{t})a_{1mn}\cos(\theta_m+\theta_n)=\psi_0+ta_{1mn}\cos(\theta_m+\theta_n), \tag{3.26.18}$$

这是在非线性平流时间 t 上，$O(\beta^{-1})$ 修正量的慢增长，所以在时间 $t=O(1)$ 或 $\tilde{t}=O(\beta)$ 以后，我们最初假设的级数(3.26.5)显然不再成立，因为这时第二项已与第一项的量级相同。于是我们必须回答以下两个重要问题：实际上共振相互作用可能发生吗？如果可能的话，波振幅在时间 $\tilde{t}=O(\beta)$ 内如何演变？第一个问题的答案不是一下子能说清楚的。

为了产生共振，显然三个罗斯贝平面波必须满足

$$-\theta_j=\theta_m+\theta_n, \tag{3.26.19}$$

其中为对称起见，引入了负号（如(3.26.18)式所指出，这是没有关系的）。这个条件意味着第 m 个和第 n 个波结合产生一个位相 $\theta_m+\theta_n$，它等于第三个波的相角 θ_j。此时强迫项在空间与时间上总是与一个振荡和共振的自然波型同位相，即波动之间出现很强的能量交换。因(3.26.9)式对一切 x, y 和 t 均适用，故

$$\theta_j+\theta_m+\theta_n=0 \tag{3.26.20}$$

所要求的三个条件是

$$k_j+k_m+k_n=0, \tag{3.26.21a}$$

$$l_j+l_m+l_n=0, \tag{3.26.21b}$$

$$\sigma_j(k_j, l_j)+\sigma_m(k_m, l_m)+\sigma_n(k_n, l_n)=0. \tag{3.26.21c}$$

如果我们容许 k, l 和 σ 既可取正值也可取负值的话，那末(3.26.21)式中也包括位相差 $\theta_m-\theta_n$ 的共振强迫作用，根据(3.26.11b)式，这种可能性是存在的。前两个条件可以用图 3.26.1 所示的图解来说明，即三个波矢量必须加起来等于零，以形成一个共振三波组，根据(3.26.

18)式其中任意两个都强迫第三个波共振。寻找不但构成图 3.26.1 所示的三波组而且满足(3.26.21c)式，即

$$\frac{k_m}{k_m^2+l_m^2+F}+\frac{k_n}{k_n^2+l_n^2+F}+\frac{k_j}{k_j^2+l_j^2+F}=0 \tag{3.26.22}$$

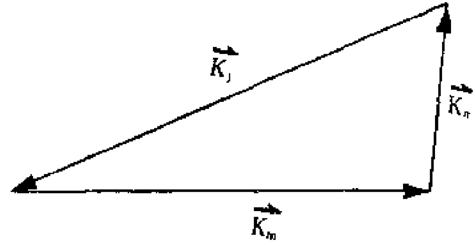


图3.26.1 三个相互作用的平面波

的三个波矢量是困难的，这意味着如果可以找到这样的波矢量的话，它们仅构成所有可能的（由其相互作用的效果来区别的）相互作用中很受限制的一组。可以用如下方式解析地寻求三波组。先在脑子里想定任意的单个波矢量，如 $\mathbf{K}_j$。然后根据(3.26.21a,b)式，借助 $\mathbf{K}_j$ 和 $\mathbf{K}_n$ 寻找 $\mathbf{K}_m$。把此结果代入(3.26.21c)式，得到用(k_j,l_j)表示的波数(κ_n,l_n)的单个方程。从而确定了 kl 平面上能与 $\mathbf{K}_j$ 共振相互作用的波矢量（如果有的话）的轨迹。Longuet-Higgins 和 Gill(1967) 详细研究过这个十分复杂的代数问题，他们指出，任何波矢量都能与一族波矢量构成共振三波组。作为一个具体而又简单的例子，考虑 $\mathbf{K}_j$ 指向东的情况，即 $\mathbf{K}_j=\mathbf{i}k_j$，从而 $l_j=0$ 的基本罗斯贝波的情况。其次选择择长度尺度 L 为变形半径，使得 $F=1$。最后，为简单起见，我们研究 $k_j=1$的典型情况，即波长等于罗斯贝变形半径的 2π 倍的情况。在此情况下，(3.26.21a,b)式变成

$$l_m=-l_n\equiv l, \tag{3.26.23}$$

而 (3.26.22) 式为

$$\frac{1}{2}+\frac{k}{k^2+l^2+1}=\frac{k+1}{(k+1)^2+l^2+1}. \tag{3.26.24}$$

这就给出用k表示的关于 l 的方程，即

$$l^4+l^2[k^2+(k+1)^2]+k^2(k+1)^2+4k(k+1)=0, \tag{3.26.25}$$

其解为

$$l=\pm\left\{(1-3\kappa^2)^{1/2}-\left(\kappa^2+\frac{1}{4}\right)^{1/2}\right\} \tag{3.26.26}$$

式中

$$\kappa=k+\frac{1}{2}. \tag{3.26.27}$$

$l(k)$的轨迹如图 3.26.2 所示。波矢量 $\mathbf{K}_n$ 和 $\mathbf{K}_m$ 位于通过$k=\frac{1}{2}$的直线与轨迹相交的两个端点上。既然我们已经证明了可以找到共振三波组，那么我们必须进而考察三波组振幅的控制方程。基本扰动展开式(3.26.5)的结果 (3.26.18) 式表明，共振相互作用的三波组的振幅可以在平流时间尺度上增长。即我们应当设共振相互作用波的振幅 a_j 既是快变量 $\tilde{t}$，也是“慢”变量 t 的函数。说得更普遍一些，ψ 必须用多时间变量 $\tilde{t}$ 和 t 来表示，即

$$\psi=\psi_0(x,y,\tilde{t},t)+\frac{1}{\beta}\psi(x,y,\tilde{t},t)+\cdots\cdots, \tag{3.26.28}$$

在这里，根据3.20节所描述的概念，(3.26.14)式中的时间导数$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}$现在必须用下式来代替：

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \to \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial t} \qquad (3.26.29)$$

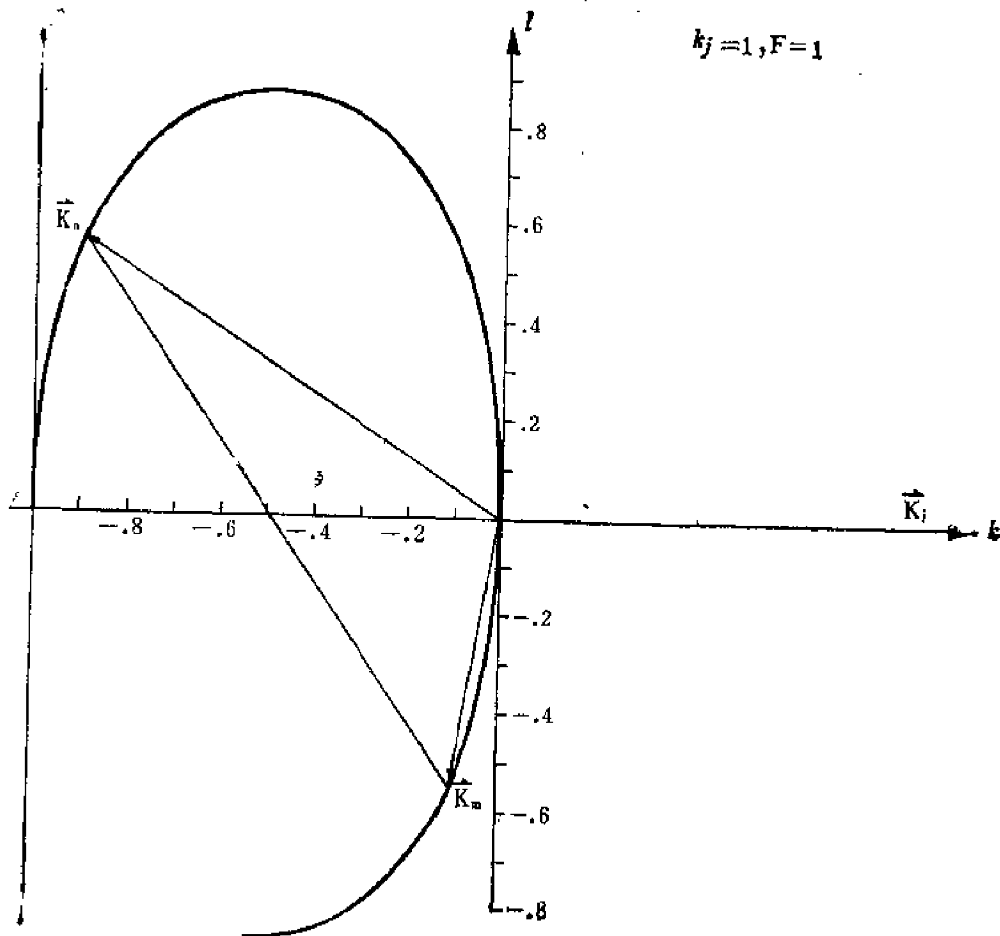


图3.26.2　能与K_j共振相互作用的矢量K_n和K_m的轨迹。

如图所示，K_n与K_m必须接在椭圆形曲线上，而且它们的端点一定位于经过点$(k, l)=(-0.50, 0)$、且与轨迹相交的直线的两交点上。

ψ_0的方程等价于(3.26.6)式，我们考虑对应于单个三波组的解

$$\psi_0 = a_1\cos\theta_1 + a_2\cos\theta_2 + a_3\cos\theta_3, \qquad (3.26.30)$$

式中假定满足条件(3.26.21a.b.c)，即

$$\begin{aligned} &k_1+k_2+k_3=0, \\ &l_1+l_2+l_3=0, \qquad (3.26.31)\\ &\sigma_1(k_1,l_1)+\sigma_2(k_2,l_2)+\sigma_3(k_3,l_3)=0, \end{aligned}$$

而且式中每个频率均满足线性频散关系式。ψ_1的方程现在是

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi_1-F\psi_1)+\frac{\partial\psi_1}{\partial x}$$

$$=(K_1^2+F)\frac{da_1}{dt}\cos\theta_1+a_2a_3B(K_2,K_3)[\cos(\theta_2+\theta_3)-\cos(\theta_2-\theta_3)]$$

$$+(K_2^2+F)\frac{da_2}{dt}\cos\theta_2+a_3a_1B(K_3,K_1)[\cos(\theta_3+\theta_1)-\cos(\theta_3-\theta_1)]$$

$$+(K_3^2+F)\frac{da_3}{dt}\cos\theta_3+a_1a_2B(K_1K_2)[\cos(\theta_1+\theta_2)-\cos(\theta_1-\theta_2)].$$

(3.26.32)

强迫作用由两部分组成。含有象 $\cos(\theta_2-\theta_3)$这一类因子的项（用我们的符号约定）是非共振项，它们只产生(3.26.15)式所给出的那种谐波的 θ_1 场。这种响应是很弱的，形成附加在主要三波组上的背景波场。含有象 $\cos\theta_j$ 或 $\cos(\theta_m+\theta_n)$ 这类因子的项，对三个波矢量中的任一个都是共振的强迫项。除非从(3.26.32)式中消去这些共振强迫项，否则形如(3.26.18)的久期项将使展开式(3.26.28)对时间 $t=O(1)$ 失效。我们希望，至少对此时间尺度，展开式仍保持正确，因为我们已经看到，这一时间尺度正是非线性共振相互作用引起的波振幅演变的固有时间尺度。要消除共振项，只有选择适当的 da_1/dt、da_2/dt、da_3/dt，使之满足

$$\frac{da_1}{dt}+\frac{B(K_2,K_3)}{K_1^2+F}a_2a_3=0\ , \qquad (3.26.33a)$$

$$\frac{da_2}{dt}+\frac{B(K_3,K_1)}{K_2^2+F}a_3a_1=0\ , \qquad (3.26.33b)$$

$$\frac{da_3}{dt}+\frac{B(K_1,K_2)}{K_3^2+F}a_1a_2=0\ . \qquad (3.26.33c)$$

式中相互作用系数 $B(K_j,K_m)$由(3.26.12)式给出。这是一些振幅方程，它们控制三波组在相互作用的时间尺度上的演变。所以共振相互作用将使最低阶振幅改变一量级为 $O(1)$的量，而非共振相互作用只能产生一个量级为 $O(\beta^{-1})$的背景扰动。

由(3.21.8)式，三波组中每个波的波动能是

$$E_j=(K_j^2+F)\frac{a_j^2}{4}, \qquad j=1,2,3. \qquad (3.26.34)$$

如果分别用 a_1、a_2 和 a_3 乘(3.26.33a,b,c)式，并利用(3.26.12)和(3.26.13)式，便可得到

$$\frac{d}{dt}(E_1+E_2+E_3)=-a_1a_2a_3(B(K_2,K_3)+B(K_3,K_1)+B(K_1,K_2))=0.$$

(3.26.35)

因此，三波组的能量是守恒的 。在此近似下的波动，在平流时间尺度上，只是彼此交换能量而已。这确实是一个引人注目的结果，因为（正象我们已看到的）除了三波组成员间的共振能量交换以外，(3.26.32)式表明也有一些能量传给了非共振波，然而，这种能量传送与共振能量交换相比是非常弱而且慢的，以至于在最低阶近似上，可以认为共振相互作用是能量守恒的。

从(3.26.33)式还可导出另一个约束关系式。每个波动的位能是

$$\Pi_j=-(K_j^2+F)a_j\cos\theta_j. \tag{3.26.36}$$

位涡平方的平均值（均方值）叫位拟能，(potential enstrophy),它是

$$V_j=(K_j^2+F)^2\frac{a_j^2}{2}=2\ (K_j^2+F)\ E_j. \tag{3.26.37}$$

并且容易证明

$$\frac{\partial}{\partial t}(V_1+V_2+V_3)=0\ , \tag{3.26.38}$$

所以波动总拟能也是守恒的．如果利用(3.26.37)式给出的 E_j 和 V_j 之间的关系，那末上面的两个守恒还有特殊的含义，因为此时不但必须有

$$\sum_{j=1}^{3}E_j=\text{常数}=E_0\ , \tag{3.26.39a}$$

而且还有

$$\sum_{j=1}^{3}K_j^2E_j=\text{常数}=K_0^2E_0. \tag{3.26.39b}$$

因此，当振幅变化时，它们必须使三个波的回转半径 (radius of gyration) 守恒，即

$$K_0^2=\frac{\sum K_j^2E_j(t)}{\sum E_j(t)} \tag{3.26.40}$$

在运动中守恒。

所以，一个波不可能同时把能量传送到两个波数都比它大的波中去。假如一部分能量由非线性效应传送给波数较大的波，那末为了保持能量和拟能守恒，必须也有能量传给波数较小（波长较大）的波．例如，对于图 3.26.2所示的三波组而言，$K_3^2=0.31$,$K_1^2=1$,而$K_2^2=1.110$。

两个守恒表达式也可写为

$$\frac{1}{K_2^2-K_3^2}\frac{\partial E_1}{\partial t}=\frac{1}{K_3^2-K_1^2}\frac{\partial E_2}{\partial t}=\frac{1}{K_1^2-K_2^2}\frac{\partial E_3}{\partial t}\ . \tag{3.26.41}$$

假设 $K_3^2<K_1^2<K_2^2$。那末若 $\partial E_1/\partial t<0$，则 $\partial E_2/\partial t$ 和 $\partial E_3/\partial t$ 必须均为正．图 3.26.3 给出能流方向的示意图。

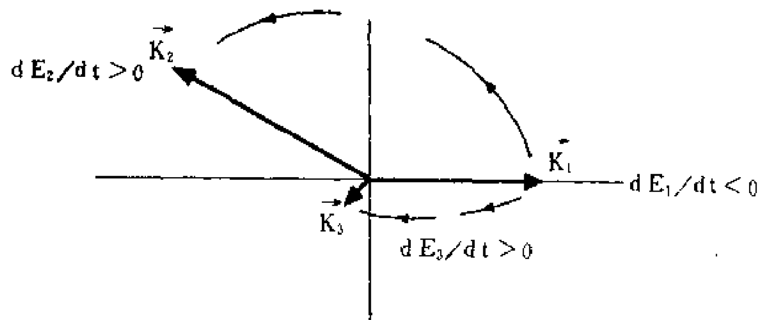


图3.26.3　表明能量从波矢量为K_1的波传给较大波长(K_3)和较小波长(K_2)之波的示意图．能量传递方向是可逆的。

考虑初始时 a_2 远大于 a_1 或 a_3 的情形．我们可以想像一个初始振幅为常数 a_2 的罗斯贝

波，然后它受到三波组中另外两个波合成的小扰动的干扰，我们可令

$$\begin{aligned} a_2 &= A_2 + \alpha_2(t), & \alpha_2 &\ll A_2, \\ a_1 &= \alpha_1(t), & \alpha_1 &\ll A_2, \\ a_3 &= \alpha_3(t), & \alpha_3 &\ll A_2. \end{aligned} \tag{3.26.42}$$

精确到 α 的最低阶时，(3.26.33)式的线性化形式为

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_1}{dt} &= -\frac{B(K_2,K_3)}{(K_2^2+F)}A_2\alpha_3, \\ \frac{d\alpha_3}{dt} &= -\frac{B(K_1,K_2)}{(K_3^2+F)}A_2\alpha_1, \\ \frac{d\alpha_2}{dt} &= O(\alpha_1\alpha_3), \end{aligned} \tag{3.26.43}$$

结果有

$$\frac{d^2\alpha_1}{dt^2} = -\frac{B(K_2,K_3)B(K_1,K_2)}{(K_3^2+F)(K_2^2+F)}A_2^2\alpha_1 . \tag{3.26.44}$$

因为

$$B(K_2,K_3)B(K_1,K_2) = (K_2^2-K_3^2)(K_1^2-K_2^2)\mathbf{Z}\cdot(\mathbf{K}_2\times\mathbf{K}_3)\mathbf{Z}\cdot(\mathbf{K}_1\times\mathbf{K}_2), \tag{3.26.45a}$$

而且因为根据共振条件有

$$\mathbf{Z}\cdot(\mathbf{K}_2\times\mathbf{K}_3) = -\mathbf{Z}\cdot(\mathbf{K}_2\times\mathbf{K}_1), \tag{3.26.45b}$$

所以(3.26.44)式右端 α_1 的系数为正的充分必要条件是

$$(K_1^2-K_2^2)(K_2^2-K_3^2) > 0 . \tag{3.26.46}$$

假如满足了这个条件，则 α_1 和 α_3 都将以与 A_2 成正比的速率指数增长，它们都从原来的罗斯贝波中汲取能量。条件(3.26.46)还要求，把能量传送给三波组中其他两波的那个波动，从尺度大小上说应居于其他两个波动之间。由(3.26.44)式预测的那种指数增长，将继续到 α_1 和 α_3 变得大到足以使线性化假定失效时为止。然而，我们毕竟知道三波组的总能量必须守恒。要了解 a_1, a_2 和 a_3 在较长时间内的性质，需要对(3.26.33)式积分。关于能量和涡度拟能的约束关系式之存在，使得任意两个振幅可用第三个振幅来消去，即

$$\begin{aligned} (K_2^2+F)\frac{a_2^2}{4} + (K_3^2+F)\frac{a_3^2}{4} &= E_0 - (K_1^2+F)\frac{a_1^2}{4}, \\ (K_2^2+F)^2\frac{a_2^2}{4} + (K_3^2+F)^2\frac{a_3^2}{4} &= \frac{V_0}{2} - (K_1^2+F)^2\frac{a_1^2}{4}. \end{aligned} \tag{3.26.47}$$

其中 E_0 和 V_0 由波振幅的初始条件决定。用 a_1 解出 a_2 和 a_3 来，然后得到如下的关于 a_1 的方程：

$$\frac{da_1}{dt} = C_3[(C_2-a_1^2)(C_3-a_1^2)]^{1/2} \tag{3.26.48}$$

式中，C_1、C_2 和 C_3 是依赖于初始条件的常数。可以借助椭圆函数寻找其周期解，振幅演变特性在图3.26.4中示意给出。在此我们并不关心其细节；它们可以在上面引用过的Longuet-Higgins 和 Gill(1967)的书中查阅到。我们所要指出的重要特征是这样一个简单的事实：三波组成员之间的能流随时间而呈脉冲变化，图3.26.3所示的能流方向是可逆的。例如，能量

起初流向波1和波3，然后当波2的初始不稳定性被非线性效应抵消时，能量又从波1和波3流向波2。能量脉动是永远保持下去的，三波组中的每个波都交替地接受和输出能量。

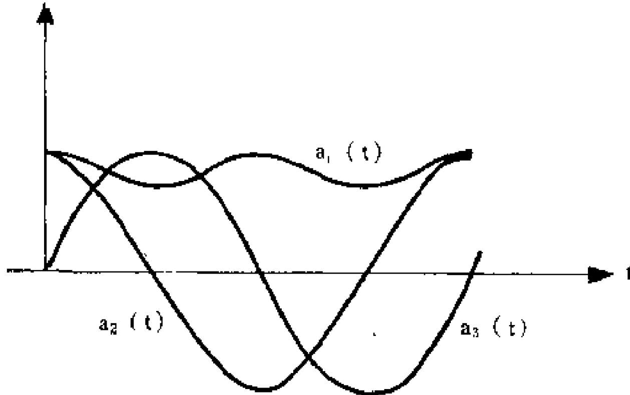


图3.26.4 由波动间的共振相互作用所产生的波振幅的典型振荡。

因而，虽然单个的平面罗斯贝波是精确解，但它显然是不稳定解。在β值很大的情况下，完成共振三波的扰动总是缓慢地消耗该罗斯贝波的能量，对于较大振幅的罗斯贝波（即对较小的β值），能量消耗得较快。这种消耗一直持续到三波组的其他成员的振幅与初始波动振幅同量级为止。

略去三波组中其他成员的那种非线性解，只是对时间量级$<O(\beta)$的波场的真实描述。非线性效应终将使其他波动从细微的背景场中发展起来，并显著地消耗初始波的能量。波谱的这种演变是不可变更的，然而却是缓慢的，而且随着β的增大，线性解的描述也越精确。但是，除非初始条件不切实际地限制为单一波动，否则波谱将因以上描述的过程而缓慢地变宽和变得更为复杂。不过，在这一过程的每个阶段上，对$\beta\gg1$的情况，个别波的动力学性质仍受线性理论控制。非线性理论描写了近于线性的波动之间的能量交换。

3.27 能量和拟能

我们在上一节中已看到，罗斯贝波的三波组非线性动力学受到必须保持能量和拟能守恒的规律的强烈制约。下面我们将看到，这是一个普遍的事实，决非局限于小振幅的罗斯贝波。

我们来考虑和上节一样的无限β平面上的运动。假如运动在无限远处为零，则用ψ乘(3.26.1)式，并在全平面上积分后得到

$$\frac{\partial}{\partial t}\iint dxdy\left[\frac{(\nabla\psi)^2}{2}+F\frac{\psi^2}{2}\right]=0\,, \tag{3.27.1}$$

这就是能量守恒方程。若用$(\nabla^2\psi-F\psi)$乘(3.26.1)式，我们就可得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\frac{[\nabla^2\psi-F\psi]^2}{2}=&-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial\psi}{\partial x}(\nabla^2\psi-F\psi)^2\right]\\&+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial\psi}{\partial y}(\nabla^2\psi-F\psi)^2\right]\\&-\frac{\beta}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right]+F\psi^2\right\}\\&-\beta\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right).\end{aligned} \tag{3.27.2}$$

因为在无穷远处没有运动，所以在全平面上对(3.27.2)式积分可得

$$\frac{\partial}{\partial t}\iint dxdy[\nabla^2\psi-F\psi]^2=0\ , \tag{3.27.3}$$

故位拟能也守恒。所以总能量和拟能必须为常数。如果把 ψ 用双重富里叶积分表示为

$$\psi=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk\int_{-\infty}^{\infty}dl e^{i(kx+ly)}\bar{\Phi}(k,l),$$

那末总能量同样也完全可以用富里叶振幅 $\bar{\Phi}(k,l)$ 表示成

$$E=\iint_A dxdy\left[\frac{(\nabla\psi)^2+F\psi^2}{2}\right]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}dkdl\left(\frac{k^2+l^2+F}{2}\right)\bar{\Phi}(k,l)\bar{\Phi}^*(k,l), \tag{3.27.4}$$

推导中已重复使用了基本的富里叶恒等式：

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(k')e^{i(k+k')x}dxdk'=\psi(-k)=\psi^*(k). \tag{3.27.5}$$

注意，为了保证 $\psi(x,y)$为实数，应有

$$\bar{\Phi}(-k,-l)=\bar{\Phi}^*(k,l), \tag{3.27.6}$$

其中*表示复共轭。

我们定义波数谱中的能量密度为

$$E_{k,l}=\left(\frac{k^2+l^2+F}{2}\right)|\bar{\Phi}(k,l)|^2, \tag{3.27.7}$$

所以(3.27.4)式变为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}dkdlE_{k,l}=E\ . \tag{3.27.8}$$

类似地，拟能在整个平面上的积分可以用 ψ 的富里叶系数表示为

$$\iint dxdy[\nabla^2\psi-F\psi]^2=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}dkdl(k^2+l^2+F)^2|\psi(k,l)|^2$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}dkdl(k^2+l^2+F)E_{k,l}. \tag{3.27.9}$$

由于总能量和总拟能均为常数，所以可得出能谱的回转半径

$$K_0^2\equiv\frac{\iint(k^2+l^2)E_{k,l}dkdl}{\iint E_{k,l}dkdl} \tag{3.27.10}$$

也是常数。尽管能谱的形状可以随时间改变，但K_0^2保持不变，这意味着，任何由非线性过程引起的能量向较小尺度的传递，都必须同时伴随着能量向较大尺度（其 k^2+l^2 较小）的大量传递，这正如相互作用的罗斯贝波三波组中的情况一样。

如果要保持拟能不变的话，传递给较大尺度的能量必须足够大，以补偿 k^2+l^2 的较小的数值。这就要求，或者传递给较大尺度波的能量大于传给较小尺度波的能量，或者是接受能量的较小尺度（K大）波在波谱上离能源较近，而接受到能量的较大尺度（K小）波在波谱

上距能源较远。这一约束关系式对准地转运动有非常大的意义，因为它意味着，如果能量开始发生在大尺度波上，那末能量有保持在限于大尺度波的趋势。

注意，一般对于有界区域，拟能严格守恒的表达式并不成立，因为在有界域中(3.27.2)式右边的积分项一般不等于零。(3.27.2)式右边可以写为上述矢量的散度：

$$\mathbf{Q}=\mathbf{i}\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial y}(\nabla^2\psi-F\psi)^2-\frac{\beta}{2}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2+F\psi^2\right]\right\}$$

$$+\mathbf{j}\left[-\frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial x}(\nabla^2\psi-F\psi)^2-\beta\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]. \qquad (3.27.11)$$

虽然对于无界平面上的运动来说，可以使 $\mathbf{Q}$ 在无穷远处为零，但在任意有界区域中，$\mathbf{Q}$的法向分量不必为零。相应的拟能不守恒意味着(3.27.10)式定义的 K_0^2 不再需要是常数。当然，在 3.23 节中我们已看到了这一点，在那里从 $x=0$ 处的边界反射的罗斯贝波包，保持其波能量守恒，但在此过程中，其总波数增加，因此它的拟能增加。

附录

方程(3.16.1)

$$\nabla^2\psi-F\psi=-\frac{\beta Y\delta(r)}{2\pi r} \qquad (3.A.1)$$

的解可以用下述办法求出。

如果我们识别出(3.A.1)的切向对称性，并引进极坐标，其中 r 表示离原点的距离，则(3.A.1)关于原点对称的解满足

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial\psi}{\partial r}-F\psi=-\frac{\beta Y}{2\pi r}\delta(r), \qquad (3.A.2)$$

对一切 $r\neq 0$，(3.A.2)式的右端为零。可所有非零 r 使(3.A.2)成立的齐次通解是

$$\psi=AK_0(F^{1/2}r)+BI_0(F^{1/2}r). \qquad (3.A.3)$$

函数 I_0 随 r 的增加而呈指数增长，因而必须舍去，所以 $B=0$。把(3.A.3)在含原点的小区间上积分得

$$\lim_{r\to 0} r\frac{\partial\psi}{\partial r}=-A=-\frac{\beta Y}{2\pi}, \qquad (3.A.4)$$

这式子给出 A，即

$$A=+\frac{\beta Y}{2\pi}, \qquad (3.A.5)$$

所以

$$\psi=\frac{\beta Y}{2\pi}K_0(F^{1/2}r). \qquad (3.A.6)$$

第四章 摩擦和粘性流

4.1 引 言

观测到的大气和海洋中的大尺度运动，有几天以上的持续性。这一事实说明，摩擦力与科氏加速度和压力梯度相比，几乎处处很弱，摩擦力很少在最低阶上破坏地转平衡。实际上对许多运动来说，耗散时间尺度比平流时间尺度长，即摩擦力与非线性相对加速度相比很弱，这可能是确实的。尽管如此，摩擦力及其所隐含的机械能耗散，却是不可忽略的。理由很简单而且十分重要。对于按时间平均的运动，即大气环流和海洋环流来说，流体运动响应于各种基本上定常的外部强迫作用。例如，大气是由持续的、但在空间分布上不均匀的太阳加热所驱动。这种能量输入产生一个力学响应，即大尺度运动的动能；而且如果要保持定常态（至少是统计上稳定的平均运动状态），那末这种动能必须最终被耗散掉。这就需要有摩擦耗散。此外，象风生大洋环流的情况一样，摩擦力本身也可以是驱动力。大洋表面上的风应力产生了大洋环流的主要分量。最后，即使摩擦力与其他力相比很小，但其本身的耗散性质（与惯性力的保守性迥然不同，）要求在研究自由运动的衰减问题时，一定得考虑它。

摩擦耗散完全起因于流体分子的随机运动。流体分子的随机运动不是由连续方程来描写的。更确切地说，我们只考虑它们所产生的粘性力；并且对于很多流体，这一粘性力据经验可以仅用粘性系数和宏观速度来表示。这种摩擦力由（1.4.5）式给出。虽然这个力最终是造成动能耗散和动能转变成不规则分子运动动能（即热）的原因，但是在2.8节中曾指出，它对大尺度运动的影响可以全然不计。大尺度运动的长度尺度太大了，以至于分子粘性在力的平衡中没有直接的意义。但是在上面，我们已经论证了摩擦力肯定是重要的。

当然，问题在于大尺度运动并非是孤立存在的。正因为分子粘性是这样小，所以无论是大气还是海洋，都含有在很大程度上由大尺度运动供给能量的非常宽的湍流运动谱。这些迭加在较大尺度运动中的湍流脉动，有通过各式各样的力学过程消耗大尺度运动能量、并把能量传给较小尺度运动的趋势，在那些较小尺度运动中，粘性可以直接起作用。这种能量由最大运动尺度向最小运动尺度串级的概念还很不清楚，也很不严格。实际上，我们在3.26节中已经看到，在某些情况下，至少必须有一部分能量从小尺度向大尺度串级。尽管如此，能量串级概念的基本方面可能是正确的。它有如下的含义。如果我们想提出一个仅直接描写大尺度运动动力学的框架，那末较小尺度的运动对大尺度运动能量的消耗，必须完全借助于大尺度的运动学特征来表示。唯一可以替换的方案是详尽地描述从最大尺度到最小尺度的各种运动，而这是一个十分辣手的问题。尽管仿效用宏观速度来表示分子粘性力，可以作为一个有希望的模式，但有关小尺度运动和大尺度运动的湍流相互作用的研究状况，仍很不令人满意。实际上，这个问题是大尺度海洋与大气动力学中最使人伤脑筋的问题之一。目前似乎还没有一种易于处理的湍流理论，能准确而又切合实际地描述由湍流脉动的能量串级所引起的有效摩擦力。

在本章的后几节中，我们将描述另一种粗略地表示湍流串级对大尺度运动之影响的方

法，这种表示方法直接模仿适于表示分子运动对平均运动之影响的那种概念。显然，这是一个必要的折衷方案，因为只考虑作用于大尺度运动的分子粘性会严重低估摩擦作用；而精确考虑湍流运动的细节，简直是不实际到根本不可能的程度。

4.2 湍流雷诺应力

把流体的总的相对速度场 $\mathbf{u}$ 分为两部分。第一部分暂时记为 $\langle \mathbf{u} \rangle$，代表我们欲详细描写的大尺度运动。第二部分 $\mathbf{u}'$ 代表小尺度湍流，除了因为它对大尺度运动有影响以外，湍流不是我们直接感兴趣的运动。这里立刻产生了一些概念性的问题，这是因为没有完全合乎逻辑的方法能决定这种分解是怎样产生的，即运动是考虑为平均部分还是湍流部分。在某种程度上说，$\mathbf{u}'$ 是由以下条件规定的，其时间比 $\langle \mathbf{u} \rangle$ 的特征演变时间短得多，但又长到足以为 $\mathbf{u}'$ 提供适当的平均时间间隔，以至于在此时间间隔上，$\mathbf{u}'$ 的平均值为零。即对于

$$\mathbf{u}=\langle \mathbf{u} \rangle+\mathbf{u}', \tag{4.2.1}$$

小尺度速度的平均值为零：

$$\langle \mathbf{u}' \rangle=0. \tag{4.2.2}$$

因而，括号在这里有取平均运算的含义，故

$$\langle \langle \mathbf{u} \rangle+\mathbf{u}' \rangle=\langle \mathbf{u} \rangle. \tag{4.2.3}$$

是否真正能找到一个平均时间，使之长得足以得到（4.2.2）式，同时又比大尺度运动的固有时间尺度小得多，这还是一个问题。我们在此假设它是可能的。

现在来考虑绕 z 轴旋转的不可压缩均质流体的 x、y 和 z 的动量方程。使用分解式(4.2.1)，例如，x 分量方程是

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+(\langle u \rangle+u')\frac{\partial}{\partial x}+(\langle v \rangle+v')\frac{\partial}{\partial y}+(\langle w \rangle+w')\frac{\partial}{\partial z}\right](\langle u \rangle+u')-f(\langle v \rangle+v')$$

$$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x}+\mathscr{F}_x. \tag{4.2.4}$$

其中 $\mathscr{F}_x$ 是粘性力（1.4.5）式的 x 分量。对（4.2.4）式取平均可得 $\langle u \rangle$ 的方程：

$$\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial t}+\langle u \rangle\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x}+\langle v \rangle\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y}+\langle w \rangle\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial z}-f\langle v \rangle$$

$$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x}+\nu\nabla^2\langle u \rangle-\frac{\partial}{\partial x}\langle u'u' \rangle-\frac{\partial}{\partial y}\langle v'u' \rangle-\frac{\partial}{\partial z}\langle w'u' \rangle. \tag{4.2.5}$$

推导过程中已经用到了不可压缩条件，它对平均速度和脉动速度分别成立。除了（4.2.5）式右边最后三项以外，$\langle u \rangle$ 的方程中的其他项均已用大尺度速度来表示。尽管 u'、v' 和 w' 平均为零，但是脉动的动量通量（它是脉动速度的平方项）在取平均时不一定为零。这种情况恰好类似于气体中由于分子的随机热运动所引起的非零动量通量。例如

$$\langle v'u' \rangle \equiv -\frac{\tau_{xy}}{\rho} \tag{4.2.6}$$

表示 x 动量的平均通量，它由如图4.2.1所示的穿过 $y=$ 常数的面的小尺度运动所造成。如果穿过 y_1 面的通量大于穿过 y_2 面的通量，且 $y_1>y_2$，那末两层之间的平均动量必须减少，才能保持总动量守恒，即除非有其他效应平衡，否则若

$$\frac{\partial}{\partial y}\langle u'v'\rangle > 0, \qquad (4.2.7)$$

则必然有

$$\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial t} < 0. \qquad (4.2.8)$$

对于大尺度运动来说，由小尺度运动引起的动量通量，等价于作用在大尺度运动上的应力τ_{xy}。借助于这一应力场，大尺度运动的平均方程是

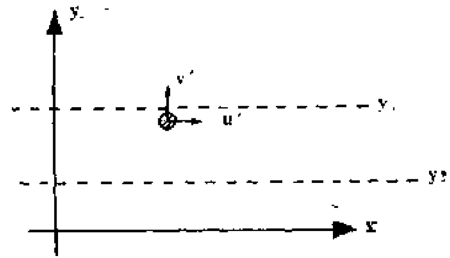


图4.2.1 具有y方向脉动速度v'的流体元将携带x方向动量$\rho u'$穿过y_1，净通量是$\overline{\rho u'v'}$。

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}-fv$$

$$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}\right\}+\nu\nabla^2 u, \qquad (4.2.9a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}+fu$$

$$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}\right\}+\nu\nabla^2 v, \qquad (4.2.9b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}$$

$$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z}\right\}+\nu\nabla^2 w. \qquad (4.2.9c)$$

其中，已略去了大尺度运动所用的括号记号$\langle\ \rangle$。现在不带撇的速度全部指大尺度运动。出现于（4.2.9）式中的应力由下式给出：

$$\begin{aligned}
&\tau_{xx}=-\rho\langle u'u'\rangle,\tau_{yy}=-\rho\langle v'v'\rangle,\tau_{zz}=-\rho\langle w',w'\rangle,\\
&\tau_{xy}=\tau_{yx}=-\rho\langle u'v'\rangle,\\
&\tau_{xz}=\tau_{zx}=-\rho\langle u'w'\rangle,\\
&\tau_{yz}=\tau_{zy}=-\rho\langle v'w'\rangle.
\end{aligned} \qquad (4.2.10)$$

作为对每个动量方程求平均而得到的自然结果出现的上述应力，称为雷诺应力。雷诺应力的出现，只是因为速度场分解为大尺度运动和湍流小尺度运动。在基本的流体动力学水准上，它们并不代表新的物理机制；相反地，它们是由于我们决定把注意力完全集中于大尺度运动动力学而造成的结果。

现在我们所面临的极其困难的问题是，如何仅用大尺度速度来表示雷诺应力，从而使（4.2.9a,b,c）表示一个仅用大尺度速度描写的闭合方程组。

处理这一错综复杂问题的一个最通用且最粗糙的方法是，把湍流运动对大尺度运动作用的方式设想为类似于分子运动影响宏观运动的方式。也就是说，假设雷诺应力线性依赖于大尺度运动速度的空间导数。这类应力的特别简单的模式——它还保持τ_{xy}和τ_{yx}等力之间的必要的对称性——是

$$\frac{\tau_{xx}}{\rho}=2A_H\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\tau_{yy}}{\rho}=2A_H\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\tau_{zz}}{\rho}=2A_V\frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}=\rho A_H\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

$$\tau_{xz}=\tau_{zx}=\rho A_V\frac{\partial u}{\partial z}+\rho A_H\frac{\partial w}{\partial x}, \tag{4.2.11}$$

$$\tau_{yz}=\tau_{zy}=\rho A_V\frac{\partial v}{\partial z}+\rho A_H\frac{\partial w}{\partial y}.$$

系数A_H和A_V分别叫做水平湍流粘性系数和垂直湍流粘性系数。事先没有理由可以说明A_H和A_V应该相等。实际上，大尺度运动的水平尺度与垂直尺度之间的不同，暗示了这两个方向上的大尺度动量混合不会是相同的。必须意识到模式（4.2.11）是一个可靠性尚有疑问的假说。虽然它确实为大尺度运动方程组的闭合提供了一种简单方法，但事先确实没有对该模式予以证明。不仅（4.2.11）式本身的形式还成问题，而且即使这个概念（湍流应力可以如此简单地模式化）是可以接受的，但模式的性质也绝不能事先确定A_H和A_V的性质。由于忽略了湍流运动的细节，所以A_H和A_V不能计算。模仿分子摩擦的显著缺陷还进一步明显地表现于下述情况中：即A_H和A_V即使用经验方法，也不能象分子粘性那样，可通过与特定运动情况无关的方式加以确定。相反，必须把（4.2.11）式看作是我们所设计的动力学结构中最薄弱的环节。假如采用（4.2.11）式，并把A_H和A_V当成常数，则（4.2.9a,b,c）变为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}-fv$$

$$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+A_H\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+A_V\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\nu\nabla^2 u,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}+fu$$

$$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+A_H\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+A_V\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\nu\nabla^2 v, \tag{4.2.12}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}$$

$$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+A_H\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+A_V\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+\nu\nabla^2 w.$$

如果$A_H=A_V=A$，则（4.2.12）的形式等价于有效粘性系数为$\nu+A$的普通的纳维–斯托克斯方程。此时，模式（4.2.11）式相当于这样一个概念：湍流脉动产生的应力可用只增加粘性系数大小（比分子粘性系数值大）的方式来参数化，从而解释，大块流体（而不是分子）穿越平均动量梯度时所输送的动量，对大尺度运动所产生的动量平滑效率更高。当$A_H\neq A_V$时，

空间上的各向异性使得与分子情形的细节等价变成更困难的问题。不管怎么说，总可以有把握地假设A_H和A_V的值远大于ν值，所以今后我们在讨论大尺度运动中，总可以略去与分子粘性系数成比例的那些项。

大气与海洋中A_H和A_V的估计值可变性很大。大气中A_V的估计值在地表附近为10^5厘米^2/秒，而在自由大气中要低得多。A_H的估计值就更难于有把握地令人接受，但有人给出A_H的估计量级是10^5米^2/秒。对海洋来说，A_V的估计值范围从1厘米^2/秒到10^3厘米^2/秒，而A_H的不大肯定的估计量级为10^5厘米^2/秒到10^8厘米^2/秒。

考虑到与A_H和A_V有关的不确定性，至少可以说，依赖于这些系数的特定值的那些大尺度运动理论是令人怀疑的。可是，尽管它们的值不太令人满意，但使用它们常常可以对那些要求有摩擦力存在的大尺度动力学问题，至少给出一个定性的明确的图象。

4.3 艾克曼层

摩擦在海洋与大气动力学中的作用与垂直于旋转矢量的刚性表面附近的摩擦层结构有密切关系。这类摩擦层，和泰勒-普劳德曼定理的约束关系式（2.7节）一起，对于远离直接受粘性影响之区域的运动的动力学，有深刻影响。称为艾克曼层的摩擦区域之基本特征，可通过下述例子来说明。

考虑以角速度$\mathbf{\Omega}$旋转的均质不可压缩流体的运动。$z=0$处的刚壁垂直于$\mathbf{\Omega}$，并如图4.3.1所示，远离边界处有速度为$\mathbf{U}$的水平均匀运动。控制运动的基本方程是

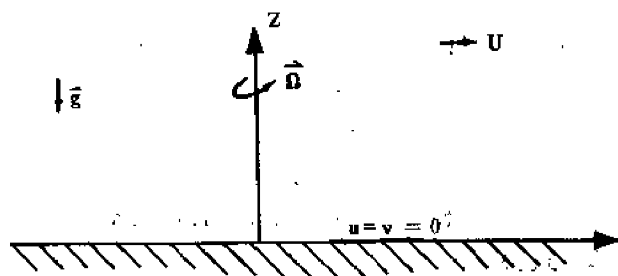


图4.3.1 在$Z=0$的平面（此处u、v、w必须为零）上方，在以角速度Ω旋转的坐标系中所观测到的均匀流$\mathbf{U}$。

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}-fv$$

$$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+A_V\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+A_H\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{4.3.1a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}+fu$$

$$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+A_V\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+A_H\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right), \tag{4.3.1b}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}$$

$$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-g+A_V\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+A_H\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \tag{4.3.1c}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0. \tag{4.3.2}$$

式中$f=2\Omega$.我们可以把x轴选为与无限远处速度的方向相同，因而$z\to\infty$时边界条件就是

$$\begin{aligned} &u=U,\\ &v=0, \quad 当z\to\infty时.\\ &w=0. \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

在$z=0$的刚性面上，我们假定摩擦力直接与分子粘性类似，阻滞流体运动，使得在$z=0$处的法向速度与切向速度均为零，即

$$u=v=w=0 \quad (z=0). \tag{4.3.4}$$

关键性的条件是关于切向速度u和v的无滑动条件。在没有阻滞的摩擦力时，是没有这种边界条件的。于是匀速度U是（4.3.1a,b,c）的一个精确解，即

$$u=U=-\frac{1}{\rho f}\frac{\partial p}{\partial y}, \tag{4.3.5}$$

$$v=w=0,$$

这正是地转平衡。摩擦力的存在以及u和v必须等于零的刚性边界条件，意味着至少在边界附近，运动必须和地转平衡有显著不同。

方程（4.3.1a,b,c）满足边条件（4.3.3）和（4.3.4）的精确解可以有如下形式：

$$\begin{aligned} &u=u(z),\\ &v=v(z),\\ &w=w(z). \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

这种形式是可以采纳的，因为$z=0$和$z=\infty$处的边界条件，均不要求速度场有侧向变化。将（4.3.6）式代入（4.3.2）式得到

$$\frac{\partial w}{\partial z}=0. \tag{4.3.7}$$

这个式子与$z=0$处w为零的条件一起，说明对一切z,垂直速度均为0，即

$$w(z)=0. \tag{4.3.8}$$

再注意到u和v只是z的函数，因而（4.3.1a,b,c）无需作任何近似，便可改写为

$$-fv=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+A_V\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \tag{4.3.9a}$$

$$fu=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+A_V\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \tag{4.3.9b}$$

$$g=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}. \tag{4.3.9c}$$

因流体是均质的，从（4.3.9c）可以得出

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)=0, \tag{4.3.10}$$

或者

$$\frac{\partial}{\partial z}\begin{Bmatrix}\partial p/\partial x\\ \partial p/\partial y\end{Bmatrix}=0, \tag{4.3.11}$$

故水平压力梯度必与z无关。既然$z\to\infty$时u和v变为常数，故对很大的z，利用（4.3.3）式有

$$0=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$fU=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}. \tag{4.3.12}$$

由于水平压力梯度与z无关，所以（4.3.12）式必须对所有z成立。因此水平压力梯度完全由远离边界的地转速度U确定。这使得（4.3.9a, b）可以写成

$$f\tilde{u}=A_V\frac{d^2\tilde{v}}{dz^2},$$

$$-f\tilde{v}=A_V\frac{d^2\tilde{u}}{dz^2}. \tag{4.3.13}$$

其中带"～"号的变量定义为

$$\tilde{u}=u-U,\ \tilde{v}=v.$$

它们是由于刚壁和摩擦之存在所引起的地转运动的偏差。在无摩擦时($A_V=0$)，$\tilde{u}$和$\tilde{v}$均等于零。还有一个重要问题是应注意，如果用运动学粘滞系数ν代替A_V，则（4.3.13）式可等价地应用于流体的层流运动。

消去$\tilde{v}$后，可以得到关于$\tilde{u}$的单个方程，即

$$\frac{d^4\tilde{u}}{dz^4}+\frac{f^2}{A_V^2}\tilde{u}=0, \tag{4.3.14}$$

其通解是四个独立的齐次解之和，即

$$\tilde{u}=C_1e^{(1+i)z/\delta_E}+C_2e^{(1-i)z/\delta_E}+C_3e^{-(1+i)z/\delta_E}+C_4e^{-(1-i)z/\delta_E}. \tag{4.3.15}$$

这里C_1、C_2、C_3和C_4是常数，$i=\sqrt{-1}$，而δ_E是艾克曼厚度，它由下式给出：

$$\delta_E=\left(\frac{A_V}{f/2}\right)^{1/2}. \tag{4.3.16}$$

与C_1和C_2成正比的前两个解，当$z\to\infty$时呈指数增加，且对于很大的z/δ_E值变成无界。为了使解在无限远处保持有界，必须令

$$C_1=C_2=0. \tag{4.3.17}$$

这自动地满足（4.3.3）式，即若用$\tilde{u}$和$\tilde{v}$表示就是

$$z\to\infty\text{时},\quad \tilde{u}=\tilde{v}=0. \tag{4.3.18}$$

所以

$$\tilde{u}=C_3e^{-(1+i)z/\delta_E}+C_4e^{-(1-i)z/\delta_E}, \tag{4.3.19a}$$

而由（4.3.13）式，

$$\tilde{v}=-iC_3e^{-(1+i)z/\delta_E}+iC_4e^{-(1-i)z/\delta_E}. \tag{4.3.19b}$$

在 $z=0$ 处，

$$v=0, \quad \tilde{u}=-U, \tag{4.3.19c}$$

故有

$$C_3=C_4=-\frac{U}{2}. \tag{4.3.19d}$$

于是得到

$$\tilde{v}=Ue^{-z/\delta_E}\cdot\sin z/\delta_E, \tag{4.3.20a}$$

$$\tilde{u}=-Ue^{-z/\delta_E}\cos z/\delta_E, \tag{4.3.20b}$$

或用总速度表示则有：

$$u=U(1-e^{-z/\delta_E}\cos z/\delta_E), \tag{4.3.21a}$$

$$v=Ue^{-z/\delta_E}\sin z/\delta_E. \tag{4.3.21b}$$

当 $z\to\infty$ 时，速度呈指数律迅速地趋于流体内部区域的无粘地转速度。直接受摩擦影响的区域具有艾克曼层厚度的量级，该厚度随 A_V 的增加而增大，但随旋转的加强而减小。旋转越强，直接受摩擦力影响的区域越小。对于快速的旋转流体，艾克曼层将是紧贴 $z=0$ 而的一个薄区域。必须注意 δ_E 与 U 无关。

用涡度概念很容易理解产生艾克曼层的物理平衡。若 ξ 和 η 是涡度的 x 分量和 y 分量，则在现在讨论的例子中，我们有

$$\xi=-\frac{\partial v}{\partial z}, \quad \eta=\frac{\partial u}{\partial z}, \tag{4.3.22}$$

所以（4.3.9a,b）对 z 求导数，立即给出涡度方程的简化形式，即

$$0=f\frac{\partial v}{\partial z}+A_V\frac{\partial^2\eta}{\partial z^2}, \tag{4.3.23a}$$

$$0=f\frac{\partial u}{\partial z}+A_V\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}. \tag{4.3.23b}$$

（4.3.23a,b）中最后一项均代表摩擦产生的涡度扩散，如果它们不受到抑制的话，那末在边界处，由于运动的摩擦阻滞作用所不断产生的涡度将充满流体内部。(4.3.23a,b)中与 f 成比例的项，代表如2.4节描述过的、因水平速度切变造成的行星涡丝之倾斜所引起的水平涡度之产生。艾克曼层的建立是作为来自边界的涡度扩散与行星涡度的补偿倾斜之间的平衡的结果。当接近边界时，u 应当从 U 减小到0，这就要求 $\eta\neq0$，从而要求 $v\neq0$，所以 η 的扩散可以由 $\partial v/\partial z$ 造成的涡管在 y 方向的倾斜所平衡。

图4.3.2给出速度分量 u 和 v 的廓线。远离边界处，速度完全在 x 方向上，这正是地转运动方向。当接近边界时，摩擦阻滞作用使 u 减小。然而，y 方向的压力梯度与 z 无关，因而只在无穷远处被科氏力的 y 分量平衡。当 u 减小时，此科氏力也减弱，而且在有 y 方向压力梯度时，必定产生该方向上的速度 v，后者使流体自高压流向低压，只受流体摩擦的阻滞。所以在有边界存在时，摩擦作用破坏了精确的地转平衡关系，并产生从高压穿过等压线而流向低压的运动。这意味着压力梯度力在艾克曼层中对流体作功。压力梯度力所作的功，为在有摩

擦耗散的情况下维持艾克曼层提供了必要的能量。艾克曼层中压力梯度力作功的速率$\dot{W}$是

$$\dot{W}=\int_0^\infty\left(-v\frac{\partial p}{\partial y}\right)dz=\frac{\rho U^2}{2}f\delta_E=\rho\frac{U^2}{2}\{2A_Vf\}^{1/2},\qquad(4.3.24)$$

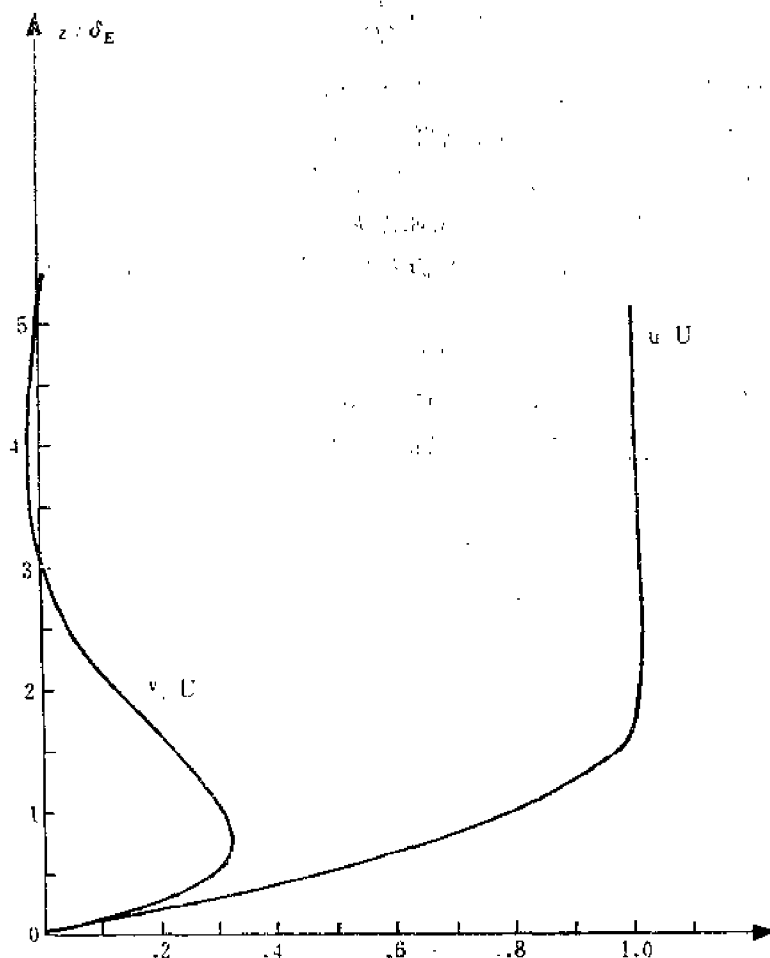


图4.3.2　在地转速度U方向上的速度分量u之廓线和在与U正交方向上的速度分量v之廓线。垂直坐标是以艾克曼层厚度δ_E为单位的距刚性表面的距离。

它表示为了维持艾克曼层而必须供给单位面积艾克曼层的能量速率。在我们刚才求解的问题中，地转流的能量通过某种未指定的方式而保持不变。但是我们现在看到，在有艾克曼层存在时，这隐含地要求有一个能源，以维持地转运动。以速度U运动的、深度为D的地转流体层，在单位面积上所具有的动能是

$$K=\rho\frac{U^2}{2}D,$$

且以速率$\dot{W}$向艾克曼层提供能量。除非有外界能源的支持，否则地转流必将通过粘性耗散而衰减，其时间尺度可以简单地估计为

$$\tau=\frac{K}{\dot{W}}=\left(\frac{D}{\delta_E}\right)f^{-1}=\frac{D}{(2A_Vf)^{1/2}}.\qquad(4.3.25)$$

仅当

$$\tau f=\frac{D}{\delta_E}=\left(\frac{D^2 f}{2A_V}\right)^{1/2}=E_V{}^{-1/2} \tag{4.3.26}$$

为大量时，地转能量的特征衰减时间才远大于旋转周期。无量纲数

$$E_V=2\frac{A_V}{fD^2} \tag{4.3.27}$$

为艾克曼数。我们在 2.8 节中曾看到，这个参数为小量，恰好是粘性力远小于科氏加速度的条件。现在我们看到这一条件可以等价地解释为：摩擦力非常小，足以使艾克曼层中由粘性耗散引起的自然衰减时间 τ 远大于旋转周期。我们将把衡量摩擦效应大小的时间 τ 称为"旋转减弱"(Spin-down)时间[1]。注意τ 与相对速度无关，只取决于 f 和 δ_E。

艾克曼层的另一个显著特点是，当接近边界时，速度矢量出现优美的旋转。图 4.3.3 给出作为 z/δ_E 的函数的速度矢量。注意，当 z 趋于零时，速度矢量端点画出一条精致的螺旋线，称之为艾克曼螺线。因为每一流体层都受到位于其下的流体层的摩擦阻滞作用，所以该层的速度由行星旋转而产生的响应是偏向它所受到的摩擦应力的右方。由于应力从一层传到另一层，所以速度也慢慢地转变其方向。实际上，当接近表面时，

$$\lim_{z\to 0}\frac{v}{u}=1, \tag{4.3.28}$$

所以速度矢量转到地转速度左方45°处。

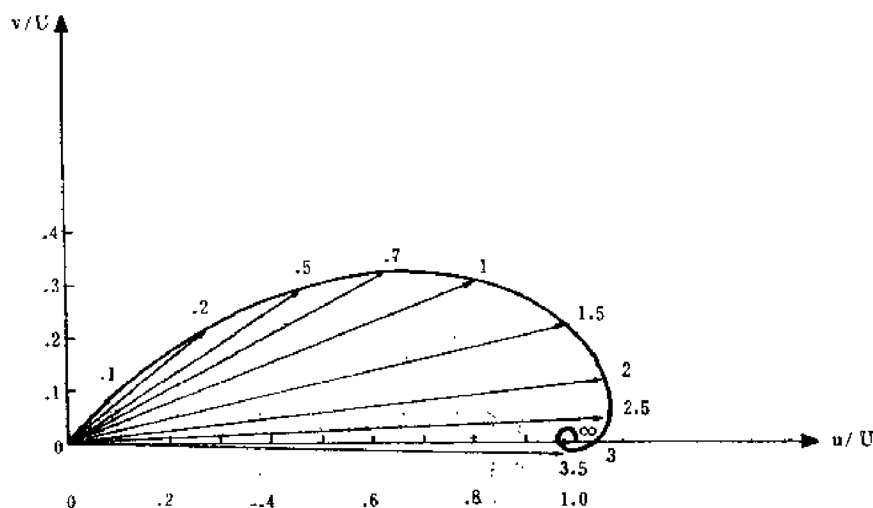


图4.3.3　艾克曼层中的速度矢量

速度矢量端点的轨迹构成艾克曼螺线。在螺旋线上给出了与各矢量对应的z/δ_E值。

为了以后的应用，我们在此推导两个附加的重要结果。根据 (4.3.21b) 式，总的穿越等压线的运动是

$$V_E=\int_0^\infty v\,dz=\frac{U\delta_E}{2}, \tag{4.3.29}$$

---

(1) τ也称为旋转加强(Spin-up)时间，此时它是指，为了达到有摩擦力存在时的平衡态所需要的时间。

而且方向是指向地转运动的左侧。刚性表面施加于流体的压力为

$$\boldsymbol{\tau}=-\rho A_V\left(\mathbf{i}\frac{\partial u(0)}{\partial z}+\mathbf{j}\frac{\partial v(0)}{\partial z}\right)=-\frac{A_V\rho}{\delta_E}U\{\mathbf{i}+\mathbf{j}\}. \tag{4.3.30}$$

而由摩擦力引起的艾克曼层中单位面积的总质量通量是

$$\mathbf{M}_E=\mathbf{i}\int_0^\infty \tilde{u}dz+\mathbf{j}\int_0^\infty \tilde{v}dz=\delta_E\frac{U}{2}(-\mathbf{i}+\mathbf{j}), \tag{4.3.31}$$

所以

$$\boxed{\mathbf{M}_E=\frac{\boldsymbol{\tau}\times\mathbf{k}}{\rho f}}, \tag{4.3.32}$$

式中 $\mathbf{k}$ 是垂直方向单位矢量。

因此，超过给定地转运动的总质量输送与施加于流体上的摩擦应力垂直，且指向其右方，如图 4.3.4 所示，这一重要结果必定与湍流应力的表达式无关。因为由定义，在艾克曼层的上界处摩擦力为零，所以作为一个整体而作用到艾克曼层上的仅有的力，是压力梯度力和下边界的摩擦应力。压力梯度力恰好被地转速度的科氏加速度所平衡。所以这就要求，摩擦应力在应力方向上平均地产生一个附加的科氏加速度。这又进而要求偏离地转速度的平均运动$\mathbf{M}_E$应与 $\boldsymbol{\tau}$ 垂直，$\mathbf{M}_E$只依赖于$\boldsymbol{\tau}$，而与湍流应力参数化的细节无关，这一点根据（4.3.32）式中没有给出任何与艾克曼层结构有关的量或取决于 A_V的特殊值这一事实，可以得到证实。

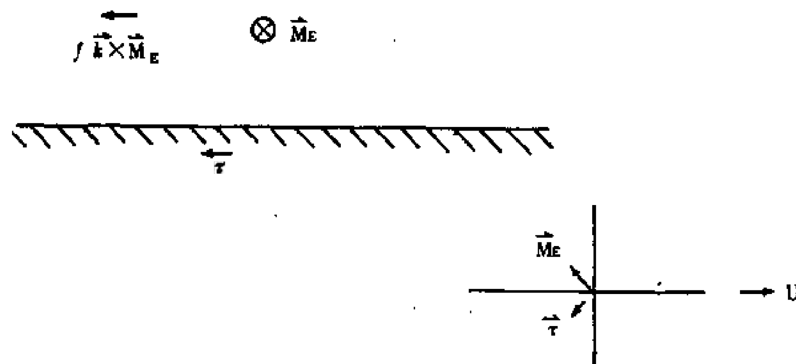


图4.3.4　艾克曼通量 $\mathbf{E}_E$ 和平面上的摩擦应力 τ 之间的关系
右下图用包含应力、通量和自由运动的地转速度U的平面图来说明这一关系。
注意$\mathbf{M}_E$是与速度偏离其地转值有关的总质量通量。

无论对于大气还是对于海洋，艾克曼层中穿越等压线的运动，都表示重要的动能耗散机制。正如 4.2 节所述，我们不能期望把这一简单理论应用于真实的湍流海洋和大气而作出具体预报，但是，有关摩擦区域中的耗散、应力和穿越等压线的运动等基本物理概念，却是普遍到超过模式范围的程度，因此这些概念可以对地转流与地表面的摩擦耦合给出一个很好的定性描述。

4.4 近于无摩擦的流动之性质

在多数重要情况下，A_V小到摩擦似乎可以完全忽略的程度（即$E_V\ll1$）。然而，可以预料固体表面上的无滑动条件仍要求A_V的值任意小但并非为零。因此，不论 A_V 多小，摩擦力必须在某个地方（很可能是在使用无滑动条件的边界附近）是重要的。这直接与运动方程的数

学结构有关。根据（4.3.1a,b,c）式，显然就导数而论，A_V是z的最高阶导数的系数。如果略去了与A_V成比例的项，那末方程的阶数降低了，并且方程不可能再满足原始方程所要求的那么多边界条件。也就是说，如果我们随便令$A_V=0$，那末我们必须预料到，不能既满足关于法向运动的运动学边界条件，又满足关于切向运动的摩擦无滑动条件，实际上，在上一章的无粘理论中，仅要求了关于垂直于流体表面的速度的运动学条件。但是假如我们不管A_V如何小，一定要使运动满足无滑动条件，那末唯一的途径是，当动力学变量随空间（至少在边界附近）变化足够大时，可保留必要的摩擦项。此时，最高阶导数与较低阶导数相比变得如此之大，以至于这些最高阶导数与它们的小系数之积，将保持与无摩擦项具有相同的量级。

这引起了几个问题。首先，如果A_V是小量但不为零，那末无粘理论在什么程度上是成立的？第二，即使摩擦是小量，但在对流体作动力学描述时，怎样才能把摩擦效应考虑进去？

为了给出这些方程和概念的具体的表达式，让我们来考虑下面的例子。同上节一样，我们仍考察旋转的均质不可压缩流体，但现在流体被限制于如图4.4.1所示的相距为$2D$的两个无限大的水平面之间。同样也如4.3节那样，考察水平均匀（即与x和y无关）的运动。根据与导出（4.3.8）式相同的理由，在此我们可令垂直速度W为零。水平运动方程仍为

$$-fv=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+A_V\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \tag{4.4.1a}$$

$$fu=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+A_V\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \tag{4.4.1b}$$

$$0=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-g. \tag{4.4.1c}$$

和以前一样，从（4.4.1c）式得出$\partial p/\partial x$和$\partial p/\partial y$必然与z无关。其次，因u和v与x、y无关，从（4.4.1a,b）可知，水平压力梯度也必与x、y无关。因而$\partial p/\partial x$和$\partial p/\partial y$是常数且可任意选定。在有物理意义的情况下，它们相当于在一个大而有限的区域上的外加总压力差。不失一般性，我们考虑压力差沿y方向的情况，即令

$$\frac{\partial p}{\partial x}=0, \tag{4.4.2a}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y}=\rho f U_0. \tag{4.4.2b}$$

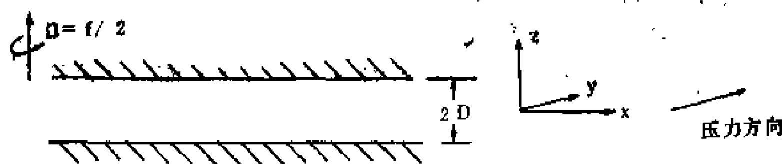


图4.4.1　在旋转系统中讨论渠道运动时的模式。压力梯度力的方向平行于y轴。

第二式仅定义了一个数U_0，它作为压力梯度强度的一个度量，具有速度的量纲，该式不是地转近似。再次引入无量纲变量是很有用的。定义

$$z'=\frac{z}{D},\ u'=\frac{u}{U_0},\ v'=\frac{v}{U_0}. \tag{4.4.3}$$

于是运动方程变为

$$-v=\frac{E_V}{2}\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \tag{4.4.4a}$$

$$u=1+\frac{E_V}{2}\ \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}. \tag{4.4.4b}$$

为了简洁起见，式中已将撇号去掉。不带撇的变量现在是无量纲变量，而有量纲的变量用星号标识。于是有量纲的速度为

$$u_*=U_0 u,\ v_*=U_0 v, \tag{4.4.5}$$

等等。参数 E_V 是艾克曼数，即

$$E_V=2\frac{A_V}{fD^2}, \tag{4.4.6}$$

我们特别感兴趣的是E_V为小量的情况。

方程（4.4.4a，b）的恰当的边界条件是无滑动条件：

$$z=\pm 1\text{处},\ u=v=0, \tag{4.4.7}$$

它与E_V的大小无关。

如果E_V是小量，那末我们可以假设，至少在最低阶上，与E_V成比例的项可以忽略。这就给出：

$$v=0,\ u=1, \tag{4.4.8}$$

该解实际上对任意E_V都满足完整的方程式(4.4.4a,b）但它全然不可能满足（4.4.7）式。近似式（4.4.8）使微分方程的阶数降低，且使近似解（4.4.8）是不完全的解，但如下面将看到的，它并不是完全不切题意的解。对于该方程的数学结构，确有这类破坏的近似，这是方程的奇异摄动；并且我们必须力图了解，怎样才能取极限$E_V\to 0$，而仍满足完整的边界条件。幸好这个问题十分简单，以至对任意的E_V，我们可求到它的精确解。在（4.4.4a,b）之间消去u得到

$$E_V^2\frac{d^4 v}{dz^4}+4v=0. \tag{4.4.9}$$

因为边界条件对于z是对称的，故只需考虑对称的解，v的对称的通解是

$$v=A\sinh kz\sin kz+B\cosh kz\cos kz, \tag{4.4.10}$$

式中

$$k=E_V^{-1/2}. \tag{4.4.11}$$

从（4.4.10）和（4.4.4b),可以得到u的解为

$$u=1+A\cosh kz\cos kz-B\sinh kz\sin kz. \tag{4.4.12}$$

应用（4.4.7）式来确定A、B。经过少量的代数运算之后，可得u和v：

$$v=\frac{\sinh k(1-z)\sin k(1+z)+\sinh k(1+z)\sin k(1-z)}{\cos 2k+\cosh 2k},$$

$$u=1-\frac{\cos k(1+z)\cosh k(1-z)+\cosh k(1+z)\cos k(1-z)}{\cos 2k+\cosh 2k}. \tag{4.4.13}$$

显然，u和v满足$z=1$处$u=v=0$的条件。对于E_V很大的情况，即k很小的高摩擦极限情况，把三角函数和双曲函数展开成k的泰勒级数后，(4.4.13) 式变为：

$$v \approx k^2(1-z^2)+\cdots\cdots,$$

$$u \approx \frac{k^4}{6}(1-z^2)(5-z^2)+\cdots\cdots, \tag{4.4.14}$$

用有量纲的单位表示，上式就是

$$v_* = -\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)\frac{D^2-z_*^2}{2A_V\rho}, \tag{4.4.15}$$

$$u_* = -\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)(D^2-z_*^2)(5D^2-z_*^2)\frac{f}{24\rho A_V^2}. \tag{4.4.16}$$

对于摩擦很大（即E_V很大）的情况，运动主要在y方向，且顺着压力梯度方向。v的形式是无旋渠道流的抛物线剖面。运动分量u很弱，与v相比量级为$O(k^2)$，并指向顺压力梯度方向的右方，这是科氏力相对较弱的结果。但我们所关心的是另一种极限情况，即E_V很小（k很大）的情况，在这种极限情况下，我们有

$$\cosh k(1+z) \approx \sinh k(1+z) \approx \frac{e^{k(1+z)}}{2} \tag{4.4.17}$$

等近似关系，所以

$$v \approx e^{-k(1+z)}\sin k(1+z)+e^{-k(1-z)}\sin k(1-z),$$

$$u \approx 1-e^{-k(1+z)}\cos k(1+z)-e^{-k(1-z)}\cos k(1-z). \tag{4.4.18}$$

注意，除非z接近-1，否则形如$e^{-k(1+z)}$的指数项完全可以略去；同样，除非z非常接近1，否则形如$e^{-k(1-z)}$的项也可略去。渐近解 (4.4.18) 有简单的物理解释。它是由x方向的均匀地转运动（即$u=1$），加上$z=1$处的艾克曼薄层及$z=-1$处的另一个艾克曼层参见 (4.3.21a,b) 式组成的。也就是说，在$z=-1$附近，象$e^{-k(1-z)}$这样的项的量级为$O(e^{-2k})$，由于它们非常小，所以

$$u=1-e^{-k(1+z)}\cos k(1+z),$$

$$v=e^{-k(1+z)}\sin k(1+z), \tag{4.4.19}$$

这正是艾克曼解。$z=1$附近也有类似的特性。图 4.4.2 给出解的示意图。注意，

$$k=\frac{D}{\delta_E}=\left(\frac{2A_V}{fD^2}\right)^{1/2}. \tag{4.4.20}$$

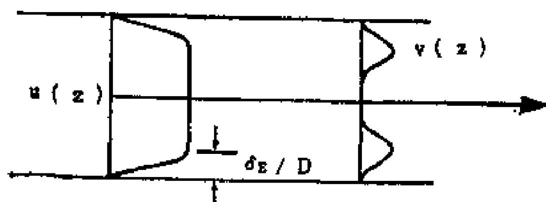


图4.4.2　在E_V很小的极限情况下，$u(z)$和$v(z)$的示意图

现在考虑不恰好位于边界上的任意固定点z，考察解 (4.4.18) 在E_V减小时的性质。不论z多么靠近边界，对于充分小的E_V，点z总位于两个艾克曼层以外。换句话说，对于小的E_V，解的一种合理极限是

$$\lim_{\substack{E_V\to 0\\ z\text{固定}}}{}_1\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}. \tag{4.4.21}$$

我们看出，这一极限过程（称它为$\lim_1$）得到的结果是奇异解 (4.4.8)。尽管 (4.4.8) 是不完全的解，但在边界以外的区域中，对于很小的E_V，它们肯定是极好的近似解。因为它们仅

在艾克曼层之外才是恰当的解，所以只能预料它们不满足关于切向速度的摩擦边界条件。

当 $E_V \to 0$ 时，为了使一个点能保持在艾克曼层内，该点必须随 $E_V \to 0$ 而离边界越来越近，例如，为了使一点能保持在下边界层中，且离边界之距离为零点几艾克曼厚度，必须取固定值

$$\zeta=(1+z)k=(1+z)\frac{D}{\delta_E}, \tag{4.4.22}$$

所以，当 $\delta_E/D \to 0$ 时，z 接近 $z=-1$ 的下边界，即 $z=-1+\zeta\delta_E/D$. 因此还有第二种极限过程（称它为 $\lim_2$），定义为

$$\lim_{\substack{E_V\to 0\\ \zeta\text{固定}}}{}_2\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-e^{-\zeta}\cos\zeta\\ e^{-\zeta}\sin\zeta\end{pmatrix}, \tag{4.4.23}$$

如图4.4.3所示，它适于描写 $z=-1$ 附近的解。第三种极限 $\lim_3$（对于该极限，当 $E_V \to 0$ 时，$\bar{\zeta}=(1-z)k$ 保持固定），给出 $z=1$ 附近的类似表达式，即

$$\lim_{\substack{E_V\to 0\\ \bar{\zeta}\text{固定}}}{}_3\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-e^{-\bar{\zeta}}\cos\bar{\zeta}\\ e^{-\bar{\zeta}}\sin\bar{\zeta}\end{pmatrix}. \tag{4.4.24}$$

哪一种极限是正确的？回答是所有这些极限都是正确的极限，只不过分别是不同运动区域中解的极限而已。

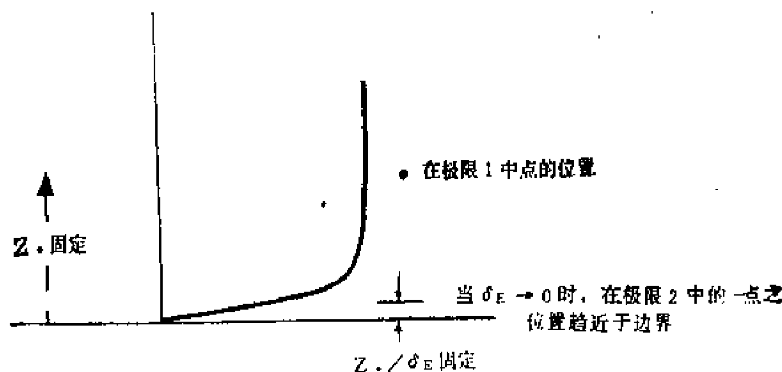


图4.4.3　在极限1($\lim_1$)中，一个点的位置在固定的 z_* 处。在极限2($\lim_2$)中，它的位置在固定的 z_*/δ_E 处，因此当 $E_V \to 0$ 时，它趋向于边界

对于内区，奇异极限 $\lim_1$（对应于完全忽略粘性的情况）给出正确的内区无粘解。其他两个极限给出两个摩擦区域的解。在每个摩擦区域中，可以看到对内解的修正由一个伸长变量，即 ζ 的函数给出。也就是说，在边界层中运动不是 z_*/D 的函数，而是以非常小的边界层厚度 δ_E 为尺度来量度的垂直坐标的函数。这意味着当 $\delta_E \to 0$ 时，这些解随坐标 z_* 的变化是如此之快，以至于即使 $A_V \to 0$，摩擦力也仍为局地重要的因子。例如，利用（4.4.22）式，我们有

$$\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\partial v}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial z}=\frac{D}{\delta_E}\frac{\partial v}{\partial z}, \tag{4.4.25}$$

所以对任何 $E_V \to 0$，有

$$E_V\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial\zeta^2}A_V\frac{D^2}{\delta_E^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial\zeta^2}=O(1).\tag{4.4.26}$$

这种对小摩擦参数包括多极限的奇异性质，完全是近于无粘运动的特征。在这个简单的例子中不太清楚的是，我们怎样能够容易地利用这一性质去寻找更复杂的问题之解。清楚地表现出来的基本简化是，在具有不同物理平衡的区域可以孤立地分别加以处理，然后再把它们匹配在一起。利用这一物理事实，正是下一节中我们要用例子来讨论的奇异摄动理论的基本思想。

4.5 边界层理论

上一节描述的精确解指出，对于 $E_V\ll 1$，可以预料摩擦力的直接影响，仅局限于靠近流体表面附近的薄层中。在本节里我们将看到，怎样可在不再能找到精确解的更为普遍的问题中应用这一概念，以研究摩擦对准地转运动的影响。

为了巩固概念，让我们再次考虑位于相距 $2D$ 的两个平面之间的流体运动。在旋转流体中下平面是固定的，而上平面是运动的，它给予上表面附近的流体之速度为

$$\begin{aligned}u_{*T}&=u_{*T}(x_*,y_*),\\ v_{*T}&=v_{*T}(x_*,y_*).\end{aligned}\tag{4.5.1}$$

星号表示有量纲的量。上表面的运动将仅引起因流体的摩擦耦合而产生的流体运动。由于 u_{*T} 和 v_{*T} 是水平位置的函数，因此，我们无法得到精确解。这里所面临的主要问题是：(1)这个摩擦强迫作用是怎样传给流体的？(2)如果强迫作用是由摩擦引起的话，那末准地转运动的无粘理论是恰当的吗？(3)如何计算该运动？这个比较简单的问题，包括了我们在提出较真实的海洋或气象模式之前所必须了解的所有重要的概念。

对均质不可压流体，(4.2.12) 式仍是描写它的运动方程。我们设想 u_{*T} 和 v_{*T} 是给定的，它们具有某个特征值 U，例如它们在平面上的最大值。同样，令 u_{*T} 和 v_{*T} 的水平变化的典型尺度是在一个长度尺度 $O(L)$ 上发生的速度变化。引入以下无量纲变量（不带撇号）似乎是合理的：

$$\begin{aligned}&(x_*,y_*)=L(x,y),\quad z_*=Dz,\\ &(u_*,v_*)=U(u,v),\quad w_*=U\frac{D}{L}w,\\ &t_*=\left(\frac{L}{U}\right)t,\quad p_*=-\rho g z_*+\rho fULp.\end{aligned}\tag{4.5.2}$$

注意 z_* 的尺度与水平坐标不同，因为可以预期垂直变化发生在尺度 D 上，而不是 L 上。和浅水理论一样，垂直速度的尺度之确定，是假定了形态比 D/L 为小量意味着 $w_*/u_*=O(D/L)$。这也有一种预先保证连续方程中各项的量级相同的作用，即用无量纲单位表示为

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0.\tag{4.5.3}$$

即使垂直质量通量是在一个量级为 $O(L^2)$ 的大面积上，但其大小的量级是 $O(w_*L^2)$，即 $O(UDL)$。这恰好等于深度为 D、横跨该区域周界 $O(L)$ 上的水平质量通量的量级。尺度假设 (4.5.2) 式保证了对质量平衡的性质没有事先的限制条件。

所选的时间尺度是平流时间尺度 L/U，但是目前还不清楚这一时间尺度是否比旋转加强时间尺度好。下面将会看到，这取决于比值

$$r=\frac{L}{U\tau}, \tag{4.5.4}$$

并且为了简单起见，我们正式假定

$$r=O(1), \tag{4.5.5}$$

即预先假定，可以与 f^{-1} 相比的旋转加强时间尺度和平流时间尺度有相同的量级。这使我们的求解，预先不受摩擦过程(而不是平流过程)起主导作用这一限制。当理论建立起来以后，则可以考察 r 为大值或小值的情况。

气压尺度的规定，是基于水平压力梯度与科氏加速度同量级这一事实。正如我们已经看到的，只要罗斯贝数不大，这一事实肯定是对的。

如果用 (4.5.2) 式把动量方程表示为无量纲形式，则可以得到：

$$\varepsilon\left\{\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right\}-v$$

$$=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{E_V}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{E_H}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{4.5.6a}$$

$$\varepsilon\left\{\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right\}+u$$

$$=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{E_V}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\frac{E_H}{2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right), \tag{4.5.6b}$$

$$\delta^2\varepsilon\left\{\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right\}$$

$$=-\frac{\partial p}{\partial z}+\delta^2\left[\frac{E_V}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+\frac{E_H}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right], \tag{4.5.6c}$$

式中

$$\begin{aligned}
&\varepsilon=\frac{U}{fL}\text{，罗斯贝数，}\\
&\delta=\frac{D}{L}\text{，形态比，}\\
&E_V=2\frac{A_V}{fD^2}\ \text{“垂直”艾克曼数，}\\
&E_H=2\frac{A_H}{fL^2}\text{，“水平”艾克曼数。}
\end{aligned} \tag{4.5.7}$$

垂直方向运动方程说明，当 δ 是小量时，静力平衡成立。实际上，在重要情况下每个参数 ε、δ、E_V 和 E_H 都是小量，而系统化的尺度分析的主要好处是它使我们能清楚地看出各种较小的物理力的相对重要性，每一项小物理力，对于解决地转平衡退化所必需考虑的高阶动力学问题来说，可能都有潜在的贡献。

边界条件是

$$z=0.1处,\ w=0, \tag{4.5.8}$$

$$\begin{cases} z=0处,\ u=v=0, \\ z=1处, \begin{cases} u=u_T(x,y), \\ v=v_T(x,y). \end{cases} \end{cases} \tag{4.5.9}$$

第一个条件 (4.5.8) 是 $z=0$、1 的边界处法向运动为零的运动学条件。无粘流体满足这个条件。条件 (4.5.9) 仅当流体中存在小摩擦力时才能被满足，而且实际上在这种情况下，流体只有通过上表面的摩擦曳力才能发生运动。为简单起见，我们假设外加速度 (u_T、v_T) 是水平无辐散的。

现在的问题仍然是极其难解的，除非直接使用小量 ε、δ、E_V 和 E_H。

每个变量的解 (例如u)，将是x、y、z、t以及ε、δ、E_V、E_H的函数，即

$$u=u(x,y,z,t,\varepsilon,\delta,E_V,E_H). \tag{4.5.10}$$

对于小参数值，我们可以把 u 展为小参数的级数，即

$$u=u_0(x,y,z,t)+\Delta(\varepsilon,\delta,E_V,E_H)u_1(x,y,z,t)+\cdots\cdots, \tag{4.5.11}$$

式中Δ是小参数，它是ε、δ、E_V和E_H的函数。目前除了知道当ε、δ、E_V和E_H趋于零时，Δ必须趋于零以外，我们还不知道Δ具体地是什么。参数展开的特定形式，现在并不重要。重要的是 (4.5.11) 式通过取极限过程定义了 u_0：

$$u_0=\lim_{\substack{(x,y,z,t)固定 \\ E_V,\varepsilon,\delta,E_H\to 0}} u \tag{4.5.12}$$

既然取此极限中使z固定而令 $E_V\to 0$，所以它必对应于上节说过的 $\lim_1$。因此我们可以推测，展开式 (4.5.11) 将只给出适合于内区运动的表达式。我们预料 u_0 和 v_0 本身不会满足 (4.5.9) 式。尽管如此，我们也曾看到内区极限给出了内区运动动力学的恰当的描写，所以我们首先来考察 (4.5.11) 式的结果。如果把每个变量都展为 (4.5.11) 式那样的级数，那末 (4.5.6) 和 (4.5.3) 式的一阶项给出无粘内区运动方程：

$$u_0=-\frac{\partial p_0}{\partial y}, \tag{4.5.13a}$$

$$v_0=\frac{\partial p_0}{\partial x}, \tag{4.5.13b}$$

$$0=\frac{\partial p_0}{\partial z}, \tag{4.5.13c}$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}+\frac{\partial w_0}{\partial z}=0. \tag{4.5.14}$$

内区的$O(1)$水平速度是地转的和静力平衡的。从 (4.5.13c) 可知u_0和 v_0 必然与z无关，所以除非$u_T=v_T=0$，否则u_0和v_0显然不满足 (4.5.9) 式。如果在(4.5.14)式中使用 (4.5.13) 式，则可以得到

$$\frac{\partial w_0}{\partial z}=0, \tag{4.5.15}$$

故 w_0 也与 z 无关。$O(1)$内区运动是静力平衡的和地转的，满足泰勒-普劳德曼定理，而且是完全未知的。单从物理上考虑，显然只有借助考察$z=0$和$z=1$附近的摩擦区域，该问题中的强迫项才能参与、并帮助确定出地转运动来。

为了考察$z=0$附近的边界层区域，我们需要有（例如）对小参数E_V展开u的方法，以使我们能保持在摩擦层中讨论问题。也就是说，象（4.5.12）式那样，我们需要通过一个对于小量E_V仍能保持摩擦力是重要因子的取极限过程来定义摩擦层中的 u_0。正象我们在前一节的精确解中所看到的那样，这意味着 u 在摩擦层中是 z 的速度函数，即 u 的变化快到使摩擦力成为局部重要因子的程度。也就是说，在摩擦层中 u 确实是 z 的伸长坐标的函数。这种伸长，使新的边界层坐标 ζ，在边界层厚度变得任意薄的过程中保持为$O(1)$。

表达上述事实的另一种方法是，干脆承认在摩擦层里，(4.5.2) 式所假设的动力场随尺度为D的z_*而变化是不对的。在摩擦层中，动力场在 z 方向上的变化发生在一个小得多的尺度上。在对完整的运动方程作近似之前，应对该方程重新定义尺度，赋予一个新的垂直坐标。无论从上述两种观点中的那一种出发，我们都一定能找到一个新的坐标

$$\zeta=\frac{z}{l}, \tag{4.5.16}$$

式中 l 是无量纲的边界层厚度。有量纲的厚度为

$$l_*=Dl. \tag{4.5.17}$$

那末 l 是什么呢？确定 l 的唯一途径是要求坐标变换（4.5.16）能保留摩擦项。如果现在使用ζ来改写（4.5.6）和(4.5.3)式（即每个因变量考虑为x、y和ζ的函数)，那末有

$$\varepsilon\left\{\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{w}{l}\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right\}-v$$

$$=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{E_V}{2l^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}+\frac{E_H}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{4.5.18a}$$

$$\varepsilon\left\{\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{w}{l}\frac{\partial v}{\partial \zeta}\right\}+u$$

$$=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{E_V}{2l^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2}+\frac{E_H}{2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right), \tag{4.5.18b}$$

$$\delta^2\varepsilon\left\{\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{w}{l}\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right\}$$

$$=-\frac{1}{l}\frac{\partial p}{\partial \zeta}+\frac{\delta^2}{l^2}\left[\frac{E_V}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2}\right]+\delta^2\frac{E_H}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \tag{4.5.18c}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{l}\frac{\partial w}{\partial \zeta}=0. \tag{4.5.18d}$$

为了使与E_V成比例的摩擦项和量级为$O(1)$的科氏加速度项同量级，我们选

$$l=E_V^{1/2}, \tag{4.5.19}$$

故有

$$l_*=DE_V^{1/2}=\delta_E.$$

因此，尽管艾克曼解不再是精确解，但艾克曼层厚度仍是恰当的厚度尺度。在边界层

里，每个变量可以写为

$$u=\tilde{u}(x,y,\zeta,t,E_V,E_H,\varepsilon,\delta)$$
$$=\tilde{u}_0(x,y,\zeta,t)+\cdots\cdots, \qquad (4.5.20)$$

式中记号"～"表示在 $z=0$ 附近的边界层中的量。(4.5.20) 式中的小参数展开式等价于极限 $\lim_2$，即对固定的 $\zeta=z/E_V^{1/2}$，当 $E_V\to 0$ 时的极限。

下面考虑连续方程 (4.5.18d)。由 (4.5.19) 式可得

$$\frac{\partial\tilde{w}}{\partial\zeta}=-E_V^{1/2}\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}+\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y}\right), \qquad (4.5.21)$$

所以 $\partial\tilde{w}/\partial\zeta$ 的量级不大于 $O(E_V^{1/2})$。事实上若 $\tilde{w}$ 的量级大于 $O(E_V^{1/2})$，便会要求

$$\frac{\partial\tilde{w}}{\partial\zeta}=0, \qquad (4.5.22)$$

如因在 $z=\zeta=0$ 处垂直速度为零，从而推知 $\tilde{w}$ 应当恒等于零。这一论证不能直接用于(4.5.15)式中的 w_0，因为内解在应用边界条件的边界处是不成立的，所以应当重新规定 $\tilde{w}$ 的尺度。在边界层中我们有

$$\tilde{w}(x,y,\zeta,t,\varepsilon,E_V,E_H,\delta)=E_V^{1/2}\tilde{W}(x,y,\zeta,t,\varepsilon,E_V,E_H,\delta)$$
$$=E_V^{1/2}\{\tilde{W}_0(x,y,\zeta,t)+\cdots\cdots\}. \qquad (4.5.23)$$

这相当于承认，对边界层而言，恰当的运动形态比不是 D/L，而是 δ_E/L。因此

$$w_*=O\left(U\frac{\delta_E}{L}\right)=U\frac{D}{L}\frac{\delta_E}{D}=E_V^{1/2}\frac{UD}{L}. \qquad (4.5.24)$$

如果把 $\tilde{u}$、$\tilde{v}$、$\tilde{w}$ 和 $\tilde{p}$ 展开为 ε、E_V、E_H 等小量的级数，则 $O(1)$ 变量必须满足

$$-\tilde{v}_0=-\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\tilde{u}_0}{\partial\zeta^2}, \qquad (4.5.25a)$$

$$\tilde{u}_0=-\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\tilde{v}_0}{\partial\zeta^2}, \qquad (4.5.25b)$$

$$0=-\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\zeta}, \qquad (4.5.25c)$$

及

$$\frac{\partial\tilde{W}_0}{\partial\zeta}=-\left(\frac{\partial\tilde{u}_0}{\partial x}+\frac{\partial\tilde{v}_0}{\partial y}\right). \qquad (4.5.26)$$

只要罗斯贝数和艾克曼数与 1 相比是小量，边界层中的最低阶方程就和水平均匀运动的艾克曼层中的方程相同。在 x 和 y 方向上的变化尺度与垂直方向的变化尺度相比是如此之小，以至于在任何水平位置上，精确到最低阶的动力学不能分辨出动力场在水平方向上的差异。这是使用边界层概念所得到的重要简化之一。

由于

$$0=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\zeta}=\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial x}, \qquad (4.5.27)$$

所以 (4.5.25c) 意味着 $\partial\tilde{p}_0/\partial x$ 和 $\partial\tilde{p}_0/\partial y$ 必定与 ζ 无关。

考虑任一变量，例如压力 p。对 p 有两种表示：一种适用于内区(p_0)，一种适用于边界层

内($\tilde{p}_0$)。当我们离开边界层时，$\tilde{p}_0$一定在边界层边缘上慢慢地过渡为 p_0。这意味着当 ζ 很大时，$\tilde{p}_0$ 必光滑地变为 z 很小时的p_0，即

$$\lim_{z/l\to\infty}\tilde{p}_0=\lim_{z\to 0}p_0 . \tag{4.5.28}$$

为了保证我们得到的近似解具有完整方程的解所应有的光滑性质，上述匹配原则是一个基本的组成部分。这些解可以变化很快，但它们必须以光滑的解析性质方式过渡。因为p_0和$\tilde{p}_0$分别与z和ζ无关，可以得出在边界层中对任何ζ有

$$\begin{aligned}\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial x}&=\frac{\partial p_0}{\partial x}=v_0(x,y),\\ \frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial y}&=\frac{\partial p_0}{\partial y}=-u_0 ,\end{aligned}\tag{4.5.29}$$

所以，艾克曼层中的水平压力梯度是由内区的水平压力梯度给出的。内压力施于边界层上，因此，(4.5.25a,b)式变为

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\ \frac{\partial^2\tilde{u}_0}{\partial\zeta^2}+\tilde{v}_0&=v_0(x,y),\\ \frac{1}{2}\ \frac{\partial^2\tilde{v}_0}{\partial\zeta^2}-\tilde{u}_0&=-u_0(x,y).\end{aligned}\tag{4.5.30}$$

(4.5.30) 式的解将是上一节的艾克曼层解。这些解可以满足$z=0$处的无滑动条件，即

$$\begin{aligned}\tilde{u}_0&=u_0(x,y)[1-e^{-\zeta}\cos\zeta]-v_0(x,y)e^{-\zeta}\sin\zeta,\\ \tilde{v}_0&=v_0(x,y)[1-e^{-\zeta}\cos\zeta]+u_0(x,y)e^{-\zeta}\sin\zeta,\end{aligned}\tag{4.5.31a}$$

或写为矢量形式

$$\tilde{\mathbf{u}}_0=\mathbf{u}_0(1-e^{-\zeta}\cos\zeta)+(\mathbf{k}\times\mathbf{u}_0)e^{-\zeta}\sin\zeta \tag{4.5.31b}$$

式中 k 是垂直方向单位矢量。注意，正的 u_0 对 $\tilde{v}_0$产生一个正的贡献（在 y 方向沿压力梯度方向的运动)，而正的v_0对$\tilde{u}_0$产生负的贡献，这是因为$\partial p_0/\partial x>0$，沿压力梯度的运动必须是在负$x$方向上。这些艾克曼解又一次说明匹配原则。例如，让我们用内区变量 z 来写出$\tilde{u}_0$：

$$\tilde{u}_0=u_0(x,y)[1-e^{-zE_V^{-1/2}}\cos zE_V^{-1/2}]-v_0(x,y)e^{-zE_V^{-1/2}}\sin zE_V^{-1/2}. \tag{4.5.32}$$

对于固定的z，当 $E_V{}^{1/2}\to 0$ 时，它是内极限

$$\tilde{u}_0\to u_0(x,y).$$

注意，对于固定的 z，$E_V{}^{1/2}\to 0$ 的极限，意味着$\zeta\to\infty$，这是因为 $\zeta=z/E_V{}^{1/2}$；而对于固定的ζ，$E_V{}^{1/2}\to 0$ 则意味着 $z\to 0$。所以匹配原则 (4.5.28) 式也表示，如果用内区变量表示边界层的解，同时用边界层变量表示内区解，那末在解光滑地过渡时，随后的极限 $E_V\to 0$，一定给出相同的结果[1]，即

$$\lim_{\substack{z\text{固定}\\E_V{}^{1/2}\to 0}}\tilde{p}_0(z/E_V{}^{1/2})=\lim_{\substack{\zeta\text{固定}\\E_V{}^{1/2}\to 0}}p_0(\zeta E_V{}^{1/2}) \tag{4.5.33}$$

现在我们把注意力转到由 $\tilde{w}_0$ 给出的 $O(E_V{}^{1/2})$垂直速度的计算上。即使该速度为小量，但它在行星涡丝上产生的涡管伸缩可以使它成为整个流体层动力学中的一个重要因子，由于

(1) 虽然这种形式的匹配原则对此问题已足够，但当解包含 ζ 的代数幂时，匹配原则必须略有修改。对此问题的讨论可参阅Cole(1968)。

现在已知$\tilde{u}_0$和$\tilde{v}_0$，故从(4.5.26)式可得

$$\frac{\partial \tilde{w}_0}{\partial \zeta} = -\left(\frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}_0}{\partial y}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y}\right) e^{-\zeta} \sin \zeta. \qquad (4.5.34)$$

或者

$$\widetilde{W}_0(x, y, \zeta) = -\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y}\right\} e^{-\zeta}[\cos \zeta + \sin \zeta] - C(x, y), \qquad (4.5.35)$$

式中$C(x, y)$是水平位置的任意函数。然而根据（4.5.8）式，在$\zeta = 0$处，$\widetilde{W}_0$必须为零。这条件可确定$C(x, y)$，故

$$\widetilde{W}_0(x, y, \zeta) = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y}\right\}\{1 - e^{-\zeta}[\cos \zeta + \sin \zeta]\}, \qquad (4.5.36)$$

其图形如图4.5.1所示。一个值得注意的重要的关键性问题是，当$\zeta \to \infty$时（即在边界层的上边缘处），

$$\widetilde{W}_0(x, y, \infty) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y}\right) \equiv \frac{1}{2}\zeta_0. \qquad (4.5.37)$$

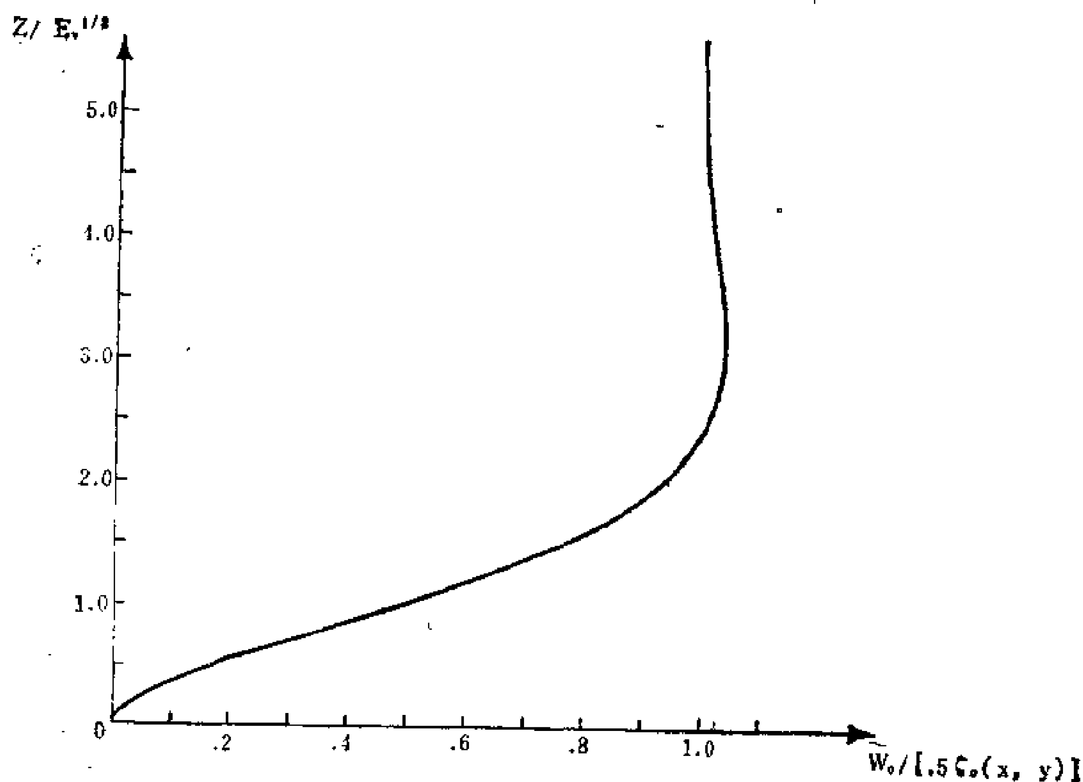


图4.5.1　艾克曼层中的垂直速度廓线，其量值已用地转涡度标准化，图上的垂直坐标是离边界的距离（以δ_E为单位）

所以当$O(1)$内区涡度$\zeta_0(x,y)$存在时，有一个从艾克曼层抽吸出来而进入内区的小垂直速度$O(E_V^{1/2})$。抽吸作用的物理原因是在边界层中有从高压穿过等压线向低压的运动。考虑如图4.5.2所示的情形。一个气旋区（即$\zeta_0>0$的正涡度区）位于$z=0$的平面上。因为内区运动是地转平衡的，所以涡度中心位于低压处。我们在前面曾注意到，$O(1)$速度的穿越等压线运动将会发生，并被压力梯度力推向涡旋中心。如（4.3.29）式所指示，辐合的质量通量量级是速度乘以艾克曼层厚度，用无量纲单位表示是$1\times E_V^{1/2}$。由于底边界是不能渗透的，所以流体只有在宽度为$O(1)$的涡旋区域上以$O(E_V^{1/2})$的垂直速度上升并进入内区。反气旋高压中心（$\zeta_0<0$）将在艾克曼层中使流体沿径向朝外辐散，把流体从上面的内区抽吸到边界层中。

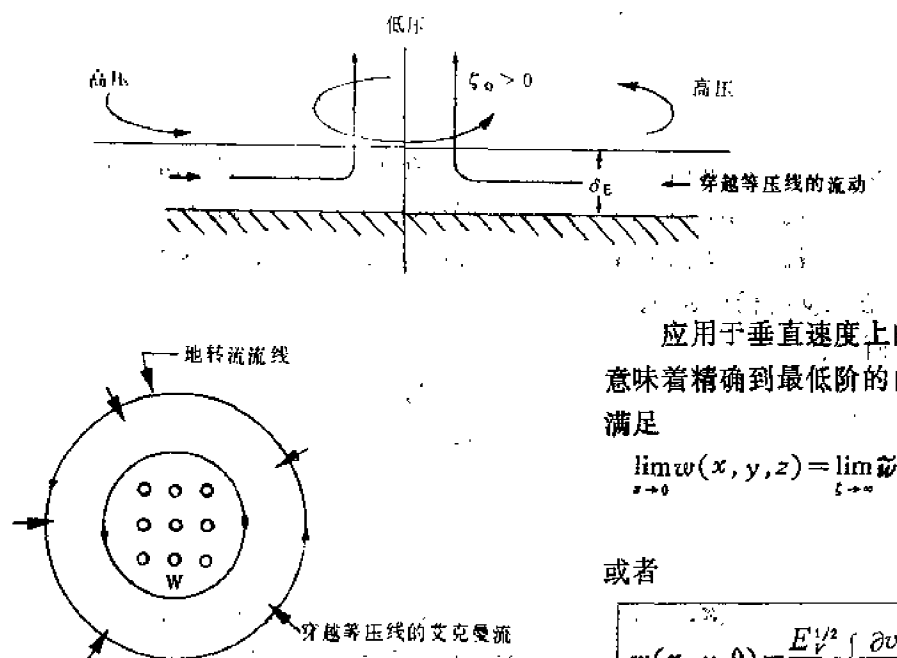


图4.5.2　低压中心（$\zeta_0>0$）在艾克曼层产生穿越地转流线的质量辐合，因此有一个垂直通量进入内区。

应用于垂直速度上的匹配原则，意味着精确到最低阶的内区垂直速度满足

$$\lim_{z\to 0} w(x,y,z)=\lim_{\zeta\to\infty}\tilde{w}(x,y,\zeta),\tag{4.5.38}$$

或者

$$\boxed{w(x,y,0)=\frac{E_V^{1/2}}{2}\left\{\frac{\partial v_0}{\partial x}-\frac{\partial u_0}{\partial y}\right\}}.\tag{4.5.39}$$

所以下艾克曼层抽吸效应产生的垂直速度，确定了内区运动的下边界条件。因为内区运动基本上是无粘的，所以边界条件加在垂直于边界的内区速度上。薄边界层的作用是把外加的切向速度的边界条件，转变为关于内区运动的更为合适的法向运动条件。

上表面处艾克曼层的分析，得出同样的结论。我们引入边界层坐标：

$$\tilde{\zeta}=\frac{1-z}{E_V^{1/2}}.\tag{4.5.40}$$

注意，对于固定的$\tilde{\zeta}$，$E_V^{1/2}\to 0$的极限对应于$z\to 1$；而保持z固定令$E_V^{1/2}\to 0$的极限过程使得$\tilde{\zeta}\to+\infty$，如果所有的因变量均写为x，y和$\tilde{\zeta}$的函数，并对z的导数用

$$\frac{\partial}{\partial z}=-\frac{1}{E_V^{1/2}}\frac{\partial}{\partial\tilde{\zeta}}\tag{4.5.41}$$

来表示，那末（4.5.6）式的$O(1)$项给出

$$-\hat{v}_0=-\frac{\partial \hat{p}_0}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \hat{u}_0}{\partial \zeta^2}, \tag{4.5.42a}$$

$$\hat{u}_0=-\frac{\partial \hat{p}_0}{\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \hat{v}_0}{\partial \zeta^2}, \tag{4.5.42b}$$

$$0=-\frac{\partial \hat{p}_0}{\partial \zeta}, \tag{4.5.42c}$$

式中记号"^"表示这些变量是上边界层中的变量。

从 (4.5.42c) 和匹配原则可知，上边界层中的水平压力梯度，等于内区的压力梯度，所以 (4.5.42a,b) 式可以表示为

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \hat{u}_0}{\partial \zeta^2}-\hat{v}_0&=-v_0(x,y),\\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \hat{v}_0}{\partial \zeta^2}-\hat{u}_0&=-u_0(x,y).\end{aligned} \tag{4.5.43}$$

满足当 $\zeta\to\infty$ 时 $\hat{v}_0$ 和 $\hat{u}_0$ 光滑地变为其内区值这一条件的 (4.5.43) 的解是

$$\begin{aligned}\hat{u}_0&=u_0(x,y)+e^{-\zeta}[C_1(x,y)\cos\zeta+C_2(x,y)\sin\zeta],\\ \hat{v}_0&=v_0(x,y)+e^{-\zeta}[-C_1(x,y)\sin\zeta+C_2(x,y)\cos\zeta].\end{aligned} \tag{4.5.44}$$

式中 C_1、C_2 是 x、y 的任意函数。

在上表面处有

$$\begin{aligned}\hat{u}_0&=u_T(x,y),\\ \hat{v}_0&=v_T(x,y),\end{aligned} \tag{4.5.45}$$

所以

$$C_1=u_T-u_0,\quad C_2=v_T-v_0, \tag{4.5.46}$$

由此得出

$$\begin{aligned}\hat{u}_0&=u_0(x,y)+e^{-\zeta}[(u_T-u_0)\cos\zeta+(v_T-v_0)\sin\zeta],\\ \hat{v}_0&=v_0(x,y)+e^{-\zeta}[(v_T-v_0)\cos\zeta-(u_T-u_0)\sin\zeta].\end{aligned} \tag{4.5.47}$$

注意，若 u_T 和 v_T 为零，则 (4.5.47) 等价于 (4.5.31) 式。即 $z=1$ 处艾克曼层的构造等同于 $z=0$ 处的艾克曼层的构造。再次得到，在任意穿越零压线的水平位置上，运动将与地转速度和边界速度之差成正比。

连续方程变为

$$\frac{\partial \hat{w}}{\partial \zeta}=E_V^{1/2}\left(\frac{\partial \hat{u}_0}{\partial x}+\frac{\partial \hat{v}_0}{\partial y}\right). \tag{4.5.48}$$

注意它与 (4.5.21) 式相比有符号上的变化。从形式上说，这是因为由 (4.5.41) 式的坐标变换中的负号造成的。从物理上说，它所反映的简单事实是，下艾克曼层中的水平质量辐合必然产生向上的速度；而上艾克曼层中同样的辐合必然引起流入内区向下的垂直速度。

如果用 (4.5.47) 式来计算 (4.5.48) 式，使用 $\zeta=0$ 处 $\hat{w}$ 为零的条件，则通过简单的积分就可定出 $\hat{w}$，即

$$\hat{w}=\frac{E_V^{1/2}}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(v_T-v_0)-\frac{\partial}{\partial y}(u_T-u_0)\right\}\times[1-e^{-\zeta}(\cos\zeta+\sin\zeta)]. \tag{4.5.49}$$

在$\zeta\to\infty$处，即边界层的边缘处（在这里边界层合并到内区中），又一次得到$O(E_V^{1/2})$的垂直速度。w的匹配原则是

$$\lim_{z\to 1} w(x,y,z)=\lim_{\zeta\to\infty}\hat{w}(x,y,\zeta), \tag{4.5.50}$$

给出内区运动的上边界条件

$$w(x,y,1)=\frac{E_V^{1/2}}{2}[\zeta_T(x,y)-\zeta_0(x,y)], \tag{4.5.51}$$

式中ζ_T是上边界的涡度，ζ_0是内区运动的$O(1)$阶涡度。如果$\zeta_T>\zeta_0$，那末在上艾克曼层中，流体向外辐散，同时从内区顶部把流体垂直抽吸上去。

所以，直接使用摩擦层厚度的边界层理论，给出两个很有价值的简化：第一，它能使普遍的内区地转运动满足$z=0$和$z=1$处关于切向速度的无滑动条件。第二，它把关于切向运动的摩擦或粘性条件转变为内区运动的垂直于边界的速度之条件。对于$E_V\ll 1$，内区构成流体的主体部分。但是艾克曼层的分析，在揭露边界与流体内区耦合的性质方面却是十分重要的。不论对上边界，还是对下边界，内区涡度和边界涡度之差，都会在内区运动的边缘上产生一个$O(E_V^{1/2})$垂直速度。由此产生的行星涡度的涡管少量伸缩，是摩擦效应之所以能传到内区去的基本机制。涡管伸缩是由边界处的摩擦所驱动的惯性机制。这一效应在内区涡度平衡中的重要性程度，恰好就是在流体主要部分的动力学中摩擦所起的作用之重要性程度。

4.6 有摩擦时的准地转动力学

上一节中对内区运动的分析，仅到最低阶平衡为止。在$O(1)$上，(4.5.13a,b,c)式说明运动是地转的和静力平衡的。为了实际确定内区的运动，必须考虑内区中很小的非地转力。特别是(4.5.11)式所给出的速度之渐近展开式，必须展开到第二项以后。一个直接的问题是在(4.5.11)式中应该如何选取展开参数Δ？这个参数衡量运动对严格的地转平衡的偏差。而产生地转偏差的机制有几种。第一，运动的相对加速度将产生量级为$O(\varepsilon)$的非地转速度。在第三章分析的准地转无粘浅水理论中，这是唯一的非地转机制，并且显然Δ就等于ε。这里也存在上述机制，但此外还有两种机制。由作用到行星涡缘上的艾克曼抽吸速度造成的涡管伸缩，将产生量级为$O(E_V^{1/2})$的相对涡度之变化。这是起因于摩擦影响的非地转效应。艾克曼抽吸产生的涡度伸缩与相对涡度平流之比为

$$r=\frac{E_V^{1/2}}{\varepsilon}=\left(\frac{2A_Vf}{D^2}\right)^{1/2}\frac{L}{U}=\frac{L}{UL}, \tag{4.6.1}$$

式中τ是4.3节所导出的旋转加强时间。为了考虑那种既非加速度项，也非艾克曼抽吸项占优势的情况，我们假定r的量级为$O(1)$，此后有可能补充讨论r直接为大量或小量的极端情况。产生非地转速度场的第三种因子是内区中的水平动量扩散。从(4.5.6)式可清楚地看出该项量级是$O(E_H)$。这一摩擦项和内区加速度项之比为

$$\frac{E_H}{\varepsilon}=\frac{2A_H}{UL}=\frac{2}{Re}, \tag{4.6.2}$$

这里

$$Re=\frac{UL}{A_H}$$

是内区运动的雷诺数。在大多数切合实际的大尺度海洋和大气运动中，雷诺数是很大的。例如，若在大气中取U为10米/秒，L是10^3公里的话，则即使对相当大的A_H值（10^5米^2/秒），Re的值也等于10^2。所以E_H/ε一般是一个小参数。尽管如此，完全略去水平动量扩散项，对自变量x和y来说，将是方程（4.5.6a,b）的奇异摄动。也就是说，如果流体位于一个侧边界上满足无滑动条件的封闭域中，那末在侧边界附近摩擦项必是重要的。为了包括上述可能性，必须保留$O(E_H)$项，以期对局部大的x和y的导数将增加该项的量级。

因此，对于内区运动我们有

$$
\begin{aligned}
u&=u(x,y,z,t,\varepsilon,E_V,E_H)\\
&=u_0(x,y,z,t,r,Re)+\varepsilon u_1(x,y,z,t,r,Re)+\cdots\cdots,\\
v&=v(x,y,z,t,\varepsilon,E_V,E_H)\\
&=v_0(x,y,z,t,r,Re)+\varepsilon v_1(x,y,z,t,r,Re)+\cdots\cdots,\\
w&=w(x,y,z,t,\varepsilon,E_V,E_H)\\
&=w_0(x,y,z,t,r,Re)+\varepsilon w_1(x,y,z,t,r,Re)+\cdots\cdots,\\
p&=p(x,y,z,t,\varepsilon,E_V,E_H)\\
&=p_0(x,y,z,t,r,Re)+\varepsilon p_1(x,y,z,t,r,Re)+\cdots\cdots.
\end{aligned}
\tag{4.6.3}
$$

如果把上述展开式代入（4.5.6a,b,c）中，那末其$O(1)$项必然给出（4.5.13a,b,c）和（4.5.14）式。由此可知，u_0和v_0与z无关，而（4.5.15）式表明w_0也与高度无关。现在在$z=0$上，精确到最低阶，由（4.5.39）式有

$$
w(x,y,t)=\frac{E_V^{1/2}}{2}\left(\frac{\partial v_0}{\partial x}-\frac{\partial u_0}{\partial y}\right). \tag{4.6.4}
$$

因为$E_V^{1/2}\ll 1$，所以（4.6.3）式中的w_0对一切z必须恒为零。

由（4.6.3）式和（4.5.6a,b,c）式所得出的$O(\varepsilon)$项为

$$
\frac{\partial u_0}{\partial t}+u_0\frac{\partial u_0}{\partial x}+v_0\frac{\partial u_0}{\partial y}-v_1=-\frac{\partial p_1}{\partial x}+\frac{1}{Re}\left\{\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}\right\}, \tag{4.6.5a}
$$

$$
\frac{\partial v_0}{\partial t}+u_0\frac{\partial v_0}{\partial x}+v_0\frac{\partial v_0}{\partial y}+u_1=-\frac{\partial p_1}{\partial y}+\frac{1}{Re}\left\{\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}\right\}, \tag{4.6.5b}
$$

$$
0=\frac{\partial p_1}{\partial z}, \tag{4.6.5c}
$$

$$
\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}+\frac{\partial w_1}{\partial z}=0. \tag{4.6.6}
$$

注意，(4.6.5a,b)式已不再有$w_0\partial u_0/\partial z$和$w_0\partial v_0/\partial z$的项，这不仅由于$u_0$和$v_0$与$z$无关，而且更重要的是由于$w_0$为零。如果通过对$x$，$y$交叉微商，消去压力梯度项，便可得到涡度方程，

$$
\begin{aligned}
\frac{d\zeta_0}{dt}&=\frac{\partial\zeta_0}{\partial t}+u_0\frac{\partial\zeta_0}{\partial x}+v_0\frac{\partial\zeta_0}{\partial y}\\
&=-\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\zeta_0\\
&=\frac{\partial w_1}{\partial z}+\frac{1}{Re}\nabla^2\zeta_0.
\end{aligned}
\tag{4.6.7}
$$

$O(1)$ 相对涡度的总变化，是由于行星涡管伸缩$\frac{\partial w_1}{\partial z}$和水平涡度扩散 $R_e^{-1}\nabla^2\zeta_0$ 所引起的。因为u_0、v_0，从而 ζ_0 与z无关，所以（4.6.7）可从 $z=0$ 到 $z=1$ 积分得到

$$\frac{d\zeta_0}{dt}=w_1(x,y,1)-w_1(x,y,0)+\frac{1}{Re}\nabla^2\zeta_0. \tag{4.6.8}$$

正是在这里，$z=0$和$z=1$处粘性层的存在变得重要起来，由（4.5.39）和（4.6.3）式可得

$$w(x,y,0)=\varepsilon w_1(x,y,0)+\cdots\cdots=\frac{E_V^{1/2}}{2}\zeta_0(x,y,t), \tag{4.6.9}$$

所以

$$\boxed{w_1(x,y,0)=\frac{E_V^{1/2}}{2\varepsilon}\zeta_0(x,y,t)}, \tag{4.6.10}$$

类似地有

$$\boxed{w_1(x,y,1)=\frac{E_V^{1/2}}{2\varepsilon}[\zeta_T(x,y,t)-\zeta_0(x,y,t)]}, \tag{4.6.11}$$

故涡度方程变为

$$\boxed{\frac{d\zeta_0}{dt}=-r\left\{\zeta_0-\frac{\zeta_T}{2}\right\}+\frac{1}{Re}\nabla^2\zeta_0}, \tag{4.6.12}$$

因为 u_0 和 v_0 是地转的，所以（4.6.12）可以完全用压力 p_0 来表示：

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial p_0}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial p_0}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right]\nabla^2 p_0$$

$$=-r\left[\nabla^2 p_0-\frac{\zeta_T}{2}\right]+\frac{1}{Re}\nabla^4 p_0. \tag{4.6.13}$$

在侧边界以外的区域，和Re^{-1} 成正比的项可令人满意地略去，所以在侧边界层以外，(4.6.12)就变为

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial p_0}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial p_0}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right]\nabla^2 p_0=-r\left[\nabla^2 p_0-\frac{\zeta_T}{2}\right]. \tag{4.6.14}$$

把方程（4.6.14）和第三章中具有自由表面的无粘流体层的准地转位涡方程(3.12.25）加以比较是很有益的。在（4.6.13）式中没有（3.12.25）式中的 $-F\eta_0+\eta_B$ 项，即自由面变化和下边界倾斜对位涡的贡献。这是理所当然的，因为这里的模式有两个水平刚性边界面。(注意$F\to 0$，得到刚盖模式。）在 4.11 节中，我们将看到在有粘性存在的情况下如何把上述两种效应考虑进来。(4.6.14）式和（3.12.25）式之间的基本动力学差异在于，(4.6.14)式右端有涡度衰减项。对于内区运动，这表示艾克曼摩擦层唯一的直接影响。摩擦对内区运动的影响程度，由参数 r 衡量。由（4.6.1）式可以清楚地看出，r是无粘时间尺度除以旋转加强时间尺度所得到的比值。如果特征平流时间尺度远比旋转减弱时间短，则在量级为平流时间尺度的时期内，可以略去粘性效应。在平流时间远长于波动周期的线性波动问题中，适当的

罗斯贝数，实际上是$\varepsilon_T=(fT)^{-1}$（如3.12节中所讨论的那样），这里T是波动周期。在这种情况下，参数r变为

$$r_T=\frac{T}{\tau}. \tag{4.6.15}$$

所以如果波动周期远小于旋转加强时间，则对许多波动周期，即对小于τ而又大于T的时间间隔来说，可以忽略粘性效应。因此，如果摩擦足够小以至于$\tau\gg T$的话，那末第三章的自由无粘波的分析在有摩擦时也成立。因此，只要$\tau\gg(T,L/U)_{max}$，流体的性质就象无粘流体一样.

4.7 旋转减弱

根据4.3节提出的非常简单的能量考虑，

$$\tau=f^{-1}E_V^{-1/2} \tag{4.7.1}$$

是地转运动在艾克曼层摩擦作用下的特征衰减时间。有了（4.6.14）式，这种运动可以讨论得更精确些，所得结论也更严格些。

考虑没有侧边界和没有强迫作用（即令$\zeta_T=0$）的情况下xy平面上的准地转运动。于是$R_e\gg1$的内区涡度方程就是

$$\frac{d\zeta_0}{dt}=-r\zeta_0. \tag{4.7.2}$$

现在考虑沿xy平面的闭合物质线C的环流Γ。如果C是可缩曲线，即如果它所包围的流体区域中没有洞或"岛"，那末

$$\Gamma=\iint_A\zeta_0 dA=\oint_C\mathbf{u}_0\cdot d\mathbf{r}, \tag{4.7.3}$$

这里A是C所包围的面积。随流体运动的Γ的变化率是

$$\frac{d\Gamma}{dt}=\iint_A\frac{d\zeta_0}{dt}dA+\iint_A\zeta_0\frac{d}{dt}(dA). \tag{4.7.4}$$

因为精确到最低阶时，地转速度是无辐散的，故由地转速度计算的$\frac{d(dA)}{dt}$恒等于零：

$$\frac{d}{dt}(dA)=dA\left\{\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}\right\}=0. \tag{4.7.5}$$

因此，从（4.7.2）式和（4.7.4）式得到

$$\frac{d\Gamma}{dt}=-r\Gamma, \tag{4.7.6}$$

或者

$$\boxed{\Gamma=\Gamma(0)e^{-rt}}, \tag{4.7.7}$$

所以，沿任意随流体一起运动的闭曲线的环流，以特征时间r^{-1}而呈指数衰减。相应的有量纲时间就是，

$$\frac{L}{U}r^{-1}=\frac{L}{U}\frac{\varepsilon}{E_V^{1/2}}=f^{-1}E_V^{-1/2}=\tau, \tag{4.7.8}$$

即旋转减弱时间。

旋转减弱的机制可以用几种方法描述。从涡度平衡的观点，考虑如图4.7.1所示的涡度为ζ_0的气旋式涡旋。当有正的相对涡度时，下艾克曼层将把流体自下向上抽吸到涡旋的低压中，同时上艾克曼层将把流体从上往下抽。二者的联合效应使行星涡管以$-r\zeta_0$的速率被压缩，并且这种惯性效应使内区涡度呈指数律减小。从另一种观点来讲，涡旋中心处自两个艾克曼层抽吸出来的流体，必须在内区从涡旋中心向外流动。这种内区流动必须从中心处的低压向涡旋边缘的高压流动（即内区的穿越等压线运动。显然，它构成小的非地转速度分量u_1和v_1）。这一向外的质量通量，必须平衡艾克曼层中向内的质量通量。因为内区压力梯度与艾克曼层是一样的，故可得知内区运动的能量耗失率，恰好由（4.3.24）式中的负$\dot{W}$给出。由逆压力梯度方向的内区运动引起的小能量耗失，将以等同于内区供给艾克曼层中流体动能的速率消耗内区的动能，而在艾克曼层中，动能又被摩擦力所耗散。如4.3节所做的论证那样，这给出了与衰减时间一致的时间尺度τ。

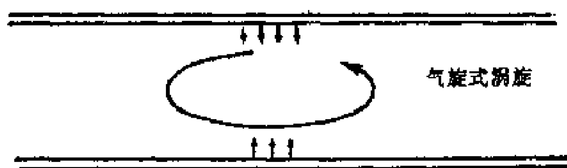


图4.7.1 气旋式涡旋从上下艾克曼层中均抽吸出流体，使涡管挤压，同时使地转相对涡度减小

4.8 定常运动

如果运动是定常的，且由上边界的运动所驱动，则（4.6.14）式可以写为

$$\left(\frac{\partial p_0}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial p_0}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right)\nabla^2 p_0=-r\left[\nabla^2 p_0-\frac{\zeta_T}{2}\right]. \tag{4.8.1}$$

首先考虑$r\gg1$的情况，即平流时间尺度远大于旋转加强的时间尺度。在这种情况下，（4.8.1）式化为线性方程：

$$\zeta_0=\nabla^2 p_0=\frac{\zeta_T}{2}. \tag{4.8.2}$$

此时，内区的涡度恰好是上边界运动的相对涡度之半。这个简单的解也可从下述事实直接导出，即在流体内区，根据（4.6.7）式，涡度伸缩$\partial w/\partial z$的量级不大于$d\zeta/dt$的量级$O(\varepsilon)$。所以，若$E_V^{1/2}\gg\varepsilon$，则除非从下艾克曼层抽吸出的$O(E_V^{1/2})$速度，恰好等于从上艾克曼层抽吸出的$O(E_V^{1/2})$的速度，否则关系式$O\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\leqslant O(\varepsilon)$将被破坏。所以如果$w(x,y,0)$等于$w(x,y,1)$，可以得出

$$w(x,y,0)=\frac{E_V^{1/2}}{2}\zeta_0(x,y)=\frac{E_V^{1/2}}{2}(\zeta_T-\zeta_0)$$
$$=w(x,y,1), \tag{4.8.3}$$

或者象（4.8.2）式所给出的一样，

$$\zeta_0=\frac{1}{2}\zeta_T. \tag{4.8.4}$$

这个关系式比我们最初所设想的更为普遍。也就是说，对于任何r都必有一个类似的结

果成立。考虑如下形式的（4.6.14）的定常状态：

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_0\zeta_0)+\frac{\partial}{\partial y}(v_0\zeta_0)=-r\left(\zeta_0-\frac{\zeta_T}{2}\right), \tag{4.8.5}$$

而且将（4.8.5）式在xy平面任意闭流线包围的面积A上积分。因为没有垂直于流线的$O(1)$运动，故（4.8.5）式左边的积分恒等于零。所以

$$\iint_A \zeta_0 dA=\frac{1}{2}\iint_A \zeta_T dA, \tag{4.8.6}$$

或者

$$\oint_C \mathbf{u}_0\cdot d\mathbf{r}=\frac{1}{2}\oint_C \mathbf{u}_T\cdot d\mathbf{r}, \tag{4.8.7}$$

故在定常状态下，沿任意闭流线的地转环流是驱动运动的边界环流的一半。对于边界速度纯粹是圆周速度的轴对称运动的特殊情况，所产生的地转速度也将是严格的圆周速度，且等于边界速度的一半。所以，若

$$\mathbf{u}_T=V(r)\boldsymbol{\Theta}, \tag{4.8.8}$$

式中$\boldsymbol{\Theta}$是切向单位矢量，V是切向速度，它是半径的任意函数，则地转运动完全是切向运动，且速度为$\frac{1}{2}V(r)$.

4.9 斜面上的艾克曼层

在第三章的无粘理论中，地转运动对深度变化是非常敏感的。本节旨在考察，在有粘性的情况下，无粘理论的结果在什么程度上仍然成立，同时研究在边界倾斜时，怎样表示艾克曼层对垂直运动的贡献。

基本思想可以用图 4.9.1 表示的情况来如以阐明。一个刚性边界向上倾斜α角，其边界面可用下式描述：

$$z_*=x_*\tan\alpha. \tag{4.9.1}$$

尽管这里考虑的坡度是常数，但所导出的结果，只要边界面曲率半径远大于边界层厚度，则总是成立的。

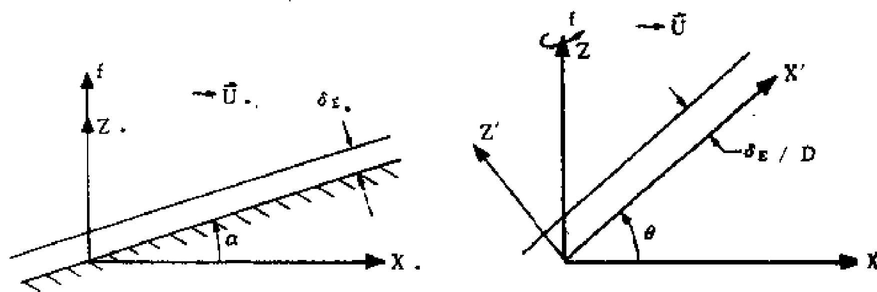


图4.9.1 在有量纲和无量纲坐标系中的斜艾克曼层

用无量纲单位表示

$$z=x\frac{L}{D}\tan\alpha=x\tan\theta, \tag{4.9.2}$$

式中$\tan\theta$是无量纲坐标系中边界面的坡度。上节结果表明，边界面上的粘性边界层是科氏加速度与粘性力之间的平衡结果。只要罗斯贝数远小于1，则非线性项总是不重要的。加果一开始就利用这个事实，那末运算就会简化，所以我们考虑适合于边界层的下述方程组：

$$-v=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{E_V}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{E_H}{2}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right\}, \tag{4.9.3a}$$

$$u=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{E_V}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\frac{E_H}{2}\left\{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right\}, \tag{4.9.3b}$$

$$0=-\frac{\partial p}{\partial z}+\delta^2\left[\frac{E_V}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+\frac{E_H}{2}\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right\}\right], \tag{4.9.3c}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0, \tag{4.9.4}$$

边界条件是

$$z=x\tan\theta\text{处},\ u=v=w=0. \tag{4.9.5}$$

摩擦只要求平行于边界的速度为零。垂直于边界的速度条件容易被无粘理论满足。为了使摩擦力参与物理平衡，如图4.9.2的略图所示，速度场必须在垂直于边界的方向上有迅速变化。描写边界层运动的自然坐标系是倾斜的，即图4.9.1中带撇号的坐标系。两个坐标系中的自变量，由简单的三角关系式相联系：

$$\begin{aligned}
&x'=x\cos\theta+z\sin\theta, x=x'\cos\theta-z'\sin\theta,\\
&z'=z\cos\theta-x\sin\theta, z=z'\cos\theta+x'\sin\theta,\\
&u'=u\cos\theta+w\sin\theta, u=u'\cos\theta-w'\sin\theta,\\
&w'=w\cos\theta-u\sin\theta, w=w'\cos\theta+u'\sin\theta
\end{aligned} \tag{4.9.6}$$

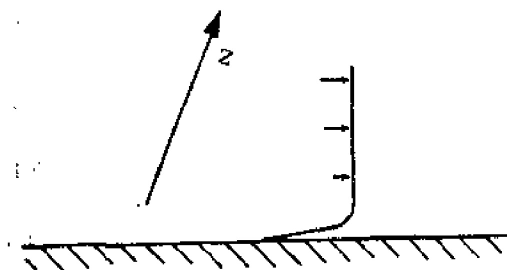


图4.9.2 平行于边界的速度在垂直于边界的方向上迅速地变化

式中v和y在两个坐标系中相同。一个坐标系中的导数也很容易转换到另一个坐标系中去，如

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial z'}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial x'}\sin\theta, \tag{4.9.7a}$$

及

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial z'^2}\cos^2\theta+2\frac{\partial^2 u}{\partial x'\partial z'}\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2}\sin^2\theta, \tag{4.9.7b}$$

等等。

方程（4.9.3a,b,c）用带撇的变量表示，变为

$$-v=-\frac{\partial p}{\partial x'}\cos\theta+\frac{\partial p}{\partial z'}\sin\theta$$

$$+\frac{E_V}{2}\left[\cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial z'^2}+\sin 2\theta\frac{\partial^2}{\partial x'\partial z'}+\sin^2\theta\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\right][u'\cos\theta-w'\sin\theta]$$

$$+\frac{E_H}{2}\left[\sin^2\theta\frac{\partial^2}{\partial z'^2}-\sin 2\theta\frac{\partial^2}{\partial x'\partial z'}+\cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\right][u'\cos\theta-w'\sin\theta]$$

$$+\frac{E_H}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}[u'\cos-w'\sin\theta], \tag{4.9.8a}$$

$$u'\cos\theta-w'\sin\theta=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{E_V}{2}\left[\cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial z'^2}+\sin 2\theta\frac{\partial^2}{\partial x'\partial z'}+\sin^2\theta\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\right]v$$

$$+\frac{E_H}{2}\left[\sin^2\theta\frac{\partial^2}{\partial z'^2}-\sin 2\theta\frac{\partial^2}{\partial x'\partial z'}+\cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\right]v+\frac{E_H}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}v, \tag{4.9.8b}$$

和

$$0=-\frac{\partial p}{\partial z'}\cos\theta-\frac{\partial p}{\partial x'}\sin\theta$$

$$+\delta^2\frac{E_V}{2}\left[\cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial z'^2}+\sin 2\theta\frac{\partial^2}{\partial x'\partial z'}+\sin^2\theta\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\right][w'\cos\theta+u'\sin\theta]$$

$$+\delta^2\frac{E_H}{2}\left[\sin^2\theta\frac{\partial^2}{\partial z'^2}-\sin 2\theta\frac{\partial^2}{\partial x'\partial z'}+\cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\right][w'\cos\theta+u'\sin\theta]$$

$$+\delta^2\frac{E_H}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}[w'\cos\theta+u'\sin\theta]. \tag{4.9.8c}$$

若把（4.9.8a）乘以$\cos\theta$，并把（4.9.8c）乘以$\sin\theta$，然后二式相加得

$$-v\cos\theta=-\frac{\partial p}{\partial x'}+\frac{E_V}{2}\cos^4\theta\{1+\delta^2\tan^4\theta\}\left\{1+\frac{E_H}{E_V}\tan^2\theta\right\}\frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2}, \tag{4.9.9}$$

在推导（4.9.9）式中利用了同一个函数对z'的导数远大于对x'的导数这一事实。同样也利用了边界层中比值w'/u'的量级必定是l/L的量级这一事实，这里l是为小量的边界层厚度（但是未知的），L是水平长度尺度。如果把（4.9.8a）乘以$\sin\theta$，而把（4.9.8c）乘以$\cos\theta$，则它们的差为

$$-v\sin\theta=\frac{\partial p}{\partial z'}+(1-\delta^2)\frac{E_V}{2}\cos^2\theta\sin\theta\left\{1+\frac{E_H}{E_V}\tan^2\theta\right\}\frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2}. \tag{4.9.10}$$

用以上概述的近似条件，（4.9.8a）可以写成

$$u'\cos\theta=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{E_V}{2}\cos^2\theta\left\{1+\frac{E_H}{E_V}\tan^2\theta\right\}\frac{\partial^2 v}{\partial z'^2}. \tag{4.9.11}$$

连续方程的形式不变，即

$$\frac{\partial w'}{\partial x'}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w'}{\partial z'}=0. \tag{4.9.12}$$

如果引入伸长的边界层变量：

$$\zeta=z'/l,$$

其中l当然是小量，那末由（4.9.12）式可知，若u'和v是$O(1)$，则w'如所预料的那样一定是$O(l)$。其次，（4.9.10）式变为

$$-lv\sin\theta=\frac{\partial p}{\partial\xi}+l\frac{1-\delta^2}{2}\frac{E_V}{l^2}\cos^3\theta\sin\theta\times\left\{1+\frac{E_H}{E_V}\tan^2\theta\right\}\frac{\partial^2 u'}{\partial\xi^2}. \quad (4.9.13)$$

所以只要

$$\frac{E_V}{l^2}\leqslant O(1)$$

（假设 $(E_H/E_V)\tan^2\theta$ 不大），则精确到小参数 l 的最低阶，我们就有

$$\frac{\partial p}{\partial\xi}=0, \quad (4.9.14)$$

即和平常一样，边界层薄到整层压力变化可以忽略不计的程度。所以精确到最低阶，(4.9.9) 和 (4.9.11) 式中的$\partial p/\partial x'$和$\partial p/\partial y$与ξ无关，且等于其内区值。在这两个方程中消去u'，得到

$$-v\cos^2\theta=-\cos\theta\frac{\partial p}{\partial x'}+\frac{\cos^4\theta}{l^4}\frac{E_V^2}{4}\{1+\delta^2\tan^2\theta\}\times\left\{1+\frac{E_H}{E_V}\tan^2\theta\right\}^2\frac{\partial^4 v}{\partial\xi^4}. \quad (4.9.15)$$

显然，l 的自然选择是

$$\boxed{l=\cos\theta\left(1+\frac{E_H}{E_V}\tan^2\theta\right)^{1/2}(1+\delta^2\tan^2\theta)^{1/4}E_V^{1/2}}, \quad (4.9.16)$$

因为此时 (4.9.15) 式变成

$$\frac{1}{4}\frac{\partial^4 v}{\partial\xi^4}+v=\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial p}{\partial x'}. \quad (4.9.17)$$

(4.9.17) 式仅满足$\xi\to\infty$时无穷远条件的通解是

$$v=\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial p}{\partial x'}+e^{-\xi}[C_1\cos\xi+C_2\sin\xi], \quad (4.9.18)$$

而由 (4.9.11) 式，现在可得出

$$u'=-\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{(1+\delta^2\tan^2\theta)^{-1/2}}{\cos\theta}e^{-\xi}[C_1\sin\xi-C_2\cos\xi], \quad (4.9.19)$$

式中 C_1 和 C_2 是 x' 和 y 的任意函数。注意边界层解是用以下变量来表示的：

$$\frac{z'}{l}=\frac{z\cos\theta-x\sin\theta}{\cos\theta E_V^{1/2}(1+\delta^2\tan^2\theta)^{1/4}[1+(E_H/E_V)\tan^2\theta]^{1/2}} \quad (4.9.20)$$

$$=\frac{z-x\tan\theta}{E_V^{1/2}(1+\delta^2\tan^2\theta)^{1/4}[1+(E_H/E_V)\tan^2\theta]^{1/2}}$$

$$=\frac{z_*-x_*\tan\alpha}{[\delta_E/(\cos\alpha)^{1/2}][1+(E_H/E_V)\tan^2\theta]}. \quad (4.9.21)$$

这是因为

$$1+\delta^2\tan^2\theta=1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}. \quad (4.9.22)$$

在 $A_H=A_V=\nu$ 的层流情况下，

$$1+\frac{E_H}{E_V}\tan^2\theta=1+\delta^2\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\alpha}, \tag{4.9.23}$$

所以

$$\frac{z'}{l}=\frac{z_*\cos\alpha-x_*\sin\alpha}{\delta_E(\cos\alpha)^{-1/2}}=\frac{z_*'}{\delta_E(\cos\alpha)^{-1/2}}. \tag{4.9.24}$$

在上述情况下所量得的垂直于边界的边界层厚度就是

$$\frac{\delta_E}{(\cos\alpha)^{1/2}}=\left(\frac{2\nu}{f\cos\alpha}\right)^{1/2}, \tag{4.9.25}$$

即它是基于垂直于边界的科氏参数分量 $f\cos\alpha$（它在动力学上是重要的）的通常的艾克曼层厚度。当摩擦力各向异性时，(4.9.16) 式表明 l 的量级仍是 $O(E_V^{1/2})$，但它是 E_H/E_V 和坡度的较为复杂的函数。

再回过头来讨论 (4.9.18) 和 (4.9.19) 式，用 $\zeta=0$ 处 u'、v' 为零的条件来确定常数 C_1 和 C_2，或

$$C_1=-\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial p}{\partial x'},$$

$$C_2=-\frac{\partial p}{\partial y}(1+\delta^2\tan^2\theta)^{1/2}, \tag{4.9.26}$$

所以

$$u'=-\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial p}{\partial y}[1-e^{-\zeta}\cos\zeta]-\frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\partial p}{\partial x'}(1+\delta^2\tan^2\theta)^{-1/2}e^{-\zeta}\sin\zeta, \tag{4.9.27a}$$

$$v=\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial p}{\partial x'}(1-e^{-\zeta}\cos\zeta)-\frac{\partial p}{\partial y}(1+\delta^2\tan^2\theta)^{1/2}e^{-\zeta}\sin\zeta. \tag{4.9.27b}$$

连续方程

$$\frac{\partial w'}{\partial\zeta}=-\left(\frac{\partial u'}{\partial x'}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)l \tag{4.9.28}$$

积分后可得到

$$w'(x',y,\infty)-w'(x',y,0)=-l\int_0^\infty\left(\frac{\partial u'}{\partial x'}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)d\zeta.$$

或者

$$w'(x',y,\infty)=\frac{l}{2}\left[\frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\partial^2 p}{\partial x'^2}(1+\delta^2\tan^2\theta)^{-1/2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}(1+\delta^2\tan^2\theta)^{1/2}\right], \tag{4.9.29}$$

现在使用坐标变换，我们有

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x'^2}=\cos^2\theta\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}-\sin 2\theta\frac{\partial^2 p}{\partial x\partial z}+\sin^2\theta\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}=\cos^2\theta\frac{\partial^2 p}{\partial x^2},$$

因为 $\partial p/\partial z$ 在内区精确到 $O(\delta^2)$ 时为零。所以边界层边缘处的速度 w' 可以完全用原来的 x、y、z 坐标系中速度的导数表示，即

$$w'(x,y,\infty)=\frac{l}{2}\left(\cos\alpha\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{1}{\cos\alpha}\frac{\partial u}{\partial y}\right). \tag{4.9.30}$$

式中 l 由（4.9.16）式给出。

速度 w' 是垂直于边界的速度。产生涡管伸缩的速度是平行于旋转矢量的速度 w，即原坐标系中的垂直速度。由（4.9.6）式有

$$w' = w\cos\theta - u\sin\theta, \tag{4.9.31}$$

所以边界层边缘处的垂直速度 w 由下式给出

$$w = u\tan\theta + \frac{l}{2\cos\theta}\left(\cos\alpha\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{1}{\cos\alpha}\right), \tag{4.9.32}$$

式中 u 是边界层边缘处的内区速度。

（4.9.32）式右边第一项是无粘流体中由平行于斜坡运动的流体元的上升所产生的垂直速度之表达式。图 4.9.2 表明，这一项仍然出现，因为在边界层以外的流体仍然沿倾斜的边界方向滑动而不受摩擦的阻滞。（4.9.32）式右边第二项是由艾克曼层的抽吸作用产生的附加垂直速度。

因为

$$d = L\tan\alpha \tag{4.9.33}$$

表示流体层在特征水平尺度 L 上的厚度变化，故可得出

$$\tan\theta = \frac{L}{D}\tan\alpha = \frac{d}{D}. \tag{4.9.34}$$

所以若厚度变化为 $O(1)$ 或更小一些，则 $\tan\alpha$ 必定非常小，即为 $O(D/L)$。对这样小的 α，$\cos\alpha$ 非常接近于 1，在这种情况下，（4.9.32）式变成

$$w = u\tan\theta + \frac{E_V^{1/2}}{2}\left(1 + \frac{E_H}{E_V}\tan^2\theta\right)^{1/2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right). \tag{4.9.35}$$

所以再次得出，摩擦所造成的垂直速度直接与内区运动的涡度成正比。

参看（4.9.33）式和（4.9.34）式可知

$$\tan\theta = \frac{1}{D}\frac{\partial h_B}{\partial x},$$

其中 h_B 是下边界的高度（有量纲的高度）。第三章中曾经证明，当 h_B/D 的变化量级是 $O(1)$ 时，地形约束关系非常强，以至于运动被迫变为完全沿等压线运动，而且在动力学上比较重要的情况是 $\tan\theta<1$ 的情况。这意味着除非 $E_H/E_V \gg 1$，否则因子 $1+(E_H/E_V)\tan^2\theta$ 可以完全用 1 代替。我们取此近似，不仅因为上述原因，而且也为了强调不可能严格地考虑完全起因于摩擦系数的不确定性（即依赖比值 E_H/E_V）的、任何明显的对地形的依赖关系。在这种问题中，实际上较好的判断表明，忽略非常粗糙的摩擦模式中的精细含义，而考虑(4.3.35)式的最基本的形式，是可取的。因此我们把（4.9.35）式写为简单的形式：

$$w\left(x, y, \frac{h_B}{D}\right) = \mathbf{u}\cdot\nabla\left(\frac{h_B}{D}\right) + \frac{E_V^{1/2}}{2}\zeta. \tag{4.9.36}$$

用这种矢量形式，强调了边界面方向是任意的，我们看到垂直速度就是爬坡引起的无粘速度与适用于水平面的艾克曼速度之和。

在 $z=h_B/D$ 处，对内区 w 的两项贡献大小之比为

$$\frac{h_B}{D}E_V^{-1/2} = \frac{h_B}{\delta_E}, \tag{4.9.37}$$

即底边界在水平长度L上的倾斜高度与艾克曼层厚度之比。如果h_B/δ_E是小量，那末底边界变化对流体的影响被淹没于艾克曼层中，因而底边界倾斜的动力学效应是次要的。如果h_B/δ是大量，那末地形变化所产生的垂直速度，远远超过弱的艾克曼抽吸效应所产生的垂直速度。

4.10 自由面上的艾克曼层

如果流体上表面是自由的，而不与固体界面接触，那末恰当的边界条件是，分界面两则气压和摩擦应力连续。显然，气压连续条件是不受摩擦层存在之影响的，因为在该层的厚度上气压是不变的。和第三章一样，气压条件仍由（3.3.13）式给出的自由面偏离其静止位置的小偏差表示。表面摩擦应力或曳力连续的条件是另一回事，一般要求摩擦层满足这个压力条件。

考虑如图 4.10.1 所示的情形。在高度$z_*=h$处的自由面变的应力为τ_*。我们暂且把表面考虑为平坦的和驻止的。为了使切向应力在自由面处连续地传给流体，（4.2.11）式意味着在$z_*=h$上有

$$\left.\begin{aligned}\tau_*^{(x)}&=\rho A_V\frac{\partial u_*}{\partial z_*}+\rho A_H\frac{\partial w_*}{\partial x_*}\\ \tau_*^{(y)}&=\rho A_V\frac{\partial v_*}{\partial z_*}+\rho A_H\frac{\partial w_*}{\partial y_*}\end{aligned}\right\},\tag{4.10.1}$$

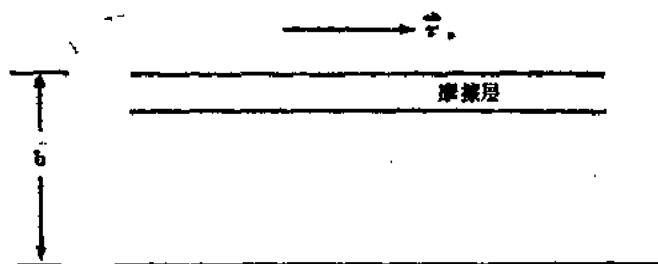


图4.10.1 在外加应力τ_*作用下的自由面处的摩擦层

或用无量纲单位表示，在$z=\frac{h}{D}$上有

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{D\tau_0}{\rho A_V u}\right)\tau^{(x)}&=\frac{\partial u}{\partial z}+\delta^2\frac{\partial w}{\partial x}\\ \left(\frac{D\tau_0}{\rho A_V u}\right)\tau^{(y)}&=\frac{\partial v}{\partial z}+\delta^2\frac{\partial w}{\partial y}\end{aligned}\right\},\tag{4.10.2}$$

其中τ_0是应力的特征值，而U和D是水平速度与深度的特征值。因为垂直速度远小于水平速度，而在边界层中对z的导数，总是远大于对x的导数，所以（4.10.2）式中含w的项一定可以忽略不计。和 4.5 节一样，引入边界层坐标：

$$\zeta=\frac{h/D-z}{E_V^{1/2}}.\tag{4.10.3}$$

从而又一次得到边界层中最低阶方程：

$$-\tilde{v}=-\frac{\partial\tilde{p}}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\zeta^2}, \tag{4.10.4a}$$

$$\tilde{u}=-\frac{\partial\tilde{p}}{\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\tilde{v}}{\partial\zeta^2}, \tag{4.10.4b}$$

$$0=-\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\zeta}, \tag{4.10.4c}$$

式中"～"号指上艾克曼层区域中的变量。边界层中的水平压力梯度又等于其无粘内区中的水平压力梯度值。所以通解仍为

$$\hat{u}=-\frac{\partial p}{\partial y}+e^{-\zeta}[C_1\cos\zeta+C_2\sin\zeta],$$
$$\hat{v}=\frac{\partial p}{\partial x}+e^{-\zeta}[-C_1\sin\zeta+C_2\cos\zeta]. \tag{4.10.5}$$

边界条件为

$$-\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\zeta}=\left(\frac{E_V^{1/2}D}{UA_V}\frac{\tau_0}{\rho}\right)\tau^{(x)}=a\tau^{(x)},$$
$$-\frac{\partial\hat{v}}{\partial\zeta}=\left(\frac{E_V^{1/2}D}{UA_V}\frac{\tau_0}{\rho}\right)\tau^{(y)}=a\tau^{(y)}, \tag{4.10.6}$$

式中

$$a=\frac{2\tau_0/\rho}{f\delta_E U}, \tag{4.10.7}$$

而 δ_E 是艾克曼厚度 $DE_V^{1/2}$。把 (4.10.6) 式代入 (4.10.5) 式，得到

$$C_1=\frac{a}{2}(\tau^{(y)}+\tau^{(x)}),$$
$$C_2=-\frac{a}{2}(\tau^{(y)}-\tau^{(x)}), \tag{4.10.8}$$

所以，

$$\tilde{u}=u_0+\frac{e^{-\zeta}}{2}a[(\tau^{(y)}-\tau^{(x)})\sin\zeta+(\tau^{(y)}+\tau^{(x)})\cos\zeta],$$
$$\tilde{v}=v_0+\frac{e^{-\zeta}}{2}a[(\tau^{(y)}-\tau^{(x)})\cos\zeta-(\tau^{(y)}+\tau^{(x)})\sin\zeta], \tag{4.10.9}$$

其中 u_0 和 v_0 是内区的地转速度。速度矢量

$$\tilde{\mathbf{u}}=\mathbf{i}\tilde{u}+\mathbf{j}\tilde{v} \tag{4.10.10}$$

由下式给出

$$\tilde{\mathbf{u}}=\mathbf{u}_0+\frac{ae^{-\zeta}}{2}[\boldsymbol{\tau}(\cos\zeta-\sin\zeta)-(\mathbf{k}\times\boldsymbol{\tau})(\cos\zeta+\sin\zeta)], \tag{4.10.11}$$

其中 $\mathbf{k}$ 是 z 方向的单位矢量。

摩擦层的速度，即与地转速度 $\mathbf{u}_0$ 之值差，直接分解为与 $\boldsymbol{\tau}$ 平行和与 $\boldsymbol{\tau}$ 垂直的分量。在表面（$\zeta=0$）处，该速度 $\mathbf{u}_E$ 是

$$\mathbf{u}_E=\mathbf{u}-\mathbf{u}_0=\frac{a}{2}[\boldsymbol{\tau}-(\mathbf{k}\times\boldsymbol{\tau})], \tag{4.10.12}$$

而且如图 4.10.2 所示，其方向偏于外加应力右方 45°[1]。图4.10.3 给出与应力平行和垂直的速度分量，而图 4.10.4 则表示矢量 $\mathbf{E}_H$ 在 xy 平面上随 ζ 变化的位置，再次例示出艾克曼螺旋。

和艾克曼层摩擦速度有关的水平质量通量是

$$\mathbf{M}_E=\int_0^{h/D}\mathbf{u}_E dz=\int_0^{\infty}\mathbf{u}_E d\zeta E_V^{1/2}=\frac{a}{2}(\boldsymbol{\tau}\times\mathbf{k})E_V^{1/2}, \tag{4.10.13}$$

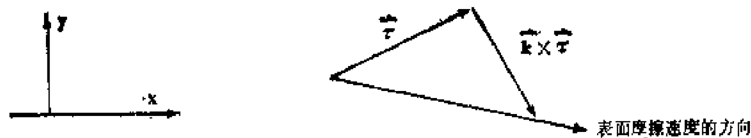


图4.10.2 $\vec{\tau}$与表面速度的关系

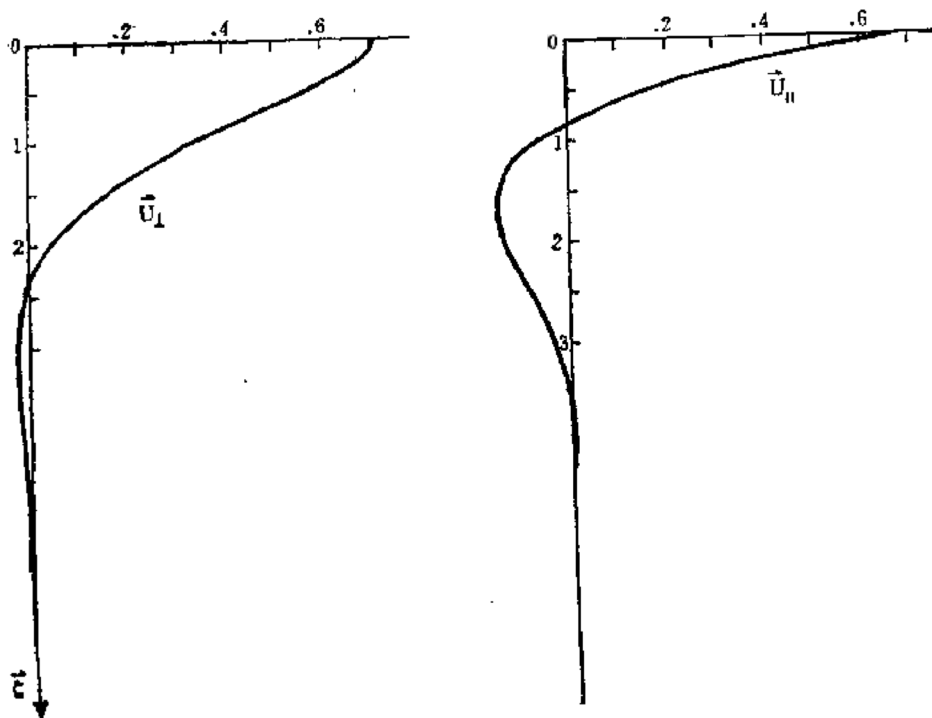


图4.10.3 与外加应力方向垂直和平行的速度分量之廓线

(1) 如果 f 是负的而不是正的，则(4.10.4)式中科氏项的符号都变号，旋转产生向左而不是向右的偏转。

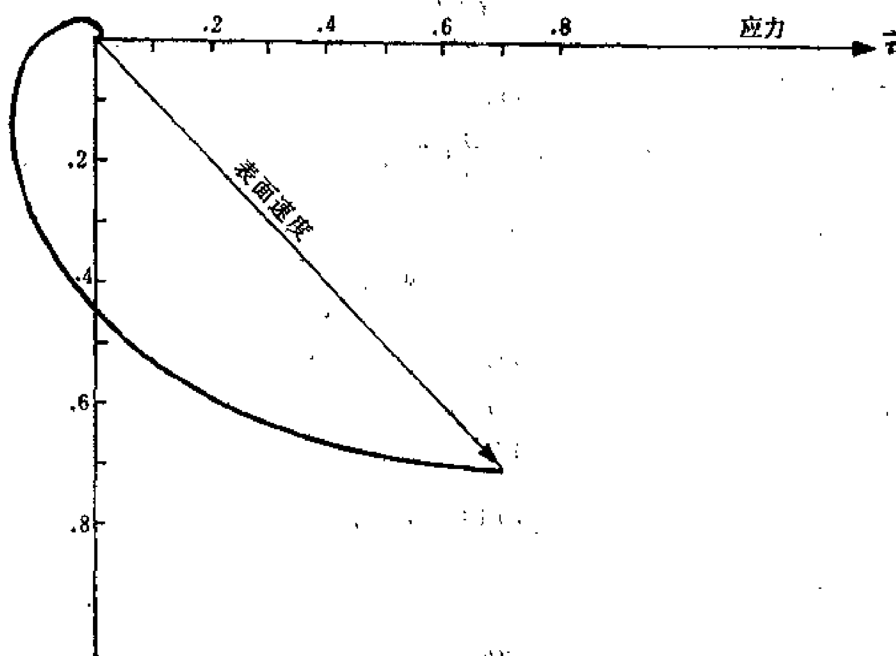


图4.10.4　粗实线表示艾克曼速度矢量随深度变化的螺旋线

即与外加应力完全垂直。有量纲量写为

$$\mathbf{M}_E = UD\mathbf{M}_E = \frac{\tau_0}{\rho f \delta_E} DE_V^{1/2}(\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{k}),$$

或者

$$\boxed{\mathbf{M}_E = \frac{\mathbf{T}_*}{\rho f} \times \mathbf{k}}, \tag{4.10.14}$$

这等价于（4.3.32）式。必须注意到表面摩擦层质量通量之大小与湍流粘性无关！它只取决于外加应力和科氏参数。如 4.3 节所解释的那样，这个简单的结论是外加应力与摩擦层速度的平均科氏加速度相平衡的直接结果。所以，（4.10.14）式与湍流参数化的细节全然无关。

对连续方程积分可以得到从内区进入表面艾克曼层的垂直速度。连续方程是

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \zeta} &= E_V^{1/2}\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}\right) \\ &= \frac{a}{2} E_V^{1/2} e^{-\zeta}[(\nabla \cdot \boldsymbol{\tau})(\cos\zeta - \sin\zeta) \\ &\quad - \nabla \cdot (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\tau})(\cos\zeta + \sin\zeta)].\end{aligned} \tag{4.10.15}$$

积分后得到

$$\begin{aligned}\tilde{w}(x,y,\infty) - \tilde{w}(x,y,0) &= -a\frac{E_V^{1/2}}{2}\nabla \cdot (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\tau}) \\ &= \frac{\tau_0}{\rho f U D}\mathbf{k} \cdot \mathrm{curl}\,\boldsymbol{\tau}.\end{aligned} \tag{4.10.16}$$

式中

$$\mathbf{k}\cdot\text{curl}\boldsymbol{\tau}=\frac{\partial\tau^{(y)}}{\partial x}-\frac{\partial\tau^{(x)}}{\partial y} \tag{4.10.17}$$

速度$\tilde{w}(x,y,0)$指上边界层位置的变化。若自由表面是水平的但有上下运动，则

$$\tilde{w}(x,y,0)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{h}{D}\right). \tag{4.10.18}$$

边界层下界处的内区垂直速度 w（即抽入艾克曼层的速度）由匹配原则给出，即

$$w(x,y,h/D)=\tilde{w}(x,y,\infty)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{h}{D}\right)+\frac{\tau_0}{\rho fUD}\mathbf{k}\cdot\text{curl}\boldsymbol{\tau}. \tag{4.10.19}$$

若表面 h 是倾斜的，那末（4.10.19）式的右端项必须增加一个量$\mathbf{u}\cdot\nabla(h/D)$，如4.9节所述，这说明平行于自由表面运动的内区水平速度产生了附加垂直速度——但是这个额外的项对准地转运动实际上为零。当（4.10.19）式加上这一影响后，我们得到最后的结果为

$$w\left(x,y,\frac{h}{D}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{h}{D}\right)+\left(\frac{\tau_0}{\rho fUD}\right)(\mathbf{k}\cdot\text{curl}\boldsymbol{\tau}), \tag{4.10.20}$$

用有量纲单位表示即为

$$\boxed{w_*(\text{表面})=\frac{dh}{dt_*}+\frac{\mathbf{k}}{\rho}\cdot\text{curl}_*\left(\frac{\boldsymbol{\tau}_*}{f}\right)}, \tag{4.10.21}$$

式中

$$\mathbf{k}\cdot\text{curl}_*\left(\frac{\boldsymbol{\tau}_*}{f}\right)=\frac{\partial}{\partial x_*}\frac{\tau_*^{(y)}}{f}-\frac{\partial}{\partial y_*}\frac{\tau_*^{(x)}}{f}. \tag{4.10.22}$$

所以，内区在其上表面处的垂直速度，等于自由表面的无粘流体垂直速度dh/dt_*加上在外加应力作用下抽吸到上艾克曼层中去的速度。注意，抽入上艾克曼层的速度与我们处理小尺度湍流的方法无关。考虑如图4.10.5所示的应力场。应力在 y 方向上，且其大小在 x 方向上是增加的。摩擦层中总的艾克曼通量沿 x 方向，而且随 x 增加而增加。为了保持质量守恒，流体以和艾克曼通量散度成正比的速率被吸入艾克曼层。由于艾克曼通量与湍流之细节无关，所以其散度和由此产生的抽吸速度也与湍流之细节无关。

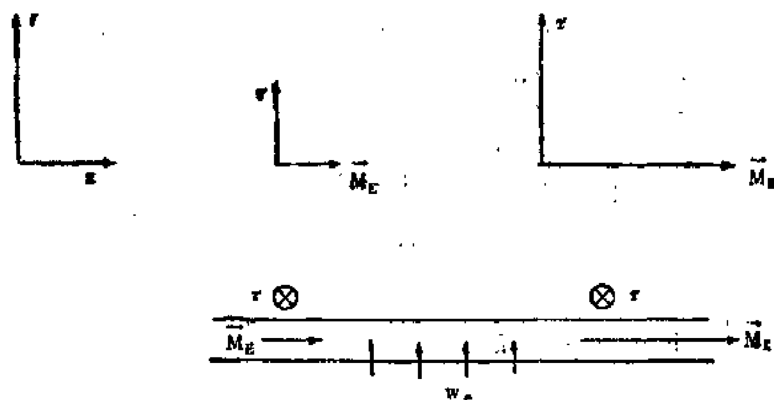


图4.10.5 在xy平面上，应力在y方向上，且其大小随x而增加。在下方图上表明，由此产生的$\mathbf{M}_E$以及吸入表面层中补偿$\mathbf{M}_E$的辐散之速度向右方增加

注意，在没有外加表面应力时，上艾克曼层虽然也可以存在，但其强度为零，即对地转运动的修正量为零。因而与 z 无关的地转运动本身满足切应力为零的条件。

4.11 有摩擦和地形的准地转位涡方程

如果流体有自由表面和倾斜的底面，涡度平衡将通过涡管伸缩反映这两种产生涡度的机制。但是就内区涡度方程而论，4.6节的分析仍是适用的，即（4.6.7）式

$$\frac{d\zeta_0}{dt}=\frac{\partial w_1}{\partial z}+\frac{1}{Re}\nabla^2\zeta_0 \tag{4.11.1}$$

仍成立。ζ_0 是 $O(1)$ 地转速度的涡度，而在内区有

$$w(x,y,z)=\varepsilon w_1+\cdots\cdots. \tag{4.11.2}$$

对一个具有倾斜下边界的流体层，（4.9.36）式成立，所以在 $z=h_B/D$ 的下边界上，精确到 ε 的最低阶有

$$w=\mathbf{u}_0\cdot\nabla\frac{h_B}{D}+\frac{E_V^{1/2}}{2}\zeta_0. \tag{4.11.3}$$

由（4.11.2）式得

$$w_1=\mathbf{u}_0\cdot\nabla\eta_B+\frac{r}{2}\zeta_0, \tag{4.11.4}$$

式中如第三章所述，

$$\frac{h_B}{D}=\varepsilon\eta_B(x,y) \tag{4.11.5}$$

并和以前一样，仍有

$$r=\frac{E_V^{1/2}}{\varepsilon}. \tag{4.11.6}$$

上表面位于

$$z=\frac{h(x,y,t)}{D}, \tag{4.11.7}$$

根据3.12节之结果，它为

$$z=1+\varepsilon F\eta_0, \tag{4.11.8}$$

这里 η_0 为 $O(1)$，而

$$F=\frac{f^2L^2}{gD}. \tag{4.11.9}$$

把（4.10.8）式用于上表面处得

$$w_1\left(x,y,\frac{h}{D}\right)=F\frac{d\eta_0}{dt}+\left(\frac{\tau_0}{\rho fUD\varepsilon}\right)\mathbf{k}\cdot\mathrm{curl}\,\boldsymbol{\tau}. \tag{4.11.10}$$

由于$O(1)$地转运动与z无关，所以可把（4.11.1）式从$z=1+\varepsilon\eta_B$到$z=1+\varepsilon F\eta_0$积分，再利用（4.11.4）式和（4.11.10）式即可得到（精确到 ε 的最低阶）

$$\boxed{\frac{d}{dt}\{\zeta_0-F\eta_0+\eta_B\}=\left[\frac{\tau_0}{\rho fUD\varepsilon}\right]\mathbf{k}\cdot\mathrm{curl}\,\boldsymbol{\tau}-\frac{r}{2}\zeta_0+\frac{1}{Re}\nabla^2\zeta_0}, \tag{4.11.11}$$

或者用地转流函数表示为

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right][\nabla^2\psi-F\psi+\eta_B] =\left[\frac{\tau_0}{\rho fUDe}\right]\mathbf{k}\cdot\mathrm{curl}\boldsymbol{\tau}-\frac{r}{2}\nabla^2\psi+\frac{1}{Re}\nabla^4\psi. \tag{4.11.12}$$

式中，

$$\eta_0=\psi,\quad u_0=-\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad v_0=\frac{\partial\psi}{\partial x},\quad \zeta_0=\nabla^2\psi. \tag{4.11.13}$$

在这个位涡方程的推广形式（4.11.12）式中，摩擦的存在产生了三个重要变化。在没有摩擦时，（4.11.12）式的右端项为零，它简化为位涡守恒的表达式，即（3.12.25）。现在摩擦作用使每个流体柱的位涡随时间改变。外加应力的旋度作为一个位涡源，而下艾克曼层中的摩擦耗散作为一个位涡汇。内区中存在的少量（$O(Re^{-1})$）摩擦，虽然一般可以忽略，但也对涡度的侧向扩散起作用。

如果应用3.17节中的β平面概念，从而η_B解释为科氏参数随纬度θ变化所产生的环境位涡的变化部分，则（3.14.2）和（3.17.9）给出

$$\eta_B=\frac{\beta_0L^2}{U}y=\beta y,\qquad \beta_0=\frac{2\Omega\cos\theta}{r_0}, \tag{4.11.14}$$

式中 r_0 是地球的半径。

在没有摩擦的情况下，地转运动有沿着 η_B 线运动的趋势（如 3.14 节所述)，即对于定常的线性运动（极小的 ε 或大的 η_B)，有

$$\frac{d\eta_B}{dt}=0. \tag{4.11.15}$$

外加应力所输入的涡度对小 ε 或大 η_B 而言，将使（4.11.15）式变为

$$\frac{d\eta_B}{dt}=\frac{\tau_0}{\rho fUD\varepsilon}\mathbf{k}\cdot\mathrm{curl}\boldsymbol{\tau}, \tag{4.11.16}$$

即应力旋度将使流体趋过环境位涡等值线，故涡度输入被流体柱移向环境位涡较大的区域时所得到的位涡增量所平衡。这意味着，在有$O(1)\eta_B$ 的情况下，当流体由外加应力驱动时，可以令 $d\eta_B/dt$ 和应力项的量级相等来确定速度的特征尺度，即我们这样选择 U：使得当（4.11.14）式成立时有

$$\frac{\beta_0L^2}{U}=\frac{\tau_0}{\rho fUD\varepsilon}=\frac{\tau_0L}{\rho U^2D},$$

或者

$$U=\frac{\tau_0}{\rho\beta_0DL}. \tag{4.11.17}$$

有了这样选择的η_B和U，（4.11.12）式就变为

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right][\nabla^2\psi-F\psi+\beta y]$$

$$=\beta\mathbf{k}\cdot\mathrm{curl}\tau-\frac{r}{2}\nabla^2\psi+Re^{-1}\nabla^4\psi. \tag{4.11.18}$$

对于大 β (即$U\ll\beta_0L^2$),(4.11.18)式简化为

$$\boxed{v_0=\mathbf{k}\cdot\mathrm{curl}\tau}, \tag{4.11.19}$$

这立即给出直接用外加应力旋度表示的向北之运动（即穿越环境位涡等值线的运动)。这个关系式叫斯维尔德鲁普平衡，是我们将在第五章中要较详细讨论的风生大洋环流理论的基础。

4.12 罗斯贝波的衰减

如果

$$\eta_B=\beta y, \tag{4.12.1}$$

则（4.11.11）式的齐次形式（$\tau=0$）有平面波解，

$$\psi=Ae^{i(kx+ly-\sigma t)}, \tag{4.12.2}$$

只要σ满足频散关系式：

$$\sigma=-\frac{\beta k}{K^2+F}-\frac{iK^2}{K^2+F}\left[\frac{r}{2}+\frac{K^2}{Re}\right], \tag{4.12.3}$$

式中

$$K^2=k^2+l^2. \tag{4.12.4}$$

这里的频率是复数，即

$$\sigma=\sigma_r+i\sigma_i. \tag{4.12.5}$$

频率的实数部分就是第三章的无粘结果，频率的虚部

$$\sigma_i=-\frac{K^2}{K^2+F}\left[\frac{r}{2}+\frac{K^2}{Re}\right] \tag{4.12.6}$$

总是负的，因为

$$e^{-i\sigma t}=e^{-i\sigma_r t}\cdot e^{\sigma_i t}. \tag{4.12.7}$$

而 $\sigma_i<0$ 给出波动的指数衰减。由于 Re 一般是很大的，所以衰减率 σ_i 可以近似地表示为

$$\sigma_i(K)=-\frac{K^2}{K^2+F}\frac{r}{2}. \tag{4.12.8}$$

如图 4.12.1 所示，对于波长大于变形半径的波动，衰减率很小，而较短的波有较大的衰减率。当K^2远大于F时，衰减率变得不大依赖于尺度。衰减率与频率之比是

$$\frac{\sigma_i}{\sigma_r}=\frac{r}{2}\frac{K^2}{\beta k}. \tag{4.12.9}$$

对$\beta=\beta_0L^2/U$ 的β平面上的罗斯贝波来说，

$$\frac{\sigma_i}{\sigma_r}=\frac{E_V^{1/2}}{2\varepsilon}\frac{K^2U}{\beta_0L^2k}=\frac{E_V^{1/2}}{2}\frac{f}{\beta_0}\frac{K_*^2}{k_*}=O\left(\frac{T_{罗斯贝}}{\tau}\right), \tag{4.12.10}$$

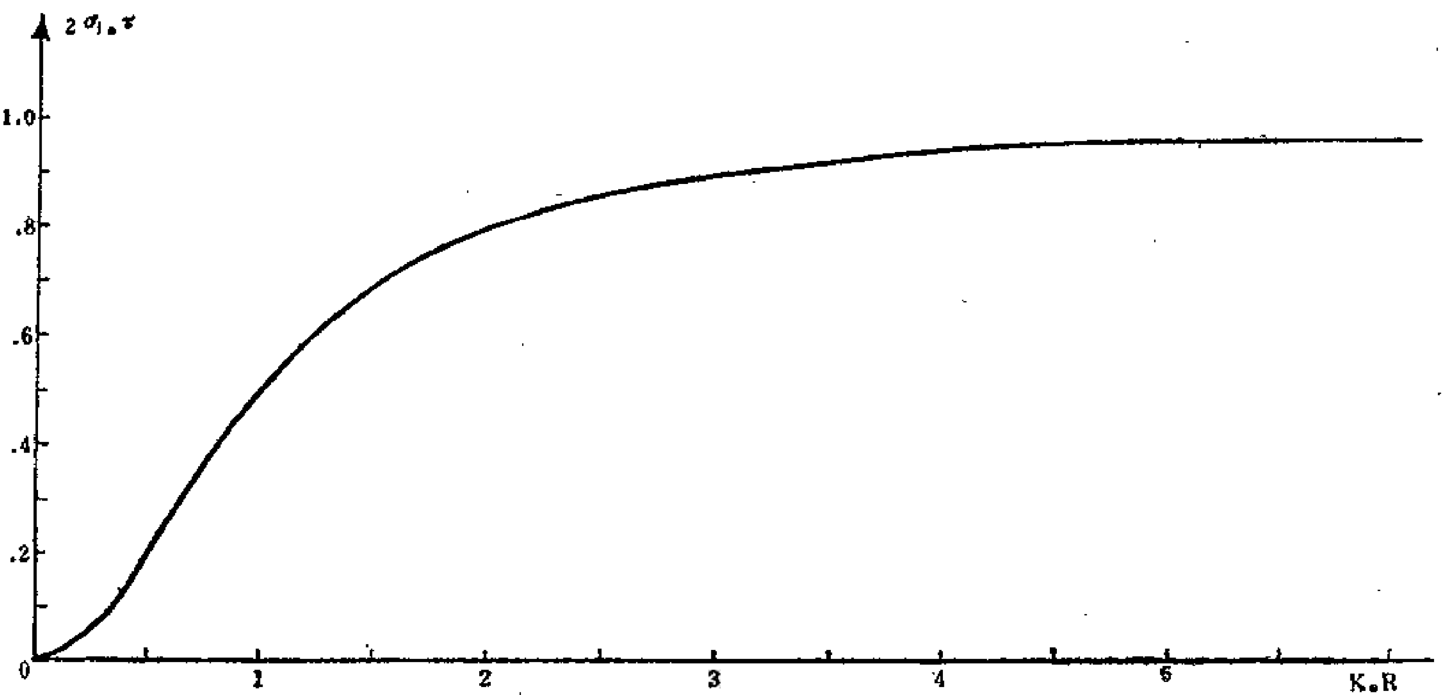


图4.12.1　作为波数 k_* 之函数的罗斯贝波的衰减率，R 是变形半径，σ_{I*} 是衰减率，τ 是4.3节定义的旋转加强时间

即它的量级等于罗斯贝波周期与旋转减弱时间

$$\tau=\frac{E_V^{-1/2}}{f}$$

之比值。

为了使第三章的无粘理论可应用于实际情况，旋转减弱时间必须远长于罗斯贝波的周期。欲使这一结果可以应用于比罗斯贝波周期长的无粘过程，则要求旋转减弱时间比慢时间尺度长得多。例如，波动相互作用的无粘理论，要求平流时间尺度 L/U 远长于罗斯贝波周期，但又远短于旋转减弱时间。如果平流时间和旋转减弱时间同量级，那末相互作用的三波组之成员的振幅不满足（3.26.33），而满足

$$\begin{aligned}
&\frac{da_1}{dt}+\frac{B(K_2,K_3)}{K_1^2+F}a_2a_3=\sigma_i(K_1)a_1,\\
&\frac{da_2}{dt}+\frac{B(K_3,K_1)}{K_2^2+F}a_3a_1=\sigma_i(K_2)a_2,\\
&\frac{da_3}{dt}+\frac{B(K_1,K_2)}{K_3^2+F}a_1a_2=\sigma_i(K_3)a_3.
\end{aligned}\tag{4.12.11}$$

从考虑了摩擦的3.26节的论证中容易得到上述结果。因为根据（3.26.35）式，

$$\frac{d}{dt}(E_1+E_2+E_3)=-\frac{r}{2}[K_1^2|a_1|^2+K_2^2|a_2|^2+K_3^2|a_3|^2]<0.\tag{4.12.12}$$

故波动能量衰减。因此，波动把不断消耗着的能量，从三波组的一个成员传递给另两个成员，直到摩擦把波动能量耗尽为止。在没有新的涡源使波场重新得到能量之前，相互作用过程便停止了。

4.13 侧边界摩擦层

对大气模式来说，下边界处的艾克曼层或某种更复杂的摩擦层模式，通常已足以表示流体和边界的摩擦相互作用。海洋（或湖泊）的动力学模式，显然必须接受水积聚于区域中这一事实，而且在侧边界处应用无滑动边界条件。这些模式一般要引入侧边界层，其结构与艾克曼层的结构相当不同。

作为一个例子，考虑如图 4.13.1 所示的情形。半径为 L 的圆形域中的水受到表面应力 $\mathbf{\tau}_*=\tau_0\mathbf{\tau}$ 的驱动。该区域具有垂直侧边界且深度为常数 D。水平长度尺度是 L，垂直长度尺度是 D。在这个例子中，引入极坐标是很自然的。令 r 表示距区域中心的无量纲径向距离（尺度为 L），而 θ 表示与 x 轴的夹角，如图 4.13.2 所示。径向和切向的速度分量分别为 u_r 和 u_θ。用矢量形式表示的地转关系为

$$\mathbf{u}_0=\mathbf{k}\times\nabla\psi,\tag{4.13.1}$$

$O(1)$ 速度必须满足该式，它意味着 u_r 和 u_θ 精确到 ε 的最低阶的表达式是

$$\begin{aligned}
u_\theta&=\frac{\partial\psi}{\partial r},\\
u_r&=-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}.
\end{aligned}\tag{4.13.2}$$

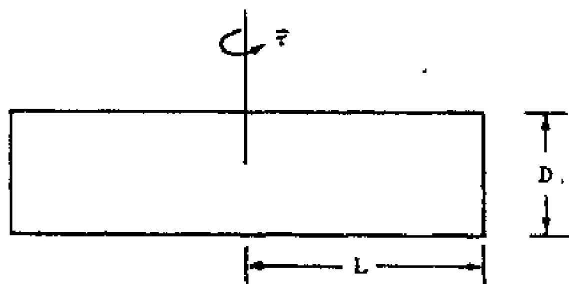


图4.13.1 深度为D的圆柱形区域受到一个切向应力$\tau_\theta=\tau_0\tau$

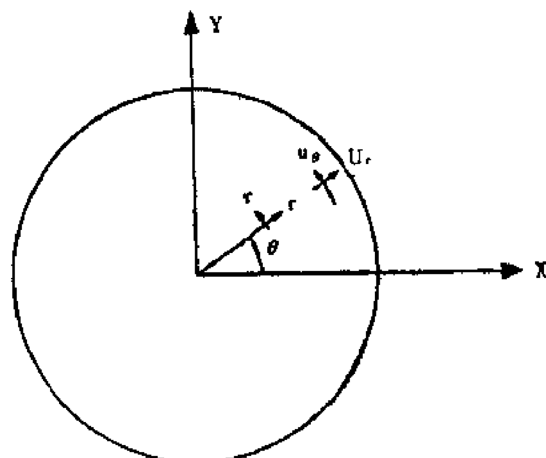


图4.13.2 极坐标系

对于定常运动，ψ必须满足（4.11.11）式，这时它可以写成

$$\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial\zeta_0}{\partial\theta}+u_r\frac{\partial\zeta_0}{\partial r}=\frac{\tau_0}{\rho fUD\varepsilon}\,\mathbf{k}\cdot\text{curl}\boldsymbol{\tau}-\frac{E_V^{1/2}}{2\varepsilon}\zeta_0+\frac{1}{Re}\nabla^2\zeta_0, \tag{4.13.3}$$

其中

$$\zeta_0=\nabla^2\psi=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}. \tag{4.13.4}$$

考虑外加应力是沿圆周方向而与θ无关的情况，即

$$\boldsymbol{\tau}=\tau(r)\boldsymbol{\Theta} \tag{4.13.5}$$

其中$\boldsymbol{\Theta}$是切线方向上的单位矢量。因为外加应力与方位角无关，而且因为在水平方向，动力学性质在空间上是各向同性的（$\eta_B=0$），所以应当寻找与θ无关的定常运动的解答，如果ψ与θ无关，那末u_r为零，且（4.13.3）简化为

$$0=\frac{\tau_0}{\rho fUD\varepsilon}\mathbf{k}\cdot\text{curl}\boldsymbol{\tau}-\frac{E_V^{1/2}}{2\varepsilon}\nabla^2\psi+\frac{1}{Re}\nabla^4\psi. \tag{4.13.6}$$

尽管r可以为$O(1)$，但对于实际的海洋与大气来说，Re一般是很大的。毫无疑问，在侧边界之外，（4.13.6）式右边最后一项可以忽略不计。对于轴对称运动，（4.13.6）式变为

$$\frac{E_V^{1/2}}{2\varepsilon}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial\psi}{\partial r}=\frac{\tau_0}{\rho fUD\varepsilon}\mathbf{k}\cdot\text{curl}\boldsymbol{\tau}=\frac{\tau_0}{\rho fUD\varepsilon}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\tau. \tag{4.13.7}$$

（4.13.7）式所描写的平衡表明，该情况下速度尺度的适当选择为

$$U=\frac{\tau_0}{\rho fDE_V^{1/2}}=\frac{\tau_0}{\rho f\delta_E}=\frac{\tau_0}{\rho\sqrt{2A_Vf}}, \tag{4.13.8}$$

所以（4.13.7）式变为

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)=\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\tau. \tag{4.13.9}$$

对上式积分，立刻得到

$$\frac{\partial\psi}{\partial r}=u_\theta=2\tau(r)+\frac{C}{r}. \tag{4.13.10}$$

因为在 $r=0$ 处速度必须保持有限，所以任意常数 C 必须取为零。于是 $O(1)$ 地转速度为

$$u_\theta=2\tau(r),$$
$$u_r=0. \tag{4.13.11}$$

在流体内区，$O(1)$ 运动完全是切向的，即沿应力之方向。有量纲的切向速度为

$$u_{*\theta}=\frac{2}{\rho\sqrt{2A_v f}}\tau_*(r). \tag{4.13.12}$$

这当然仅仅代表内区地转运动的解。在上边界层中，速度由（4.10.11）式给出。在本例中，

$$\mathbf{u}_0=u_\theta\boldsymbol{\Theta}=2\boldsymbol{\tau}, \tag{4.13.13}$$

以及

$$\alpha=\frac{2\tau_0}{\rho f\delta_E U}=2. \tag{4.13.14}$$

所以上艾克曼层区域的速度场是

$$\mathbf{u}=2\boldsymbol{\tau}+e^{-\bar{\zeta}}[\boldsymbol{\tau}(\cos\bar{\zeta}-\sin\bar{\zeta})-(\mathbf{k}\times\boldsymbol{\tau})(\cos\bar{\zeta}+\sin\bar{\zeta})]. \tag{4.13.15}$$

上艾克曼层中由非地转速度产生的净质量通量由（4.10.13）式给出：

$$\mathbf{M}_E=(\boldsymbol{\tau}\times\mathbf{k})E_V^{1/2}, \tag{4.13.16}$$

且方向是沿径向朝外。注意，上艾克曼层的径向速度与切向地转速度的量级相同。但是，因为它局限于无量纲厚度为 $O(E_V^{1/2})$ 的薄层中，故径向输送远小于环绕中心的切向质量输送的大小。这一输送为

$$\int_0^1\mathbf{u}_0dz=2\boldsymbol{\tau}=O(1). \tag{4.13.17}$$

在下边界层中，(4.5.31b)适用，故下边界附近的速度是

$$\tilde{\mathbf{u}}_0=2\boldsymbol{\tau}(1-e^{-\zeta}\cos\zeta)+2\mathbf{k}\times\boldsymbol{\tau}e^{-\zeta}\sin\zeta. \tag{4.13.18}$$

内区切向速度在下艾克曼层中产生一个 $O(1)$ 的径向运动，其方向穿过等压线向内（对于 $\tau>0$）。这一径向质量流是

$$E_V^{1/2}\int_0^\infty d\zeta 2(\mathbf{k}\times\boldsymbol{\tau})e^{-\zeta}\sin\zeta=-E_V^{1/2}(\boldsymbol{\tau}\times\mathbf{k}), \tag{4.13.19}$$

且恰好与上艾克曼层中向外的径向运动平衡。

根据（4.5.39）式和（4.13.9）式，从下艾克曼层抽出的垂直速度为

$$w(r,\theta,0)=\frac{E_V^{1/2}}{2}\zeta_0=\frac{E_V^{1/2}}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\tau(r), \tag{4.13.20}$$

而抽入上艾克曼层的速度由（4.10.19）式给出，在本例中就是

$$w(r,\theta,1)=\frac{\tau_0}{\rho fUD}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\tau(r)=\frac{E_V^{1/2}}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\tau(r). \tag{4.13.21}$$

所以从下艾克曼层抽吸作用产生的速度直接被吸收到在同一水平位置的上艾克曼层中，即 w 与 z 无关。

图4.13.3给出环流的示意图。表面应力驱动沿径向朝外的 $O(E_V^{1/2})$ 艾克曼通量，抽吸作用导致一个进入上艾克曼层的 $O(E_V^{1/2})$ 垂直速度，同时产生 $O(1)$ 的切向速度，这一切向速度

又恰好从下艾克曼层中抽出与上艾克曼层的质量通量相平衡的流体。必须注意，这幅图象完全没有考虑该区域在 $r=1$ 的侧边界区域里的动力学特性。还有一个重要的问题是应当意识到，以上给出的解在侧边界附近是不足的。除非$\tau(r)$在该区域边界上恰好为零，否则一阶切向地转运动不会满足 $r=1$ 处的无滑动边界条件。此外，显然在该区域的内区中，在外加应力旋度作用下上升的流体，必定在某个地方自上艾克曼层下沉到下艾克曼层，以使径向质量流闭合。

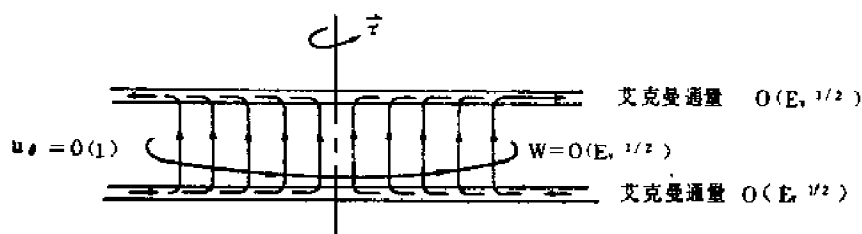


图4.13.3　在不受侧边界影响的区域中，流体运动的示意图

流体以 $O(1)$速度沿圆周方向流动，同时在流体辐合的下艾克曼层中，由于艾克曼抽吸作用产生一个小的垂直运动，并吸入上艾克曼层中，在那里流体元又沿径向朝外输出。

若回到（4.13.6）式，则我们看到，忽略$O(Re^{-1})$的水平涡度扩散，是涡度方程的奇异摄动。我们可以预料，忽略该项只能在侧边界之外得到有用的结果。在该区域周界附近，水平动量扩散效应必定变为重要项，从而满足无滑动边界件条。我们把满足（4.13.7）式的流函数，称为内区地转流函数。即在该区周界以外，由（4.13.10）式有

$$\psi=\psi_I(r)=2\int_0^r \tau(r')dr'. \tag{4.13.22}$$

我们预料在$r=1$的附近，流函数在径向上的变化将足够快，以至于在涡度平衡中，必须考虑（4.13.6）式中的水平扩散项。令

$$\eta=\frac{1-r}{l} \tag{4.13.23}$$

是伸长的边界层径向坐标，且令边界层中的 ψ 为

$$\psi=\psi_I(r)+\hat{\psi}(\eta), \tag{4.13.24}$$

这里 $\hat{\psi}(\eta)$ 是摩擦层中产生的对内区流函数的修正量。因为 ψ_I 满足（4.13.7）式，所以把（4.13.24）式代入（4.13.6）式得到$\hat{\psi}(\eta)$的齐次方程，即

$$O=-\frac{E_V^{1/2}}{2\varepsilon}\left\{\frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial\eta^2}+\frac{l}{r}\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\eta}\right\}$$

$$+\frac{1}{Rel^2}\left\{\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+\frac{l}{r}\frac{\partial}{\partial\eta}\right\}\left\{\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+\frac{l}{r}\frac{\partial}{\partial\eta}\right\}\hat{\psi}. \tag{4.13.25}$$

当$\eta\to\infty$时修正函数$\hat{\psi}$必定为零，所以（4.13.24）式平滑地过渡为内区解。于是，由于假设了$l\ll1$，故对一切与$r=1$的值相差$O(l)$以上的 r（即由（4.13.23）式$r=1-l\eta$），$\hat{\psi}$值均为零。因此，在（4.13.25）式中r可以用 1 代替。因$l\ll1$，故（4.13.25）式精确到最低阶时变为

$$\frac{d^4}{d\eta^4}\hat{\psi}-l^2\frac{E_V^{1/2}}{\varepsilon}\frac{Re}{2}\frac{d^2\hat{\psi}}{d\eta^2}=0. \tag{4.13.26}$$

因为根据（4.6.2）式有

$$\frac{E_V^{1/2}}{\varepsilon}\frac{Re}{2}=\frac{E_V^{1/2}}{2\varepsilon}\frac{2\varepsilon}{E_H}=\frac{E_V^{1/2}}{E_H}, \tag{4.13.27}$$

为了使（4.13.26）式中的两项可以平衡，l 必须为

$$l=\frac{E_H^{1/2}}{E_V^{1/4}}. \tag{4.13.28}$$

这就得出一个有量纲的边界层厚度：

$$\delta_s=Ll=\left(\frac{2A_H}{f}\right)^{1/2}\frac{D^{1/2}}{\delta_E^{1/2}}, \tag{4.13.29}$$

其中δ_E是水平边界上艾克曼层的厚度。

长度尺度 δ_S 反映产生该侧边界层的物理平衡。切向运动的摩擦阻滞在边界处产生的涡度向外扩散。假如没有别的机制，那末根据简单的扩散定律，这种扩散在时间t_*内，达到量级为

$$l_*=(A_H t_*)^{1/2} \tag{4.13.30}$$

的距离上。但是在旋转减弱时间的量级上，如 4.7 节所述，这涡度将被艾克曼抽吸效应抵消掉。由（4.7.8）式，这个时间为

$$\tau=\frac{D}{\delta_E}f^{-1},$$

所以（4.13.30）式中涡度渗透的扩散长度 l_* 为

$$l_*=(A_H\tau)^{1/2}=\left(\frac{A_H}{f}\frac{D}{\delta_E}\right)^{1/2}, \tag{4.13.31}$$

除了一个常数因子外，此式与（4.13.29）式相同。

于是方程（4.13.26）的通解是

$$\hat{\varphi}=C_1+C_2\eta+C_3e^{\eta}+C_4e^{-\eta}. \tag{4.13.32}$$

为了使 $\eta\to\infty$ 时 $\hat{\varphi}$ 可以为零，C_1、C_2 和 C_3 必须为零，所以

$$\psi=\psi_I(r)+C_4e^{-\eta}. \tag{4.13.33}$$

在$r=1$（即$\eta=0$）上，切向速度必须为零，即

$$\frac{\partial\psi}{\partial r}=0=\frac{\partial\psi_I(1)}{\partial r}+\frac{C_4}{l}, \tag{4.13.34}$$

故得

$$\psi=\psi_I(r)-\frac{E_H^{1/4}}{E_V^{1/2}}\psi_I(1)e^{-\eta}. \tag{4.13.35}$$

由于 $\psi_I(r)e^{-\eta}$对一切不等于 1 的 r 实际上为零，故（4.13.35）式可以近似表示为

$$\begin{aligned}\psi&=\psi_I(r)\left\{1-\frac{E_H^{1/2}}{E_V^{1/4}}e^{-\eta}\right\}\\&=\psi_I(r)\left\{1-\frac{E_H^{1/2}}{E_V^{1/4}}\exp\left(-[1-r]\frac{E_V^{1/4}}{E_H^{1/2}}\right)\right\}.\end{aligned} \tag{4.13.36}$$

类似地，切向速度为

$$u_\theta = 2\tau(r)\{1-e^{-\eta}\} = 2\tau(r)\left[1-\exp\left((1-r)\frac{E_V^{1/4}}{E_H^{1/2}}\right)\right], \qquad (4.13.37)$$

且如图4.13.4所示。同艾克曼层相比，侧边界层速度从边界向内区单调增加。

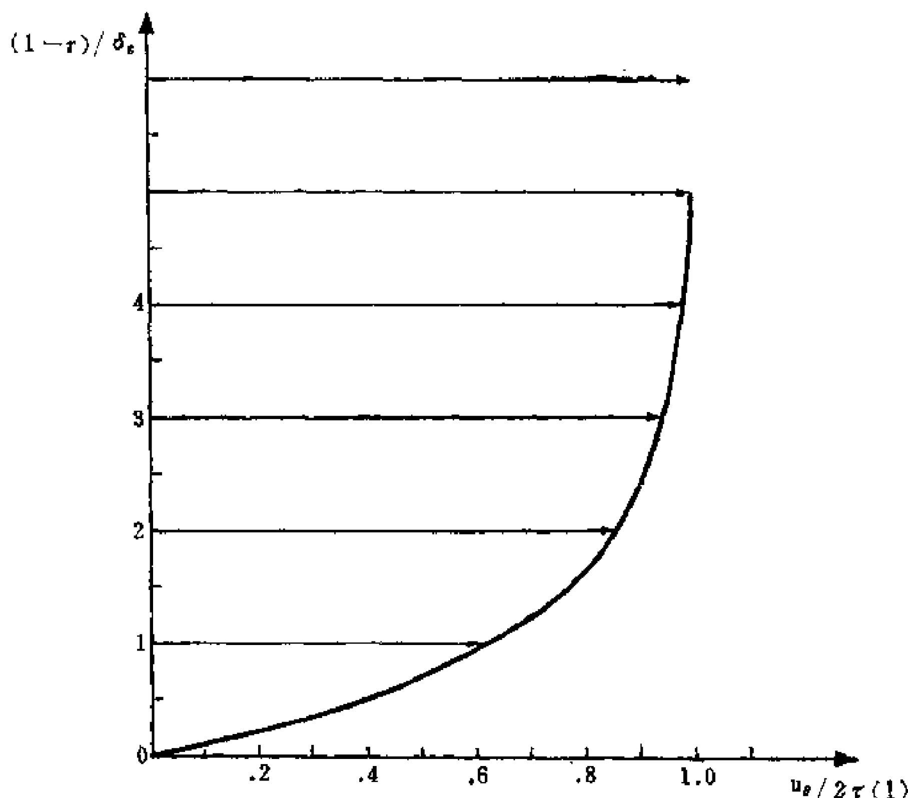


图4.13.4　侧边界附近$u_\theta(r)$的廓线。侧边界层的特征宽度是$\delta_S=(2A_H/f)^{1/2}(D/\delta_E)^{1/2}$。

图 4.13.5 所示的交叉阴影区是 $r=1$ 处的垂直边界层与上下艾克曼层相交的区域。在这个边界层的相交区域，例如$z=0$处，速度场将是$\zeta=z/E_V^{1/2}$和$\eta=(1-r)E_V^{1/4}/E_H^{1/2}$的函数。水平方程中摩擦项的形式是

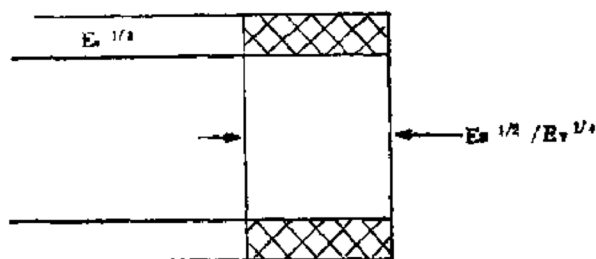


图4.13.5　交叉阴影区是侧边界层和艾克曼层的相交区。在这些区域内，艾克曼层动力学仍适用

$$\frac{E_V}{2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2}+\frac{E_H}{2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \zeta^2}+\frac{E_V^{1/2}}{2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \eta^2}, \qquad (4.13.38)$$

所以在交叉阴影区里，重要的摩擦项是产生艾克曼层平衡的那些项。侧边界层是如此之宽，以至对位于其下（和其上）的摩擦区而言，艾克曼层分析可以直接用于侧边界层，就好象它是一个普通的内区地转运动一样。尤其是艾克曼层边界条件（4.5.39）式和（4.10.18）式适用于（4.13.21）式在 $z=0$ 和 $z=1$ 处的解。在 $z=1$ 处，垂直速度也由（4.13.21）式给出，这是因为侧边界层中的速度没有垂

直切变。这意味着紧邻侧边界上的艾克曼通量在宽度为δ_S的层中不下沉。所以，(4.13.37)式所描写的侧边界层，只能满足无滑动条件。这一地转运动层并不满足小径向质量通量下降到下艾克曼层的附加要求。

为了满足质量通量平衡，也需要有一个厚度为δ_S的附加边界层。为了使该层具有不同的动力学特征，它必须在最低阶上，或包含非地转或包含非静力效应，因为否则的话，将重新出现δ_S层。使量级为$O(E^{1/2})$的小质量平衡所要求的这些薄上升流层之讨论，将放到5.12节和8.3节中进行。在那里将详细地描写这种非地转效应。

第五章 大洋风生环流的均质模式

5.1 引言

对于海水运动的描述，自古至今都是既强调它的突然变化，也注意到变化的连续性。骤然而猛烈的剧变和令人神往的平静，构成许多描述海洋的戏剧性情景。随着航海与探险时代的到来，人们开始进一步地描述大洋环流的一般图像。现在已经清楚，在每个大洋中都有时间平均的环流型。但是这种环流型的观测结果，有可能受到强烈变化的歪曲。

即使现在，如果以为人们对时间平均总环流图像的了解已足够精确，那末这可能是一种误解。在大洋环流的观测和描述上仍然存在许多空白。尽管如此，大洋环流的某些基本特点，对全球各大洋来说是共同的，而且对这些特点所作的解释，提出了海洋动力学中一个非常重要的课题。

图 5.1.1 给出全球大洋表层流环流型示意图。各大洋环流型的最显著特点，大概是环流明显的西部强化。例如在北大西洋中，顺时针循环流一般具有量级为 1 到 10 厘米/秒的缓慢速度，但在佛罗里达到哈特腊斯角（在这里湾流重新加入内区环流）之间，紧靠西边界的窄而强的湾流区域是例外的，这支海流的速度实在令人吃惊，其典型流速是100厘米/秒，而其极大值可以达到该值的两倍。它的宽度尚难准确地确定，但知道强流区的宽度量级为50到100公里。因此，湾流中单位体积流体元的动量 ρu 的量级是O(100 克/厘米^2·秒)。虽然大气急流的速度比湾流约大 100 倍，但上述量级却比大气急流中空气元的动量大一个量级。湾流规模之宏大还表现在它的质量总输送量上。不同研究者的估计虽不相同，但对于通过湾流横截而输送质量之速率所得的典型估计值是每秒九千万立方米的量级。不仅湾流如此，太平洋中的黑潮、南大西洋中的巴西海流和东非沿岸的厄加勒斯海流，也都呈现出惹人注目的环流的西部强化。

特别能说明问题的现象发生在印度洋中，在那里，冬季的时候，西部的海流沿索马里海岸向南流。夏季当西南季风爆发（通常在五月份）之后，海流调转方向，出现了一支强劲的向北的索马里海流，其结构与速度都与黑潮和湾流类似。索马里海流对风向转换的响应非常明显，这说明大洋环流可能是由风的作用引起的。实际上，除了西部强化这一重要而特殊的情况以外，海洋环流型是风场环流型的反映，即赤道地区在信风影响下一般往西流，而在中纬西风带区域，则主要是向东流。虽然海面的不均匀加热可以通过浮力产生运动，但可以证明（见 6.21 节），在多数情况下，只有外加风应力能在大洋中产生净（垂直积分）的水平输送。

本章讨论大洋环流的简单模式，它把海洋的运动完全归因于风的作用，尤其是施加于海面上的风应力。在这些模式中，密度是均匀的，因此完全忽略了层结的动力效应；而且在大多数模式中，既忽略了复杂的海底地形，也忽略了各大洋盆地边界形状的复杂性。尽管如此，这些模式在描述水平环流的一般特征方面仍然十分成功。当然它们不能描写流动的垂直结构，后者与密度场有密切的关系。

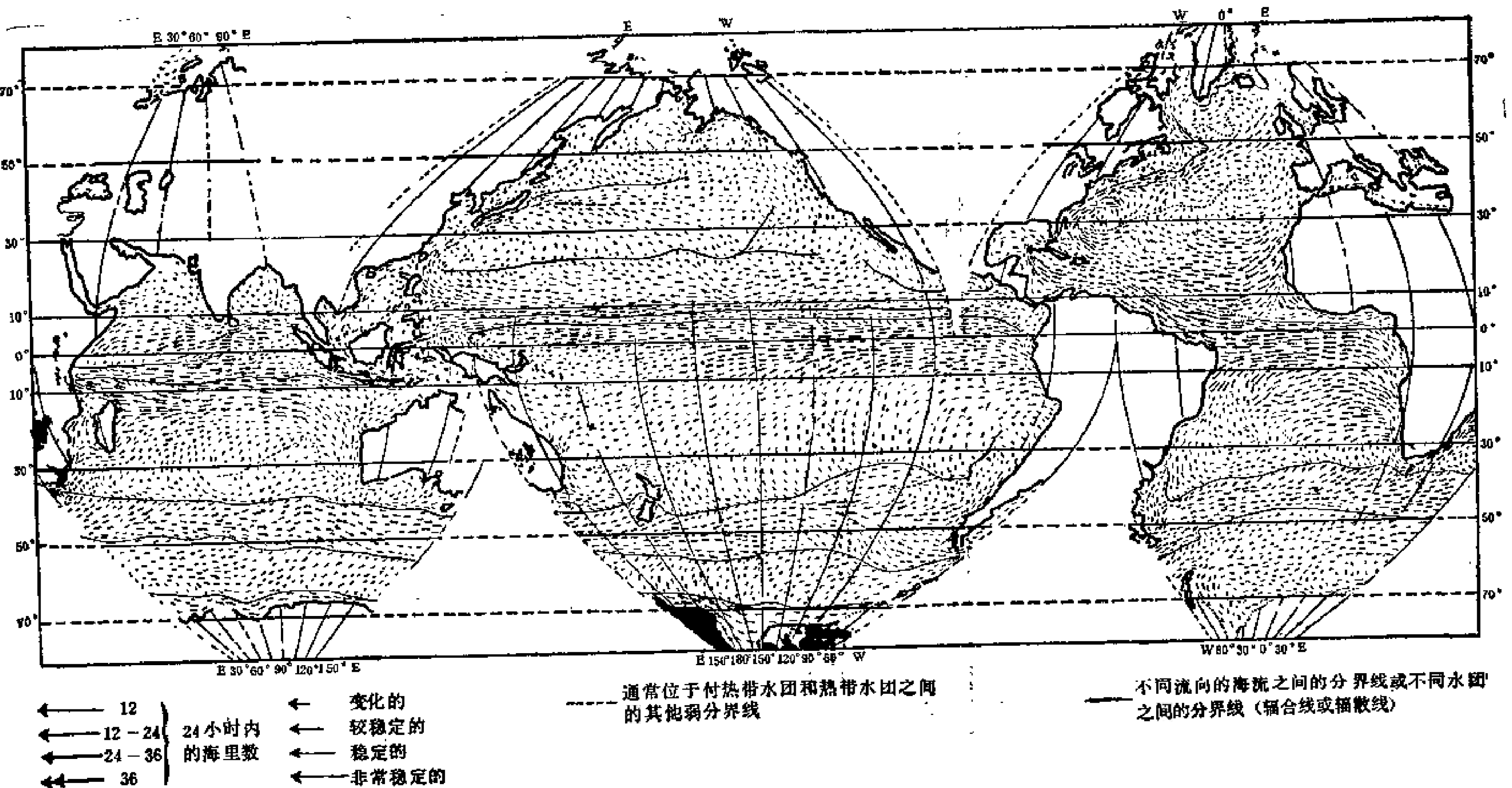


图5.1.1　全球大洋环流型

该图（引自Defant（1961））是根据观测值和船舶报告的多年累积资料绘制的。虽然它不够精确而只是一个示意图，但却揭示出主要大洋环流的西部强化现象。

虽然各大洋盆地在具体的形状、地形、层结及风应力型等方面都有差异，但每个大洋都表现出西部强化。这就说明总环流受到一种强而简单的制约关系的控制。均质模式的优点，正在于它能用最基本的方法清楚地揭露出这些制约关系。模式之成功，在于它们很好地刻划了大洋环流的许多基本物理性质。然面均质模式也有它的不足之处，例如，不能合理地预测大洋变化的性质，失败的物理原因显然与没有层结有关。

5.2 均质模式

本节我们充分利用第三章和第四章中系统的尺度分析和详细计算，用直观的方式来建立均质大洋环流的数学模式。这样做的目的，是为了强调该模式的简单的物理基础。图5.2.1给出模式的基本组成部分。流体层主要由三个区域组成：薄的表面艾克曼层、典型深度为D的主体内区和倾斜底面上的薄的底摩擦艾克曼层。如4.10节所述，外加风应力直接产生上艾克曼层中的水平体积通量：

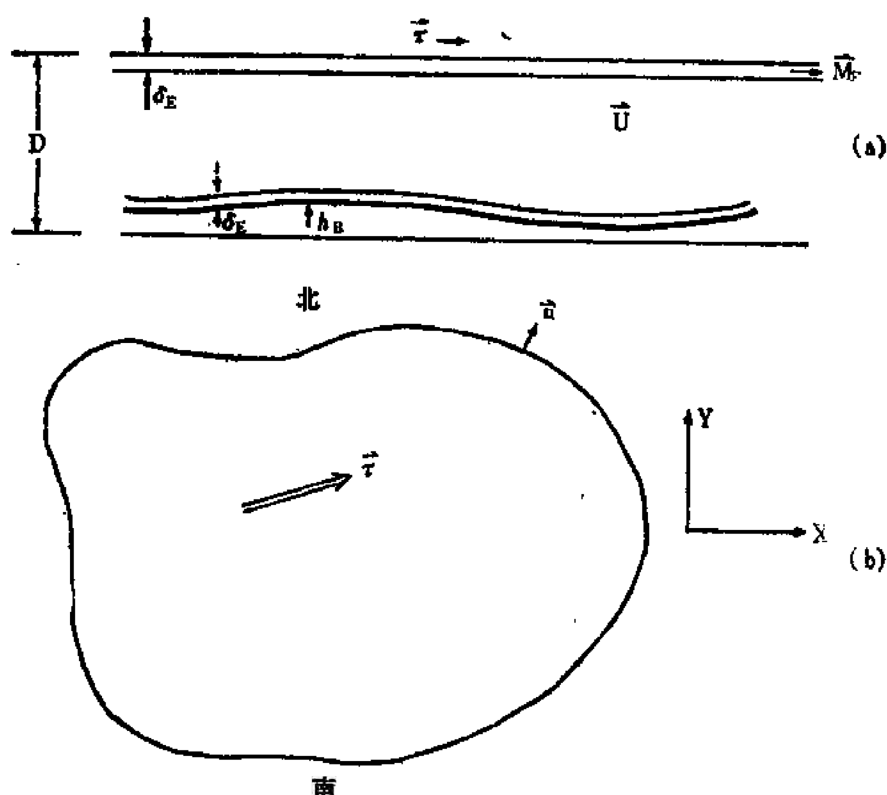


图5.2.1

(a) 均质模式的基本组成部分，τ是外加应力，表层厚度为$\delta_E \ll D$。表层质量通量是M_E。在变化的深度h_B处的海底上，有一个薄的底层。(b) 从平面图上看，大洋区域的有界性是动力学的一个重要部分。从动力学上说，向北的方向表示科氏参数随纬度增加的方向

$$M_E = \frac{\tau}{\rho f} \times k, \qquad (5.2.1)$$

其中τ是风应力，ρ是水平密度，f是科氏参数，k是垂直方向的单位矢量。在(5.2.1)式和

本节随后的公式中，所有变量都是有量纲的。已知科氏参数为

$$f=2\Omega\sin\theta, \tag{5.2.2}$$

式中 θ 是纬度。

内区位于两个薄摩擦层之间。在上一章里，曾系统地证明了，对于小罗斯贝数的情况，内区的基本动量平衡由地转近似给出，而压力场由涡度场动力学来确定。在(4.6.7) 式中还证明了，对于小罗斯贝数的情况，绝对涡度垂直分量的变化原因为：(1)行星涡管的伸缩和(2)通常很小的水平涡度扩散效应。用有量纲的单位表示，即

$$\frac{d}{dt}(\zeta+f)=f\frac{\partial w}{\partial z}+A_H\nabla^2\zeta. \tag{5.2.3}$$

(5.2.3) 式和 (4.6.7) 式之间有一个根本的差异。在推导(4.6.7)式时，f 取为常数，而在(5.2.3)式中保留了科氏参数随纬度的变化。3.17节中关于 β 平面的直观讨论表明，对小于 $O(r_0)$（这里 r_0 是地球半径）的运动尺度 L，地球的球形在动力学上有意义的效应是引进了行星涡度梯度

$$\beta_0=\frac{df}{dy}=\frac{2\Omega\cos\theta_0}{r_0}, \tag{5.2.4}$$

式中θ_0是区域的中心纬度，除了对涡度动力学的贡献以外，地球的球形性质可以忽略。这个直观的概念，在第六章中将通过渐近分析，用严格的方法建立起来。详细的分析证实了我们建立起来的这个直观图像是正确的。在此关心 β 平面近似的读者，可以先看一下第六章，然后再看这里的模式推导。

在 4.9 节中曾讨论过倾斜下边界上的艾克曼层。除了地形对运动的抬升作用产生的垂直速度以外，内区运动的摩擦阻尼，产生流入（或流出）内区的抽吸速度。用有量纲的单位表示，在内区下边缘上进入内区的垂直速度是

$$w(x,y,h_B)=\mathbf{u}\cdot\nabla h_B+\frac{\delta_E}{2}\zeta. \tag{5.2.5}$$

因为内区是均质且地转的，u、v，从而 ζ，都一定与 z 无关，所以很容易对(5.2.3)式在地转区的整个厚度层内积分，得到

$$[D-h_B]\left\{\frac{d\zeta}{dt}+v\beta_0-A_H\nabla^2\zeta\right\}=f\{w(x,y,D)-w(x,y,h_B)\}, \tag{5.2.6}$$

其中已使用了关系式

$$\frac{df}{dt}=v\beta_0. \tag{5.2.7}$$

对定常运动，抽吸进入上艾克曼层的垂直速度，完全由4.10节所述的艾克曼质量通量的散度给出，即，

$$w(x,y,D)=\nabla\cdot\mathbf{M}_E=\nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{\tau}\times\mathbf{k}}{\rho f}\right)=\mathbf{k}\cdot\mathrm{curl}\frac{\boldsymbol{\tau}}{\rho f}. \tag{5.2.8}$$

如果在(5.2.6)式中利用(5.2.5)和(5.2.8)式则有

$$D\left[1-\frac{h_B}{D}\right]\left\{\frac{d\zeta}{dt}+v\beta_0-A_H\nabla^2\zeta\right\}=f\left\{\mathbf{k}\cdot\mathrm{curl}\frac{\boldsymbol{\tau}}{f\rho}-\frac{\delta_E}{2}\zeta-\mathbf{u}\cdot\nabla h_B\right\}. \tag{5.2.9}$$

这就是前面所描述的简单物理模式的数学表达式。尽管它很简单，但就实际情况来说，

它仍是一个难以处理的微分方程。为了进一步求解，必须作进一步的简化。首先使变量无量纲化可以使简化易于进行。用通常的办法，引入L、U、L/U、和τ_0作为运动的水平尺度、水平速度、时间和应力的特征尺度——即若暂时用撇号表示无量纲变量，则有

$$(x,y)=L(x',y'),\quad \zeta=\frac{U}{L}\zeta',$$
$$(u,v)=U(u',v'),\quad \tau=\tau_0\tau'. \tag{5.2.10}$$

注意在β平面近似下有

$$f=f_0+\beta y=f_0\left(1+\frac{\beta_0 L}{f_0}y'\right). \tag{5.2.11}$$

式中

$$\frac{\beta_0 L}{f_0}=(\cot\theta_0)\frac{L}{r_0}=O\left(\frac{L}{r_0}\right)<O(1). \tag{5.2.12}$$

此时，方程(5.2.9)变成

$$\left[1-\frac{h_B}{D}\right]\left\{\frac{d\zeta}{dt}+\beta v-\frac{\nabla^2\zeta}{Re}\right\}=\frac{\tau_0 L}{\rho DU^2}\left[\mathrm{curl}\tau+\tau^{(x)}\frac{\beta_0 L}{f}\right]-\frac{\delta_E}{2D}\frac{f_0 L}{U}\left(1+\frac{\beta_0 L}{f_0}y\right)\zeta$$
$$-\mathbf{u}\cdot\nabla\left(\frac{h_B}{D}\right)\frac{f_0 L}{U}\left(1+\frac{\beta_0 L}{f_0}y\right). \tag{5.2.13}$$

式中

$$Re=\frac{UL}{A_H},$$
$$\beta=\frac{\beta_0 L^2}{U}, \tag{5.2.14}$$
$$\mathrm{curl}\tau=\frac{\partial\tau^{(y)}}{\partial x}-\frac{\partial\tau^{(x)}}{\partial y},$$

此处不带撇的变量现在是无量纲的。有量纲变量用星号标记，即

$$u_*=Uu, \tag{5.2.15}$$

等等.

因为$\beta_0 L/f_0$在满足β平面近似的情况下肯定是小量，所以(5.2.13)式可进一步简化为

$$\frac{d\zeta}{dt}+\beta v=\frac{\tau_0 L}{\rho D\mathbf{u}^2}\mathrm{curl}\tau-r\zeta-\mathbf{u}\cdot\nabla\eta_B+\frac{\nabla^2\zeta}{Re}, \tag{5.2.16}$$

式中

$$r=\frac{\delta_E}{2D\varepsilon},\qquad \eta_B=\frac{h_B/D}{\varepsilon},\qquad \varepsilon=\frac{U}{f_0 L}, \tag{5.2.17}$$

而且利用了$h_B/D\ll 1$的事实。

在任何即使部分真实的海洋环流模式中，Re仍是大量，而r为$O(1)$或更小。如果考虑实际地形坡度，由于ε是小量，η_B可以是大量，但是速度均匀地伸展到底的均质模式，过高地估计地形对涡度平衡的影响。地形对涡管伸缩的贡献，实际上取决于底层速度的大小，而在海洋中按时间平均的底层速度，通常比整个深度上的平均速度小得多。在下面的分析中，将认为海底是平坦的，但是如果要考虑地形的影响，那末η_B的大小，大概应当从利用实际海底坡度得到的值缩减到象η_B和底层速度与平均速度之比的乘积这样的值。类似的考虑也应当适用

于r，它表示底摩擦的影响。另一方面，对所有真实的大洋中部运动来说，β是很大的数。若L为10^3公里，即令U大到10厘米/秒，$\beta_0=10^{-13}$厘米$^{-1}$秒$^{-1}$，则$\beta=O(10^2)$。在大洋中部涡度平衡中的主要项是，流体在行星涡度梯度中向北运动所产生的绝对涡度的增加。当流体涡度以与 curlτ成正比的速率增加时，流体通过缓慢地向高纬（在那里它的行星涡度值较大）运动而增加其绝对涡度。这种平衡意味着，合理的速度尺度U，应当选得使风应力旋度和β平项衡，即

$$\frac{\tau_0 L}{\rho D U^2}=\beta=\frac{\beta_0 L^2}{U}, \tag{5.2.18}$$

或者

$$\boxed{U=\frac{\tau_0}{\rho D\beta_0 L}} \tag{5.2.19}$$

如果τ_0是1达因/厘米^2（风应力的典型值），D是5公里，那末速度U的量级为O(0.2厘米/秒)，这应当解释为在整个大洋深度上的平均洋中速度，或者是单位宽度上量级为O(10^5厘米^2/秒）的洋中输送。

如果D代表大洋主温跃层的深度（即大洋比较暖的表层的深度，其中出现主要的大尺度洋流)，那末D为O(1公里)，而U将是O(1厘米/秒)。

利用U的这一尺度，(5.2.16) 可以最后写为下述形式

$$\boxed{\frac{1}{\beta}\frac{d\zeta}{dt}+v=\text{curl}\,\tau-\mathbf{u}\cdot\frac{\nabla\eta_B}{\beta}-\frac{r}{\beta}\zeta+\frac{\Delta^2\zeta}{\beta Re}}. \tag{5.2.20}$$

因为速度是地转的，所以u、v和ζ可以用地转流函数ψ表示：

$$u=-\frac{\partial\psi}{\partial y},\qquad v=\frac{\partial\psi}{\partial x},\qquad \zeta=\nabla^2\psi. \tag{5.2.21}$$

利用这些表达式，则对定常运动，(5.2.20)式为

$$\boxed{\frac{1}{\beta}\left\{\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}[\nabla^2\psi+\eta_B]-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}[\nabla^2\psi+\eta_B]\right\}+\frac{\partial\psi}{\partial x}=\text{curl}\,\tau-\frac{r}{\beta}\nabla^2\psi+\frac{\nabla^4\psi}{\beta Re}}. \tag{5.2.22}$$

在区域的周界C上，垂直于边界的总输送（即积分的水平速度）一定为零。根据 (5.2.19)式，地转速度的输送量的量级是

$$\rho UD=\left(\frac{\tau_0}{L}\right)\frac{1}{\beta_0}$$

（即风应力旋度除以β_0的量级），而上艾克曼层中的艾克曼输送量是

$$|\mathbf{M}_{*E}|=O\left(\frac{\tau_0}{f_0}\right), \tag{5.2.23}$$

所以

$$\frac{|\mathbf{M}_{*E}|}{\rho UD}=O\left(\frac{\beta_0 L}{f_0}\right)\ll 1. \tag{5.2.24}$$

于是精确到L/r_0的最低阶，主要输送是由于地转运动，注意下艾克曼层中的输送仅为$O(U\delta_E)$。为了使区域周界上的法向输送分量可以为零，垂直于边界的地转速度必须为零。换句话说，

即在定常运动中，周界必须是一条等ψ线。如果输送计算到更高阶，包括了艾克曼输送效应，那末地转速度在较高阶上，不必在岸边为零。5.12节将讨论这个有意思的问题。但是在最低阶上，上述考虑表明，区域边界上法向输送为零要求ψ是常数，或

$$在 C 上, \qquad \psi=0, \tag{5.2.25}$$

而无滑动条件要求

$$在 C 上, \qquad \mathbf{n}\cdot\nabla\psi=0, \tag{5.2.26}$$

式中$\mathbf{n}$是C的向外的法向矢量。

一旦给定了$\boldsymbol{\tau}$，那末关于环流的问题，就完整地提出来了。但是实际上，根据风的观测资料来精确地确定风应力并非是一件容易的事情。除了对大洋表面风场的了解不够充分之外，风与应力之关系本身也是一个困难问题。通常用如下形式的经验公式：

$$\boldsymbol{\tau}_* = C_D\rho_a\mathbf{U}_a|\mathbf{U}_a|, \tag{5.2.27}$$

式中ρ_a，$\mathbf{U}_a$和$|\mathbf{U}_a|$是在海面上空某一小高度（通常约10米）上测量（或外推）的空气密度、空气速度和速率。经验系数C_D是拖曳系数。其量级为2×10^{-3}，但象所有的经验系数一样，它本身可随风速而变化（通常随风速加大而增加）。由(5.2.27)式可清楚地看出，应力对高风速区间特别敏感。因此，即使认为(5.2.27)式是正确的，但在$\mathbf{U}_a$很大的短时间内精确地获得$\mathbf{U}_a$之困难，使计算$\boldsymbol{\tau}_*$的任务变得困难而又棘手。

在本章中我们将暂时避开这一问题.对理论推导来说，只需要勾划出应力场的大致特征。给出主要风系图像的风应力之一般趋势，足以揭示出基本的动力学结果。这一观点与前面的观测结果是一数的：即环流的总图像（如西部强化）似乎与强迫风作用的细节无关。

5.3 斯维尔德鲁普关系

如果洋底是平坦的，或者$\eta_B\ll\beta$，且

$$\begin{aligned} \beta^{-1}&=\frac{U}{\beta_0L^2}\ll1, \\ (\beta Re)^{-1}&=\frac{A_H}{\beta_0L^3}\ll1, \\ \frac{r}{\beta}&=\frac{\delta_E f/2D\beta_0}{L}\ll1, \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

那末精确到最低阶，(5.2.20)化简为

$$\boxed{v=\operatorname{curl}\tau}. \tag{5.3.2}$$

条件(5.3.1)对大洋内部的大尺度运动来说，一般是适合的，而$\eta_B\ll\beta$的条件反映了5.2节讨论的事实，即由于真实大洋底层的速度较弱，所以使地形影响的重要性降低。

条件(5.3.2)是斯维尔德鲁普关系。在3.12节曾指出，当环境位涡梯度远大于相对涡度梯度时，自由地转流必沿环境位涡等值线运动。在现在的情况下，$\beta\gg1$正是这个条件，环境位涡f/D等值线就是y的等值线。故对自由运动，我们有$\tau=0$，并且(5.3.2)式表明，（与涡度约束关系一致），v必定为零。其次，斯维尔德鲁普关系指出，流体穿越f等值线的程度，由风应力旋度给流体元提供的涡度大小决定。当正(负)的风应力旋度给流体元以正(负)涡度时，流体必定向北（向南）运动。这一关系没有直接给出关于运动是沿环境位涡等值线进行的信息。这又是地转运动退化的反映，因为只要是沿环境位涡等值线，则任何地转运动

都是容许的。只有那些在推导斯维尔德鲁普关系时略去的小涡源和涡汇，才能确定地转运动，而且根据(5.3.1)式，这些影响在大洋内区中是全然忽略的。

如果在(5.2.9)式中不略去量级为$O(\beta_0 L/f_0)$的项，但(5.3.1)式的不等号成立，则(5.2.9)式仍可近似表为

$$
\begin{aligned}
Dv_* \beta_0 &= f\mathbf{k}\cdot \mathrm{curl}\frac{\tau_*}{\rho f} \\
&= \mathbf{k}\cdot \mathrm{curl}\,\tau_* + \tau_*^{(y)}\frac{\beta_0}{\rho f}.
\end{aligned} \tag{5.3.3}
$$

因为$-\tau_*^{(y)}/f$是向北的艾克曼输送，所以(5.3.3)式就是

$$\beta_0[Dv_* + M_{*E}^{(y)}] \equiv \beta_0 M_{*S}^{(y)} = \mathbf{k}\cdot \mathrm{curl}\,\tau_*. \tag{5.3.4}$$

因此总的向北输送$M_S^{(y)}$由风应力的旋度给出，且(5.3.2)式是在β平面范围内上述较普遍的输送结果的近似表达式。根据(5.2.24)式，在这一普遍结果中，地转输送Dv_*与艾克曼输送之比的量级为$O(f_0/\beta_0 L)$。

考虑如图5.3.1所示的、以位于$x=X_E(y)$和$x=X_W(y)$处的两个经向海岸为边界的大洋区域。在每条边界上法向运动（即法向输送）必定为零。这意味着$O(1)$无粘内区运动必须满足：

$$x=X_E(y)\text{ 处,} \qquad u=v\frac{\partial X_E}{\partial y}, \tag{5.3.5a}$$

$$x=X_W(y)\text{ 处,} \qquad u=v\frac{\partial X_W}{\partial y}, \tag{5.3.5b}$$

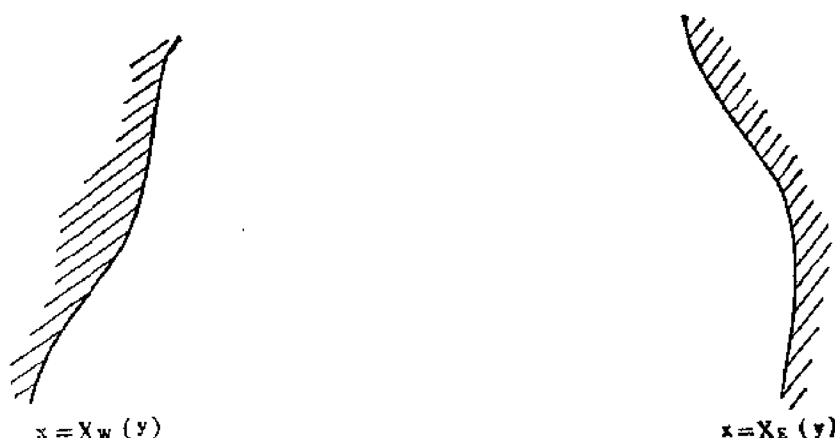


图5.3.1 介于$X_E(y)$处的东海岸和$X_W(y)$处的西海岸之间的大洋区域

式中，不论要求什么样的摩擦层来满足海岸的无滑动条件，u和v都是紧靠边界、但又刚好在边界之外的无粘地转速度。现在，至少象斯维尔德鲁普关系所指出的那样，v完全由τ的旋度给出。尽管纬向运动不确定，但其在x方向上的导数可以通过质量平衡的考虑来确定。即对地转运动有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}, \tag{5.3.6a}$$

所以用(5.3.2)式可得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{curl}\tau. \tag{5.3.6b}$$

积分上式可以得到

$$u(x,y)=-\int_{X_0}^{x}\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{curl}\tau(x',y)dx'+U(y), \tag{5.3.7}$$

式中积分下限是任意的，且$U(y)$是斯维尔德鲁普关系所容许的任意纬向运动。

假定我们试图利用斯维尔德鲁普关系来满足无粘条件(5.3.5a)。在 $x=X_E(y)$ 处，(5.3.5)式意味着

$$-\int_{X_0}^{X_E(y)}\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{curl}\tau(x',y)dx'+U(y)=\operatorname{curl}\tau(X_E,y)\frac{\partial X_E}{\partial y},$$

或者

$$\begin{aligned}U(y)&=\int_{X_0}^{X_E(y)}\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{curl}\tau(x',y)dx'+\operatorname{curl}\tau(X_E,y)\frac{\partial X_E}{\partial y}\\&=\frac{\partial}{\partial y}\int_{X_0}^{X_E(y)}\operatorname{curl}\tau(x',y)dx',\end{aligned} \tag{5.3.8}$$

所以(5.3.7)式变为

$$u(x,y)=-\int_{X_0}^{x}\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{curl}\tau(x',y)dx'+\frac{\partial}{\partial y}\int_{X_0}^{X_E(y)}\operatorname{curl}\tau(x',y)dx',$$

或者，

$$u(x,y)=\int_{x}^{X_E(y)}\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{curl}\tau(x',y)dx'+\operatorname{curl}\tau(X_E,y)\frac{dX_E}{dy}. \tag{5.3.9}$$

在西边界上，(5.3.5)式意味着

$$\begin{aligned}u(X_W,y)&=\int_{X_{W(y)}}^{X_E(y)}\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{curl}\tau(x',y)dx'+\operatorname{curl}\tau(X_E,y)\frac{\partial X_E}{\partial y}\\&=\operatorname{curl}\tau(X_W,y)\frac{dX_W}{dy}.\end{aligned} \tag{5.3.10}$$

为了满足(5.3.10)式，应有

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_{X_{W(y)}}^{X_E(y)}\operatorname{curl}\tau(x',y)dx'=0=\frac{\partial}{\partial y}\int_{X_W}^{X_E}v(x',y)dx'. \tag{5.3.11}$$

仅当斯维尔德鲁普流的总的向南通量为零时，斯维尔德鲁普解(5.3.2)和(5.3.9)才同时满足东边界和西边界处的边界条件。由于这是用风应力旋度明确给出的结果，所以只有非常特殊的风应力旋度才能满足(5.3.11)式。当然，应力场的规定是完全自由的，而条件(5.3.11)一般不能满足。例如，考虑如图3.2所示的理想化的应力场。应力是纬向的，且仅是y的函数。这种应力场可以视为中纬度西风和南方的东信风产生的应力场之简单模式。在这种情况下，总的向北的斯维尔德鲁普输送是

$$\int_{X_W}^{X_E}v(x',y)dx'=(X_E-X_W)\operatorname{curl}\tau. \tag{5.3.12}$$

从图5.3.2可以清楚地看出，仅在旋度为零的纬度y_M和y_N处，输送才为零，所以(5.3.11)

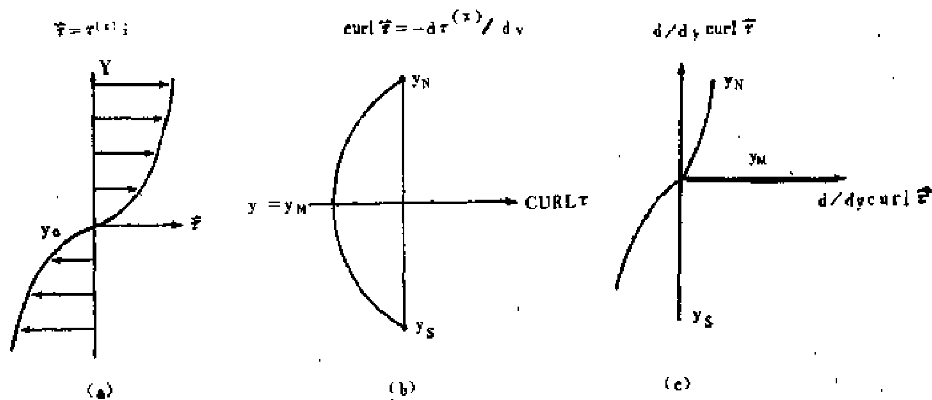


图5.3.2

(a) 一个理想化的风应力随纬度的分布，它模拟中纬度西风和低纬度东信风的作用。
(b) (a)的风应力旋度。在纬度 y_M处，旋度达其极大值。注意，在y_N 和y_S之间，斯维尔德鲁普运动处处都是向南的。
(c) 旋度curlτ对纬度y的导数，纬向斯维尔德鲁普输送与它成正比。注意，y_M一般并不与 y_0 重合。

式显然不成立。还可以清楚地看出，斯维尔德鲁普关系一般不满足整个海域中的质量守恒，这是因为斯维尔德鲁普输送是处处向南的。在y_N和y_M之间，当y由 y_N 变到旋度最大的纬度y_M时，向南的输送量也增加，而在y_N 和 y_S之间则有质量通量的辐合。尽管斯维尔德鲁普关系（5.3.2）是正确的，但它显然并不完善。它既不能单独满足两个岸边的边界条件，也不能满足整个海域中的质量平衡。由此可知，在海域的某个地方，必定有一个在动力学性质上与斯维尔德鲁普运动之动力学性质不同的区域。第四章的讨论表明，这些区域可以出现在边界附近，在那里动力场在边界层中的变化很快。不论这些薄边界层的性质如何，它们必须满足法向运动条件，并且在一个狭窄的区域内，输送的质量通量必须与总的斯维尔德鲁普质量通量

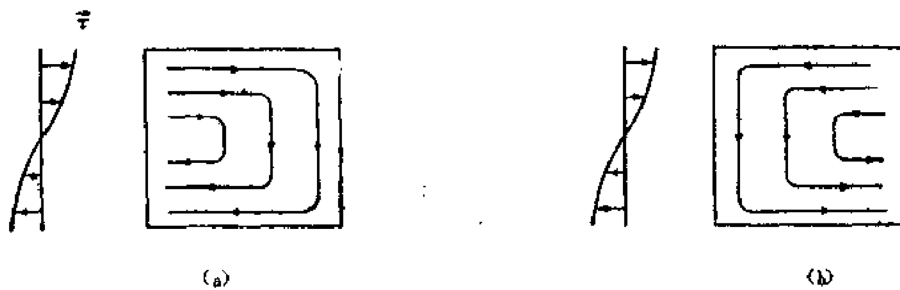
$$\int_{X_W}^{X_E} \mathrm{curl}\tau(x',y)dx'$$

大小相等而方向相反。因此，完全由行星涡度梯度之存在所引起的强斯维尔德鲁普约束关系，意味着存在一个窄而强的边界流（在那里不再受β约束的限制），使质量通量得到补偿。上述论证之普遍性，表明强边界流的存在仅依赖于 β（即地球的球形效应）的存在以及大洋区域的有界性，而不依赖于大洋区域的形状或强迫场结构的具体细节。

虽然很容易把上述斯维尔德鲁普解所要求的狭窄补偿流与西边界流等同起来，但重要的是应注意到，在斯维尔德鲁普关系的框架内，不能预测补偿流会出现在什么地方。例如，考虑如图5.3.2所示的施加在与 y 无关的两个南北向边界 X_W 和 X_E 之间的大洋区域上的应力场。如果所确定的斯维尔德鲁普解，可以满足 $x=X_E$ 处的法向运动为零的条件，则

$$u=(X_E-x)\frac{\partial \mathrm{curl}\tau}{\partial y}, \qquad (5.3.13)$$
$$v=\mathrm{curl}\tau,$$

其流线由图5.3.3(a)示意给出。因$(X_E-x)>0$，所以在$y=y_M$以南u为负，在 $y=y_M$ 以北u为正。注意，虽然运动一般在风强迫作用的方向上，但u的方向可以与τ相反，这是因为y_M不一定与 y_0 重合。也就是说，u 取决于 $\partial^2\tau^{(x)}/\partial y^2$，而不是简单地取决于 $\tau^{(x)}$。此外，v 总是负的，且由(5.3.5a)可清楚看出，假如(5.3.13)式成立，则在西边界附近需要有狭窄的返回



(a)　　　　(b)

图5.3.3

(a) 在内区地转输送满足东边界处法向速度为零的条件时，对如左图所示的应力分布所得到的斯维尔德鲁普输送之流线。注意，它意味着要求有西边界流来补偿运动。
(b) 在斯维尔德鲁普输送满足西边界处法向速度为零的条件时，对与(a)相同的应力分布所得到的斯维尔德鲁普流线。这种选择的成立，隐含地要求存在一支东边界流。

流。然而，使用斯维尔德鲁普解满足 $x=X_E$ 处的通量条件之作法，是完全任意的。同样也可预先选择(5.3.7)式中的 $U(y)$，使之满足 $x=X_W$ 处的法向运动条件。在这种情况下，对如图5.3.2所示的同样的τ，得到的结果不是(5.3.13)式，而是

$$u=(X_W-x)\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{curl}\tau,\qquad v=\operatorname{curl}\tau. \tag{5.3.14}$$

向北的分量 v 当然是不变的，但因 $(X_W-x)\leqslant 0$，故由(5.3.14)式所确定的 u 之方向，恰好与(5.3.13)式给出的 u 之方向相反。所得到的流线如图5.3.3(b)所示。虽然这种运动看上去似乎违背海洋循环流在整体上应与风应力旋度（在此情况下为顺时针方向）一致的自然直觉，但是关键问题在于，应当认识到(5.3.14)式是同(5.3.13)式一样完美的解答，而不能单凭斯维尔德鲁普关系就认为它不如由(5.3.5a)所确定的流动。实际上，正如前面所指出的，$\tau^{(x)}$ 和 $\partial^2\tau^{(x)}/\partial y^2$ 为零的纬度一般并不重合，这一事实意味着在(5.3.13)和(5.3.14)这两个解中，一般在某处运动是逆风向的。Sverdrup(1947) 推导该关系式的动机，恰好是为了解释图5.1中可看到的纬度为5°N到10°N之间的太平洋中（此处海流与信风反向），存在着实测表层逆流的原因。为了得到与观测相符的理论，Sverdrup 任意地选择了满足海洋东岸边界条件的输送。

Welander(1959) 从上述概念导出了合乎逻辑的结论，且使用斯维尔德鲁普理论计算了整个世界大洋的大洋输送，估计了相应的应力场。他详细地说明了斯维尔德鲁普运动满足大洋东边界的通量条件，且指出为了满足质量守恒，必须存在西边界流的地方。图5.3.4所示的Welander的结果与图5.1.1所示的环流之间在定性方面的相似性，有力地证实了斯维尔德鲁普解以及两边界是边界流假定位置的正确性。

最近（Leetmaa, Niller, 和 Stommel, 1977）对大西洋中总的向南的斯维尔德鲁普输送量的计算结果与观测结果的比较，有力地定性证实了 Sverdrup 的洋中理论。在中纬度16°N、24°N和32°N处的计算值分别是12、25和27斯维尔德鲁普（1斯维尔德鲁普$=10^6$米^3/秒），而从直接观测估计的相应输送量分别是14、24和24斯维尔德鲁普，二者极为吻合。

尽管如此，这些结果在目前仅是假设性的，因为没有预先证明，为了使斯维尔德鲁普运动闭合而在东西边界之间所做的选择之合理性。实际上，没有理由预先肯定斯维尔德鲁普解必须满足任一边界（东边界或西边界）处法向速度为零的条件。为了去掉斯维尔德鲁普解中

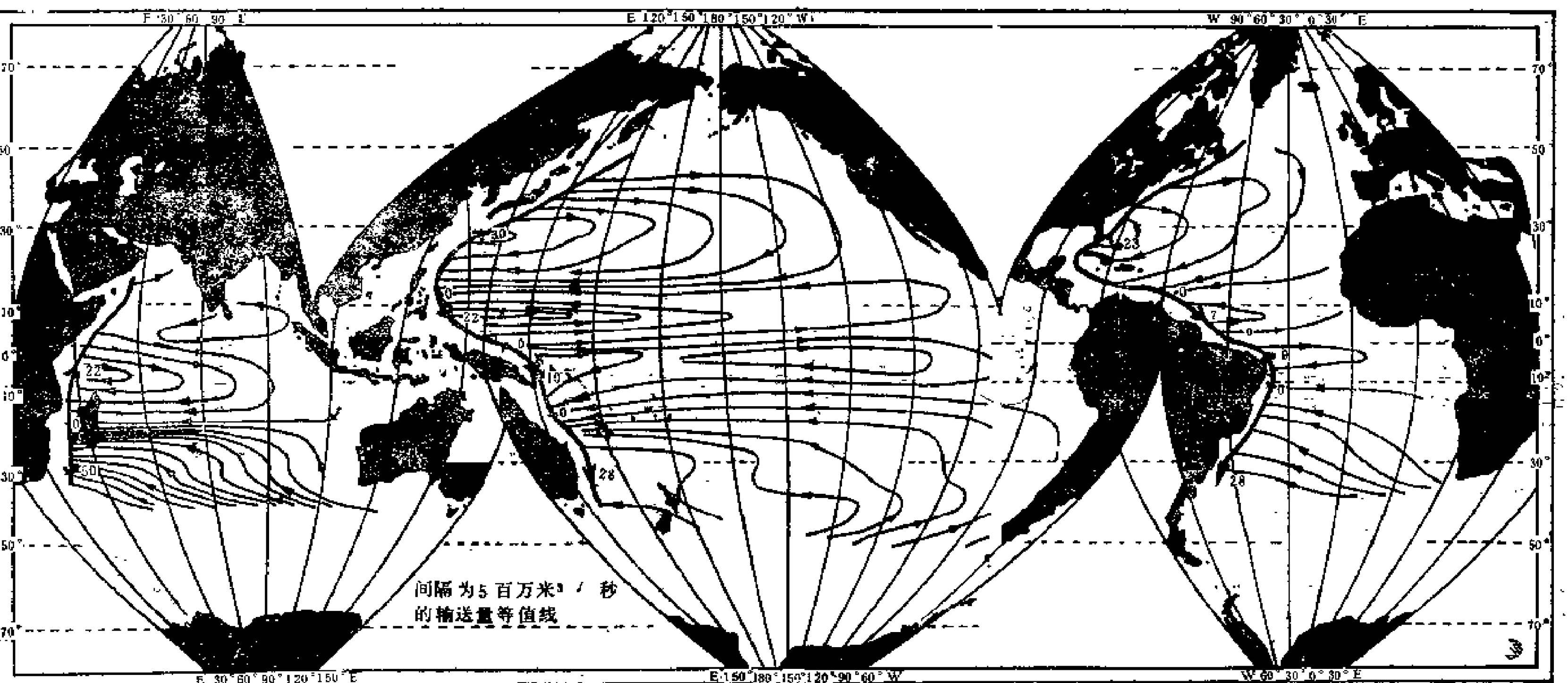


图5.3.4 要求斯维尔德鲁普输送满足大洋东边界的法向运动条件时，对应于年平均风应力场的大洋的斯维尔德鲁普输送和其意含的西边界流。数字表示以斯维尔德鲁普（百万立方米/秒）为单位的体积输送（Welander, 1959）。

模棱两可的含义，必须非常详细地考察X_E和X_W处所要求的边界层，并导出它们与内区运动的关系。重要的是记住下述基本事实：边界流区域中必须返回的总质量通量是

$$M_B=\int_{X_W}^{X_E} \mathrm{curl}\tau(x',y)dx', \tag{5.3.15}$$

而且它与边界的具体结构无关，流动只取决于边界的存在。

5.4 经向边界层：蒙克层

斯维尔德鲁普解的退化，要求详细分析靠近X_E和X_W的可能边界层之性质。边界层的存在意味着斯维尔德鲁普关系之动力平衡的局部破坏，即涡度方程中对开阔大洋可以忽略的项，在边界附近就变成重要的了。衡量这些因子对涡度平衡可能有附加贡献的不等式(5.3.1)，可以用长度尺度的比值来解释。

定义长度

$$\delta_I=\left(\frac{\tilde{U}}{\beta_0}\right)^{1/2},$$

$$\delta_M=\left(\frac{A_H}{\beta_0}\right)^{1/3},$$

和

$$\delta_S=\frac{\delta_E f}{2D\beta_0}, \tag{5.4.1}$$

式中U由(5.2.19)式给出。于是条件(5.3.1)等价于

$$L\gg\delta_I、\delta_M、\delta_S, \tag{5.4.2}$$

其中L是运动尺度。于是我们可以很自然地料到，对那些运动尺度和上述三个尺度之一有同量级的充分窄的运动区域，涡度方程中的有关项，将与行星涡度梯度项量级相同。依δ_I、δ_M和δ_S的相对大小而定，在涡度平衡中或者要考虑惯性力，或者要考虑水平摩擦力，或者要考虑底摩擦。注意，这三个尺度均与β_0成反比，所以，正因为产生与斯维尔德鲁普关系有关的不确定性的β_0之存在，才使狭窄区域的存在成为可能，在这些狭窄区域里可以打破斯维尔德鲁普关系，并消除不确定性。

为了具体表达上述概念，考虑经向边界X_E和X_W均与y无关的情况（更普遍的情况可以类似地描写）。与上节一样，仍把大洋底考虑为平坦的($\eta_B=0$)。在经向边界之外的大洋内区，内区流函数ψ_I满足(5.3.2)式：

$$\frac{\partial\psi_I}{\partial x}=\mathrm{curl}\tau, \tag{5.4.3}$$

所以，

$$\psi_I(x,y)=\int_{x_0}^{x} \mathrm{curl}\,\tau dx'+\Psi_0(y), \tag{5.4.4}$$

式中Ψ_0是待定的任意函数。

考虑东部经向边界上出现边界层的可能情况。引入伸长的边界层坐标：

$$\lambda=\frac{X_E-x}{l}, \tag{5.4.5}$$

其中l是未知的无量纲边界层尺度，即边界层宽度是

$$l_* = Ll. \tag{5.4.6}$$

选择(5.4.5)的定义，使得 λ 的范围是 (0, ∞)，在边界层中，运动的流函数是

$$\psi = \psi_B(\lambda, y), \tag{5.4.7}$$

而且必须注意，由于边界流输送的质量不大于内区输送，所以边界层中流函数的大小和内区流函数大小的量级相同。若把(5.4.6)和(5.4.7)式代入(5.2.22)式，我们有

$$-\left(\frac{\delta_I}{l_*}\right)^2\left[\frac{\partial\psi_B}{\partial\lambda}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2\psi_B}{\partial\lambda^2}+\frac{l_*^2}{L^2}\frac{\partial^2\psi_B}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial\psi_B}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\partial^2\psi_B}{\partial\lambda^2}+\frac{l_*^2}{L^2}\frac{\partial^2\psi_B}{\partial y^2}\right)\right]-\frac{\partial\psi_B}{\partial\lambda}$$

$$=\frac{l_*}{L}\operatorname{curl}\tau-\left(\frac{\delta_S}{l_*}\right)\left(\frac{\partial^2\psi_B}{\partial\lambda^2}+\frac{l_*^2}{L^2}\frac{\partial^2\psi_B}{\partial y^2}\right)+\left(\frac{\delta_M}{l_*}\right)^3\left[\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}+\frac{l_*^2}{L^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]\psi_B. \tag{5.4.8}$$

因此，如所期望的那样，涡度方程各项之大小，通过边界层宽度 l_* 和 δ_I、δ_M 及 δ_S 来衡量。对于 $\psi = O(1)$（即对于能满足法向运动为零的条件及使斯维尔德鲁普运动质量连续的边界层）的情况，l_* 必须选为 δ_I、δ_M 和 δ_S 中最大的一个。若作这种选择的话，则选出的特殊项将与 β 项平衡，而其他项则是小量并可忽略不计。现在 δ_I、δ_M 和 δ_S 都依赖于独立参数。且在原则上可预先给出它们之间的量级关系。因为 δ_S 和 δ_M 取决于湍流混合系数，所以几乎不可能精确地确定它们的大小。因而，我们将分别考虑各种不同的主要可能情况，再考察主要结果对这种假定量级的敏感程度。但是首先要注意，不论 l_* 是否等于 δ_M、δ_I 或 δ_S，风应力旋度对边界层动力学性质的直接影响是可以忽略的，即量级为 $O(l_*/L)$。应力旋度产生 ψ_I，正是 ψ_I 和（由(5.2.25)和(5.2.26)式给出的）必须假定的边界值之差，产生了边界层。

所要考察的第一种可能情况是：

$$\delta_M = \left(\frac{A_H}{\beta_0}\right)^{1/3} \gg \delta_I, \delta_S. \tag{5.4.9}$$

于是 l_* 必须选为

$$l_* = \delta_M. \tag{5.4.10}$$

(5.4.8)式中惯性项和底摩擦项的大小分别为 $(\delta_I/\delta_M)^2$ 和 δ_S/δ_M，而精确到最低阶可以忽略不计。

为方便起见，我们把 ψ_B 表示为内区流函数 ψ_I 与边界层修正函数 $\phi_B(\lambda, y)$ 之和，并要求 ψ_B 可以满足边界条件，即

$$\psi_B(\lambda, y) = \psi_I(x, y) + \phi_B(\lambda, y). \tag{5.4.11}$$

为了使 ψ_B 在 λ 很大时光滑地过渡到 ψ_I，当 $\lambda \to \infty$ 时，ϕ_B 必须趋于零。若将(5.4.11)式代入(5.4.8)式，并利用下面这个事实：

$$\frac{\partial\psi_I}{\partial\lambda} = -\frac{\delta_M}{L}\frac{\partial\psi_I}{\partial x} = -\frac{\delta_M}{L}\operatorname{curl}\tau, \tag{5.4.12}$$

则(5.4.8)式的最低阶项给出

$$\frac{\partial^4\phi_B}{\partial\lambda^4} + \frac{\partial\phi_B}{\partial\lambda} = 0. \tag{5.4.13}$$

注意，作为边界层近似的一个结果，摩擦项中只保留了经度方向（即纬向）的导数。(5.4.13)的通解是

$$\phi_B = C_1 + C_2 e^{-\lambda} + C_3 e^{\lambda/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda + C_4 e^{\lambda/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda, \tag{5.4.14}$$

式中C_1、C_2、C_3和C_4是 y 的任意函数。因为λ很大时ϕ_B趋于零，故必须令C_1、C_3和C_4等于零。所以在海域东边的边界层中，

$$\psi_B(\lambda, y)=\psi_I(\lambda, y)+C_2 e^{-\lambda}. \tag{5.4.15}$$

在 $x=X_E$ 处，即 $\lambda=0$ 处的边界条件是法向运动为零的条件：

$$u=-\frac{\partial\psi_B}{\partial y}=0=\frac{\partial\psi_I}{\partial y}(X_E, y)+\frac{\partial C_2(y)}{\partial y}, \tag{5.4.16}$$

及无滑动条件：在$\lambda=0$处，

$$v=\frac{\partial\psi_B}{\partial x}=0=\left[\frac{\partial\psi_I}{\partial x}-\frac{L}{\delta_M}\frac{\partial\phi_B}{\partial\lambda}\right]$$

$$=\frac{\partial\psi_I}{\partial x}(X_E, y)+\frac{L}{\delta_M}C_2(y). \tag{5.4.17}$$

由(5.4.17)式得出

$$C_2=-\frac{\delta_M}{L}\frac{\partial\psi_I}{\partial x}(X_E, y)=-\frac{\delta_M}{L}\operatorname{curl}\tau(X_E, y), \tag{5.4.18}$$

所以精确到 $O(\delta_M/L)$，(5.4.16) 式要求

$$\boxed{\frac{\partial\psi_I}{\partial y}(X_E, y)=0}. \tag{5.4.19}$$

因此，斯维尔德鲁普解本身必须满足大洋东边界处法向速度为零的条件。这就完全确定了内区斯维尔德鲁普运动。所以(5.4.4)式可以写为

$$\boxed{\psi_I(x, y)=\int_{X_E}^{x}\operatorname{curl}\tau dx'}, \tag{5.4.20}$$

在以上所举的例子中，这相当于图5.3.3(a) 的情况，而不是图5.3.3(b) 的情况，并且它等价于Welander 在其计算中使用的条件。注意，正是东边界不能维持一个能吸收$O(1)$向岸运动（它确定了内区解）的边界层。西边界能否维持这种边界层还有待考察。如果要避免不相容性，它必须能如此。因为现在内区运动固定在 X_W 附近，即在西边界附近 x 方向上的内区运动是

$$-\frac{\partial\psi_I}{\partial y}=-\int_{X_E}^{X_W}\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{curl}\tau\, dx'. \tag{5.4.21}$$

东边界层的唯一效应是满足无滑动条件。如图5.4.1所示，这对输送的影响只是一个$O(\delta_M/L)$的小量。这一事实也可通过合并(5.4.15)式和(5.4.18)式而得出：

$$\psi_B=\psi_I(x, y)-\frac{\delta_M}{L}\frac{\partial\psi_I}{\partial x}(X_E, y)e^{-\lambda}, \tag{5.4.22}$$

故该层对内区质量运动的修正量为 $O(\delta_M/L)$。

大洋西边界层中的情况则与此大不一样。伸长的边界层坐标定义为

$$\xi=\frac{(x-X_W)}{l}=\frac{(x-X_W)L}{l_*}, \tag{5.4.23}$$

故 ξ 的范围是$(0,\infty)$。现在边界层流函数是

$$\psi_B=\psi_B(\xi, y), \tag{5.4.24}$$

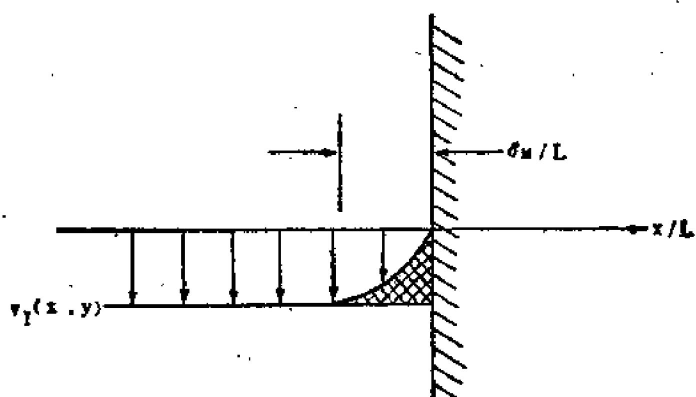


图5.4.1 东边界处边界层的作用只是满足无滑动条件。该效应是使向南输送减小一个阴影区面积所示的量，其量级为$O(\delta_M/L)$，因而与$O(1)$斯维尔德鲁普输送相比可以忽略不计。

若把(5.4.23)和(5.4.24)式代入(5.2.22)式，则代替(5.4.8)式，我们得到

$$\left(\frac{\delta_I}{l_*}\right)^2\left[\frac{\partial\psi_B}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2\psi_B}{\partial\xi^2}+\frac{l_*^2}{L^2}\frac{\partial^2\psi_B}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial\psi_B}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial^2\psi_B}{\partial\xi^2}+\frac{l_*^2}{L^2}\frac{\partial^2\psi_B}{\partial y^2}\right)\right]+\frac{\partial\psi_B}{\partial\xi}$$

$$=\frac{l_*}{L}\operatorname{curl}\tau-\frac{\delta_S}{l_*}\left(\frac{\partial^2\psi_B}{\partial\xi^2}+\frac{l_*^2}{L^2}\frac{\partial^2\psi_B}{\partial y^2}\right)+\left(\frac{\delta_M}{l_*}\right)^3\left[\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{l_*^2}{L^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]^2\psi_B. \qquad (5.4.25)$$

在现在的情况下，$l_*=\delta_M$，由于应用了(5.4.9)式，故在西边界层中相对涡度的惯性平流和底摩擦之影响可以忽略。为方便起见，再把$\psi_B(\xi,y)$表为

$$\psi_B=\psi_I(x,y)+\tilde{\phi}_B(\xi,y). \qquad (5.4.26)$$

当ξ趋于无穷时，为使ψ_B光滑地过渡到ψ_I，也要求

$$\lim_{\xi\to\infty}\tilde{\phi}_B(\xi,y)=0. \qquad (5.4.27)$$

如果把(5.4.26)式代入(5.4.25)式，回忆有

$$\frac{\partial\psi_I}{\partial\xi}=\frac{\delta_M}{L}\frac{\partial\psi_I}{\partial x}=\frac{\delta_M}{L}\operatorname{curl}\tau, \qquad (5.4.28)$$

则可以得到精确到$O[(\delta_I/\delta_M)^2,\delta_S/\delta_M]$的$\tilde{\phi}$满足

$$\frac{\partial^4\tilde{\phi}_B}{\partial\xi^4}-\frac{\partial\tilde{\phi}_B}{\partial\xi}=0. \qquad (5.4.29)$$

显然，(5.4.29)与和它相对应的东边界的方程式(5.4.13)是不同的，其关键性的差异在于一阶导数（即代表行星涡度梯度效应的项）的符号不同。(5.4.13)式和(5.4.29)式的变换，在只应用于奇阶导数，特别是行星涡度梯度项时，将导致符号的变化。β效应的存在破坏了完全的涡度方程本来在变换$x\to-x$，$y\to-y$之下所具有的不变性。这不变性之破坏直接反映了有β存在时，物理空间在动力学性质上不再是各向同性的这一事实。环境位涡向北的增加，使向北的方向成为有动力学意义的方向。在讨论罗斯贝波的传播和反射性质时已经看到，行星涡度梯度的存在，导致波动动力学中固有的各向异性。导致边界层方程在西边界处改变形式的，正是与此等价的、有β效应时涡度物理学性质在动力学上的显著的各向异性，而不是数学技巧。

(5.4.29)式的解为

$$\tilde{\varphi}_B=\tilde{C}_1(y)+\tilde{C}_2(y)e^{\xi}+\tilde{C}_3e^{-\xi/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\xi+\tilde{C}_4e^{-\xi/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\xi. \qquad (5.4.30)$$

为了满足(5.4.27)式，必须使 $\tilde{C}_1(y)$ 和 $\tilde{C}_2(y)$ 为零，于是在西边界层有

$$\psi_B(\xi,y)=\psi_I(x,y)+\tilde{C}_3e^{-\xi/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\xi+\tilde{C}_4e^{-\xi/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\xi. \qquad (5.4.31)$$

该式应与(5.4.15)式进行比较。在 $x=X_W$ 处的法向速度为零和无滑动条件分别是

$$0=\frac{\partial\psi_I}{\partial y}(X_W,y)+\frac{\partial}{\partial y}\tilde{C}_3, \qquad (5.4.32)$$

$$0=\frac{\partial\psi_I}{\partial x}+\frac{L}{\delta_M}\left[-\frac{\tilde{C}_3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\tilde{C}_4\right]. \qquad (5.4.33)$$

精确到 $O(\delta_M/L)$ 时，由(5.4.33)式得

$$\tilde{C}_4=\frac{\tilde{C}_3}{\sqrt{3}}, \qquad (5.4.34)$$

而(5.4.32)式意味着

$$\tilde{C}_3=-\psi_I(X_W,y)+K, \qquad (5.4.35)$$

式中K是一个常数。因而

$$\psi_B=\psi_I(x,y)\left\{1-e^{-\xi/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\xi+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\xi\right)\right\}$$

$$+Ke^{-\xi/2}\left[\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\xi+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\xi\right]. \qquad (5.4.36)$$

流函数在 $x=X_E$ 处的值是零。为了使经向总的质量通量达到平衡，应有

$$0=\int_{X_W}^{X_E}v\,dx=\int_{X_W}^{X_E}\frac{\partial\psi}{\partial x}\,dx=\psi(X_E)-\psi(X_W), \qquad (5.4.37)$$

故 $\psi(X_W)$ 也必须为零。净的质量通量为零的条件，正是边界流向北回送与内区等量的质量通量的条件。为使 $\psi(X_W)$ 可以为零，必须选择K为零，故在西边界区域有

$$\psi_B=\psi_I(x,y)\left[1-e^{-\xi/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\xi+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\xi\right)\right]. \qquad (5.4.38)$$

西边界流向北的速度精确到 $O(\delta_M/L)$ 时为

$$\boxed{v_B=\psi_I(X_W,y)\left(\frac{L}{\delta_M}\right)\frac{2e^{-\xi/2}}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\xi}. \qquad (5.4.39)$$

图5.4.2给出作为 x之函数的ψ_B 和 v_B，而图5.4.3给出整个海域截面上v的略图。整个运动的一致有效的近似解，由内区解和东西边界处的两个边界层修正解相加组成，即

$$\psi=\psi_I(x,y)\left[1-e^{-\xi}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\xi+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\xi\right)\right]-\frac{\delta_M}{L}\frac{\partial\psi_I}{\partial x}(X_E,y)e^{-\lambda}, \qquad (5.4.40)$$

式中 λ 和 ξ 分别由(5.4.5)式和(5.4.23)式给出，而 ψ_I 由(5.4.20)式给出。

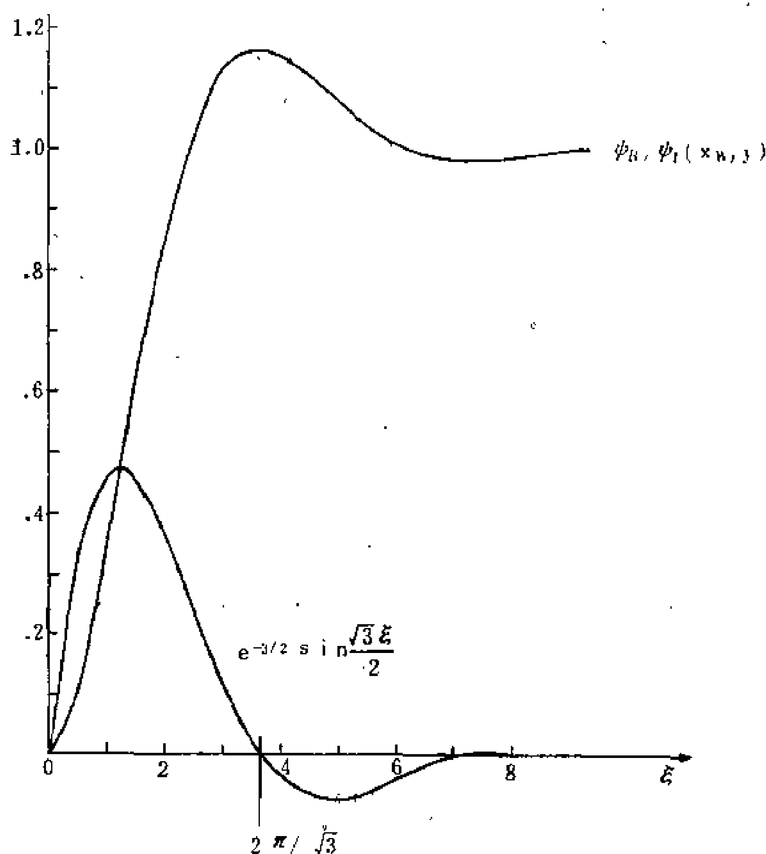


图5.4.2　西边界层中向北的速度之结构。

注意$\xi>2\pi/\sqrt{3}$的回流区域，曲线ψ_B/ψ_I表示从西边界算起的输送量分布，在达到回流区之前ψ_B随ξ急剧增加，然后ψ_B在$\xi=6$处达到其渐近值$\psi_I(X_W, y)$。

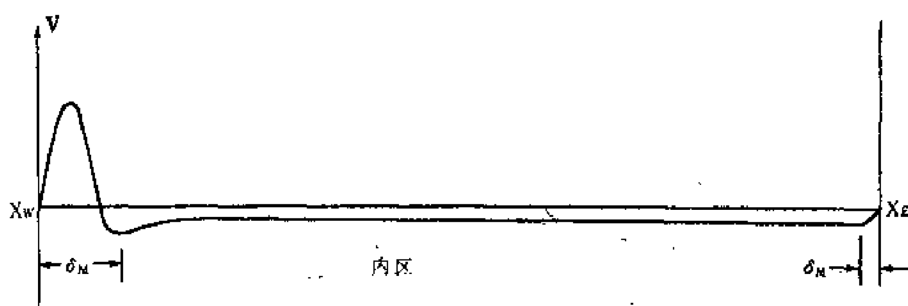


图5.4.3　v沿整个海域横截面的分布略图。

该图指出西边界流中的强回流、内区的弱斯维尔德鲁普运动和东边界层区。

关于西边界流，有几个值得注意的重要事实。如以上所注意到的，西边界流与东边界层运动不同，它对质量通量的贡献是$O(1)$。由于实际上在边界流区域中的质量通量恰好与整个内区的质量通量平衡，所以为了在狭窄的回流中输送相同的质量通量，边界流中向北的速度必须远大于内区速度。事实上，如(5.4.39)式所示，这一速度必须是内区速度的$O(L/\delta_M)$倍。所以在这个模式中（以及我们将看到的，在普遍的情况下），行星涡度梯度约束关系的存在，既产生弱斯维尔德鲁普内区运动，也产生强的西边界流，以补偿斯维尔德鲁普质量通

量：而精确到最低阶时，斯维尔德鲁普内区之动力平衡，恰好直到东边界均成立。

这个特殊的西部强化模式是首先由 Munk(1950)讨论的。蒙克边界层，是作为流体柱在西边界流中向北运动时产生的相对涡度之增加，和进入西边界的附加的相对涡度的侧向扩散之间的平衡而存在的。进入西边界层的流体元，具有可忽略的相对涡度，并且主要具有行星涡度。假如它在边界层中向北移动一个距离Δy_*，则其行星涡度增加 $\beta_0\Delta y_*$，而且在没有摩擦时，其相对涡度ζ_*会相应改变一个 $O(-\beta_0\Delta y_*)$ 的量。然而摩擦力必定会使流体元的相对涡度减小，并使其扩散到摩擦层之外，所以流体元可以平滑地重新进入斯维尔德鲁普内区，在那里流体元的相对涡度必可忽略。因此，流体元保持与边界接触的时间，必须不小于涡度的特征摩擦扩散时间

$$t_{*D}=\frac{\delta_M^2}{A_H}, \tag{5.4.41}$$

式中 δ_M 是该层之宽度。另一方面，这一滞留时间也必须等于

$$t_{*D}=\frac{\Delta y_*}{v_{B_*}}, \tag{5.4.42}$$

式中 v_{B_*}是向北的流速。由于 ζ_* 之量级为 $O(v_B/\delta_M)$，因此可以得知，为使摩擦耗散掉β_0产生的过剩的相对涡度，必须有

$$\frac{\delta_M^2}{A_H}=O\left(\frac{\Delta y}{v_{B_*}}\right)=O\left(\frac{\Delta y}{\delta_M\zeta_*}\right)=O\left(\frac{1}{\beta_0\delta_M}\right), \tag{5.4.43}$$

或者与(5.4.1)一致，有

$$\delta_M=\left(\frac{A_H}{\beta_0}\right)^{1/3}. \tag{5.4.44}$$

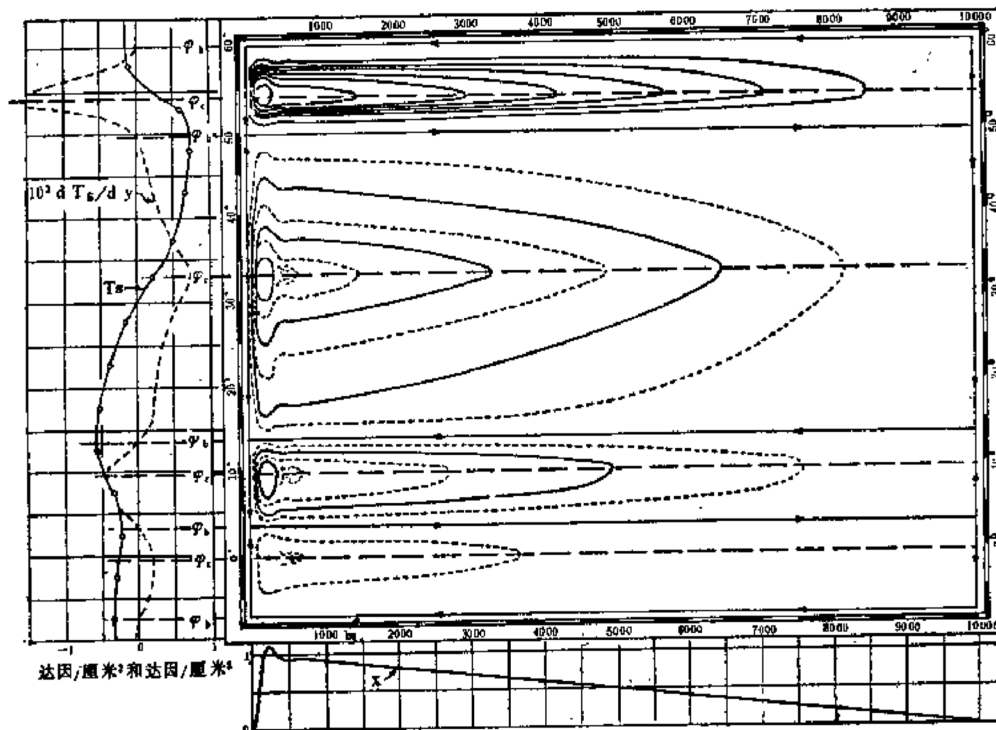


图5.4.4　Munk(1950)对太平洋应力分布（如左图示）驱动的矩形大洋所给出的环流分布型流线。

蒙克模式得到如图 5.4.4 所示的流型，它和大洋环流在定性方面很相似。但是在详细比较理论与观测结果时发现，该模式是有困难的。尤其是在计算边界流的宽度、并与湾流和黑潮这类边界流之宽度作比较前，必须规定 A_H 的值。正如4.1节和 4.2节的讨论所强调指出的那样，这种在确定 A_H 的模棱两可的数值时遇到的困难，恰好是湍流粘性模式的困难。为避开这一困难，我们采取下述办法。根据蒙克模式成立的基础，摩擦项必须远大于非线性项，即 $\delta_M \gg \delta_I$，或等价地表示为

$$A_H \gg \frac{U^{3/2}}{\beta_0^{1/2}} = U\delta_I \tag{5.4.45}$$

或者用基于 U 和 δ_I 的雷诺数 Re_δ 表示，它必须满足

$$Re_\delta \equiv U\frac{\delta_I}{A_H} \ll 1. \tag{5.4.46}$$

若U为O(1厘米/秒)，而β_0为10^{-13}厘米$^{-1}$秒$^{-1}$，则为了使$\delta_M \gg \delta_I$，必须使A_H远大于3×10^6厘米^2/秒。这对于借助小尺度湍流对动量混合有贡献的 A_H 来说，大概是一个过大的值，但是通过直接观测很难真实地估计A_H的值。然而，容易测量出向北的边界流宽度。如图5.4.2所示，该边界流宽度的自然定义由 $\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\xi$ 的第一个非平凡零点，即 $\xi = 2\pi/\sqrt{3}$ 给出。它所给出的有量纲海流宽度为

$$\begin{aligned} \delta_{*_0} &= \frac{2\pi\delta_M}{\sqrt{3}} \\ &= Re_\delta^{-1/3}\left(\frac{U}{3\beta_0}\right)^{1/2} 2\pi. \end{aligned} \tag{5.4.47}$$

用前面使用过的参数值，得出的海流宽度是$Re_\delta^{-1/3}\times120$公里。由于 Re_δ对于精确的蒙克流模式来说远小于 1，所以我们一定可作出这样的结论：这个摩擦模式不能真实地模拟宽度小于100 公里的实测流。

虽然摩擦模式不能精确描写边界流的细节，但是该模式具有完全的内在统一性，它十分清晰地说明了大洋西部强化和行星涡度梯度之间的关系。在以下几节中将考察其他模式。和蒙克模式一样，在这些模式中西部强化的原因都可用β效应来说明。

最后，还应注意蒙克模式中的侧向摩擦效应在边界流的右侧（向海的一侧）产生一股逆流。该逆流之存在，使向北急流（即边界与 δ_{*_0} 之间的流动）的输送大于平衡内区运动所要求的值，即根据(5.4.39)式有

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi/\sqrt{3}} v_B dx &= \psi_I(X_W, y)\{1+e^{-\pi/\sqrt{3}}\} \\ &\approx 1.17\psi_I(X_W, y). \end{aligned} \tag{5.4.48}$$

重要的是注意，正是边界层修正的净输送平衡内区输送，并且由边界流动力学特征的细节差别所产生的任何回流运动，都将使向北的流动增强，而超过总的斯维尔德鲁普输送。

5.5 斯多美尔模式：底摩擦层

这一节我们考察

$$\delta_S \gg (\delta_M, \delta_I) \tag{5.5.1}$$

的情况下的环流问题。在此情况下，因为

$$l_* = \delta_S = \frac{\delta_E}{2} \frac{f}{D\beta_0}, \tag{5.5.2}$$

所以底艾克曼层对涡度的影响，远远超过平流项和水平摩擦的影响。后两项在 (5.4.8) 式和 (5.4.25) 式中都分别是$(\delta_I/\delta_S)^2$和$(\delta_M/\delta_S)^3$。然而，略去水平摩擦，是涡度方程的奇异摄动，也就是说它降低了微分方程对 x 的阶数。由涡度方程的这种近似所得到的解，不能满足边界处的无滑动条件，仅能满足法向速度为零的无粘条件。无滑动条件要求有一个宽度远小于 δ_S 的层，在该层中摩擦阻滞可使运动在边界处为零。这样一个嵌在 δ_S 之中的薄附属层不能输送数量显著的质量，而且如我们将要看到的那样，这要求δ_S层单独满足法向通量条件。实际上这是一个相当大的简化，因为基本环流问题与质量通量问题(即运动的法向分量条件)有关，而且奇异摄动结果，使我们首先能把精力全部贯注于这个问题上。

使用(5.5.1)和(5.5.2)式，由(5.4.8)式得精确到最低阶的东边界处的边界层方程为

$$\frac{\partial^2 \psi_B}{\partial \lambda^2} - \frac{\partial \psi_B}{\partial \lambda} = 0. \tag{5.5.3}$$

若和以前一样，把 ψ_B 写成内区的 ψ 加上边界层修正函数之和，即

$$\psi_B = \psi_I(x, y) + \phi_B(\lambda, y), \tag{5.5.4}$$

则 ϕ_B 满足

$$\frac{\partial^2 \phi_B}{\partial \lambda^2} - \frac{\partial \phi_B}{\partial \lambda} = 0. \tag{5.5.5}$$

(5.5.5)的通解是

$$\phi_B = C_1(y) + C_2(y) e^{\lambda}. \tag{5.5.6}$$

因为当 $\lambda \to \infty$时，ϕ_B必须为零，故C_1 和 C_2都必须为零。所以为使ψ_B满足$x = X_E$处法向速度为零的条件，我们必须有

$$\frac{\partial \psi_I}{\partial y}(X_E, y) = 0, \tag{5.5.7}$$

故又一次得到，内区斯维尔德鲁普运动必须满足东边界处法向速度为零的条件。因此，不论 $\delta_M \gg \delta_S$ 还是 $\delta_M \ll \delta_S$，(5.4.20) 式均适用。在这两种情况下，西边界上都会出现强化现象。

为了满足 $x = X_E$ 处的无滑动条件，必须存在一个重新引入侧向摩擦效应的足够窄的区域。在蒙克模式中，水平摩擦直接与 β 项平衡，所有条件都由一个层满足。在现在的情况下，底摩擦因$l_* = \delta_S$而与β项一样大。假如l_*甚至小于δ_S，则(5.4.8)式表明，底摩擦将大大超过β 项。如果 l_*足够小，且当

$$\left(\frac{\delta_M}{l_*}\right)^3 = \frac{\delta_S}{l_*}, \tag{5.5.8}$$

或者

$$l_* = \delta_S \left(\frac{\delta_M}{\delta_S}\right)^{3/2} \ll \delta_S \tag{5.5.9}$$

时，那末底摩擦与侧向摩擦均将起支配作用且平衡。若用δ_M和δ_S的定义，则

$$\frac{l_*}{L} = \frac{E_H{}^{1/2}}{E_V{}^{1/4}}, \tag{5.5.10}$$

所以这个附属层等价于4.13节中讨论过的边界层区域。注意l_*与β_0无关，这是因为该层的物理性质与行星涡度梯度之存在无关。若δ_I/l_*是小量，即若

$$\delta_I<\delta_S\left(\frac{\delta_M}{\delta_S}\right)^{3/2}, \tag{5.5.11}$$

则由(5.4.8)式，该附属层的方程是

$$\frac{\partial^4\psi_B}{\partial\lambda^4}-\frac{\partial^2\psi_B}{\partial\lambda^2}=0, \tag{5.5.12}$$

式中现在λ为

$$\lambda=(X_E-x)\frac{L}{\delta_S}\left(\frac{\delta_S}{\delta_M}\right)^{3/2}. \tag{5.5.13}$$

注意(5.5.12)式在形式上等价于(4.13.27)式。当λ很大时变为ψ_I，且满足$x=X_E$处无滑动条件的(5.5.12)式之解是

$$\psi_B=\psi_I(x,y)-\frac{\partial\psi_I}{\partial x}(X_E,\ y)\frac{l_*}{L}e^{-(X_E-x)L/l_*}, \tag{5.5.14}$$

式中l_*由(5.5.9)式给出。该层产生的对斯维尔德鲁普质量通量的修正可以完全略去。实际上该层对环流问题的动力学意义很小。若不满足(5.5.11)式，但$\delta_S>\delta_I$，则在这个无滑动附属层中的涡度平衡是非线性的，并且该附属层的分析极为困难。重要而幸运的是，这个结果不影响总的环流问题。

在西边界，$l_*=\delta_S$之选择在最低阶上给出

$$\frac{\partial^2\psi_B}{\partial\xi^2}+\frac{\partial\psi_B}{\partial\xi}=0. \tag{5.5.15}$$

再令

$$\psi_B=\psi_I(x,y)+\phi_B(\xi,y), \tag{5.5.16}$$

立即可得到

$$\phi_B(\xi,y)=C(y)e^{-\xi}, \tag{5.5.17}$$

所以满足法向速度为零的解是

$$\boxed{\psi_B=\psi_I(x,y)[1-e^{-\xi}]}, \tag{5.5.18}$$

且

$$\boxed{v_B=\frac{L}{\delta_S}\psi_I(x,y)e^{-\xi}}. \tag{5.5.19}$$

我们又一次得到，斯维尔德鲁普运动的质量通量在西边界流中是返回向北的。在这种情况下，强西边界流的宽度是$O(\delta_S)$，而且没有东侧的逆流。象在蒙克层里的情况一样，δ_S取决于β_0^{-1}，即该层的存在，关键取决于在内区产生斯维尔德鲁普关系的同样的行星涡度梯度。回流中向北的速度量级是L/δ_S，大于内区运动之量级，而且如(5.5.18)式所示，它不能满足$x=X_W$处的无滑动条件。若(5.5.11)式成立，则如图5.5.1所示，一个宽度为$\delta_S(\delta_M/\delta_S)^{3/2}$的边界层存在于厚度为$\delta_S$的外层之中。外层使流线转向，以满足法向运动条件，而内层的唯一作用是，使最靠近边界的流体受到摩擦阻滞，以满足无滑动条件。附属层宽度意味着在该层

中流函数只是一个新变量

$$\eta=(x-X_W)\frac{L}{\delta_S}\left(\frac{\delta_S}{\delta_M}\right)^{3/2}=\xi\left(\frac{\delta_S}{\delta_M}\right)^{3/2} \tag{5.5.20}$$

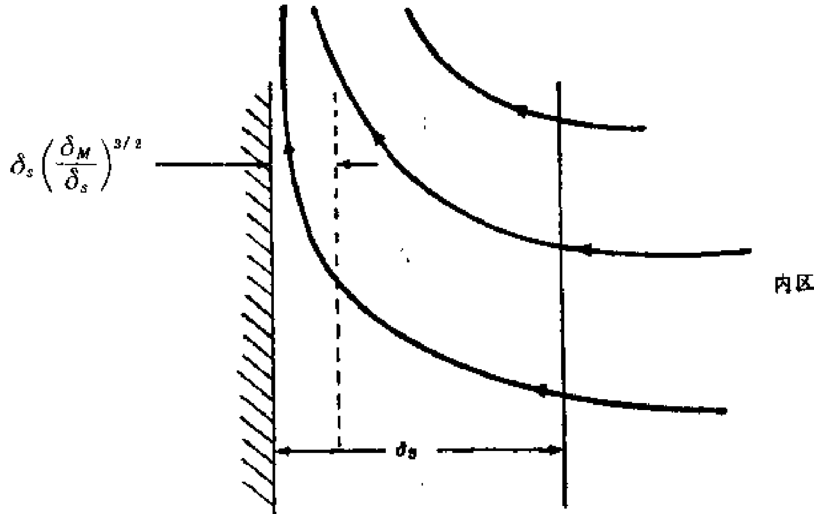


图5.5.1　底摩擦起支配作用时西边界流的示意图.

输送大部分出现在较宽的δ_S层内，同时需要有一宽度为 $\delta_S(\delta_M/\delta_S)^{3/2}$的附属层，以满足无滑动条件。大部分流线不进入附属层。

的函数，而流函数可以写为(5.5.18)加上一个修正量——即在附属层中，

$$\psi=\tilde{\psi}_B=\psi_B(\xi,y)+\tilde{\phi}_B(\eta,y). \tag{5.5.21}$$

若把(5.5.2)式、(5.5.20)式和(5.5.21)式代入(5.4.25)式，只要(5.5.11)式成立，则可得到精确到最低阶的方程：

$$\frac{\partial^4\tilde{\phi}_B}{\partial\eta^4}-\frac{\partial^2\tilde{\phi}_B}{\partial\eta^2}=0. \tag{5.5.22}$$

当η很大时 $\tilde{\phi}_B$ 趋于零的解是

$$\tilde{\phi}_B=C(y)e^{-\eta}, \tag{5.5.23}$$

所以

$$\tilde{\psi}=\tilde{\psi}_B(\xi,y)+Ce^{-\eta}. \tag{5.5.24}$$

向北的速度v由下式给出：

$$v=\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{L}{\delta_S}\frac{\partial\psi_B}{\partial\xi}+\frac{L}{\delta_S}\left(\frac{\delta_S}{\delta_M}\right)^{3/2}\frac{\partial\tilde{\phi}_B}{\partial\eta}. \tag{5.5.25}$$

所以 $v(X_W)$ 为零的条件意味着精确到 $O(\delta_S/L)$时有

$$C(y)=\left(\frac{\delta_M}{\delta_S}\right)^{3/2}\psi_I(X_W,y), \tag{5.5.26}$$

或意味着西边界层区的流函数是

$$\psi=\tilde{\psi}_B=\psi_I(x,y)\left\{1-e^{-\xi}+\left(\frac{\delta_M}{\delta_S}\right)^{3/2}\exp\left[-\xi\left(\frac{\delta_S}{\delta_M}\right)^{3/2}\right]\right\}. \tag{5.5.27}$$

实际上，(5.5.27)式给出的ψ表达式，从$x=X_W$直到海域东边界层都成立。当$\xi=O(1)$时，(5.5.27)式化为(5.5.18)式。仅当ξ为$O((\delta_M/\delta_S)^{1/2})$的小量时，(5.5.18)式的附属层修正

才有意义，此时它在一个窄的区域内使沿岸运动迅速减小为零，以至对输送只有很小的影响。精确到$O(\delta_S/L)$时，向北的速度为

$$\tilde{v}_B=\frac{\partial\tilde{\psi}_B}{\partial\xi}=\frac{L}{\delta_S}\psi_I(x,y)\left\{e^{-\xi}-\exp\left[-\xi\left(\frac{\delta_S}{\delta_M}\right)^{3/2}\right]\right\}. \qquad (5.5.28)$$

且如图5.5.2所示，图上为了作比较也给出了(5.5.19)式表示的v_B。

这个底摩擦模式，在数学上等价于Stommel (1948)在他关于大洋西部强化的划时代论文中所使用的模式。Stommel使用了一个高度人为的流体柱摩擦公式，根据这一摩擦公式，每个流体柱所受的摩擦阻力线性正比于流体速度。这样的模式在涡度方程中引进了一个衰减项，它与本节讨论过的底艾克曼层效应在数学上是一样的。Stommel用他的模式首次提出，大洋环流的西部强化是行星涡度梯度产生的后果。我们把这个δ_S层称为斯多美尔层。

斯多美尔层、蒙克层和摩擦附属层之间的数学关系可以用如下的示意图说明。当非线性效应可以忽略时，涡度方程为

蒙克层　　　斯维尔德鲁普内区

$$\left(\frac{\delta_M}{L}\right)^3\nabla^4\psi-\frac{\delta_S}{L}\nabla^2\psi-\frac{\partial\psi}{\partial x}=-\mathrm{curl}\,\tau. \qquad (5.5.29)$$

(侧向摩擦)(底摩擦)(行星涡度梯度)(风应力旋度)

摩擦附属层　斯多美尔层　斯维尔德鲁普内区

当$\delta_M\gg\delta_S$时，方程上方画出的平衡成立，而底摩擦可到处忽略不计。当$\delta_M\ll\delta_S$时，蒙克层分为两层：斯多美尔层和附属层。附属层和斯多美尔层一起，共同使微分方程在边界层中的阶数和蒙克层一样。在任何情况下，内区涡度平衡都是斯维尔德鲁普平衡。这是边界层中唯一的随比值δ_S/δ_M变化的详细平衡。不论哪种各向同性的摩擦项起支配作用，环流的强化都将作为(5.5.29)式中由于β效应引起的各向异性之后果而出现。

5.6 惯性边界层理论

虽然上两节中所描述的线性理论提供了有用的模式，有助于我们理解大洋西部强化的基本原因，但它们显然有内在的缺陷。首先，这些理论预测的西边界流的宽度、速度和结构，都取决于湍流粘性系数，因此在很大程度上是不大确定的。其次，尽管这些系数根据实际情况选择得使理论适合于某些观测资料，但5.4节的考虑指出，这时被略去的非线性项，在边界流的真实模式中已变成重要的项了。

为了克服上述缺陷而提出的另一种观点是，考察使用纯无粘的非线性边界流模式是否可能。这一假说的吸引力在于，它所得到的解中，没有那些我们了解得还很不够的参数，从而无需给定一些勉强与观测一致的参数值。并且，纯惯性理论可以利用无耗散运动的守恒定理，它们能使非线性问题易于处理。

然而，必须从一开始就交代清楚，作为一个大洋环流问题的模式，任何纯粹的惯性理论，即使它在某些方面是令人满意的，也一定存在很多缺陷。一个明显的缺点来自下面这个确凿的事实：为了耗散掉大洋区域中流体不断得到的涡度，摩擦作用在某个地方必定是重要的。如果在内区耗散的涡汇〔如$O((\delta_M/L)^3,\ \delta_S/L)$〕可略的话，那末它们在边界流动力学中必定

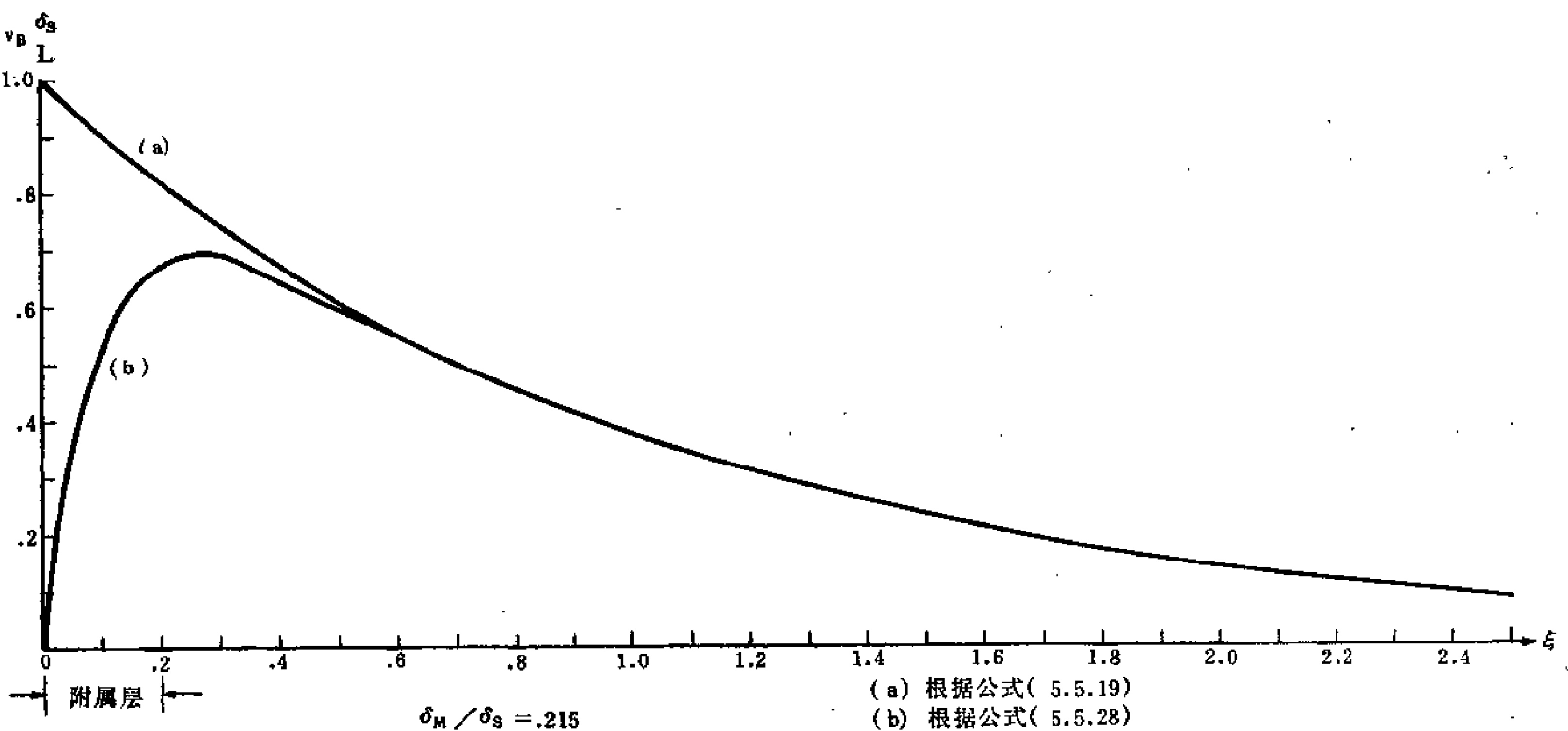


图5.5.2 底摩擦层起支配作用的西边界流向北的速度。

曲线(a)表示没有无滑动条件时v_B之分布；而曲线(b)表示有侧向摩擦附属层时v_B之分布。

起着某种作用。其次，正如我们将看到的，惯性流理论不能单独回答有关西部强化的基本问题，即斯维尔德鲁普解是否满足、以及在哪里满足法向运动边界条件。最后，完全忽略耗散项，显然是边界层方程的奇异摄动，这就造成了反映上述物理缺陷的数学困难。

我们从考察大洋西边界处的惯性边界流之性质开始讨论。内区解是 $\psi_I(x,y)$，而且在现阶段上它完全可以是未知的，即把 ψ_I 考虑为由(5.4.3式和(5.4.4)式给出。

惯性理论要求

$$\delta_I \gg \delta_M, \delta_S, \tag{5.6.1}$$

故

$$l_* = \delta_I. \tag{5.6.2}$$

于是精确到 $O((\delta_M/\delta_I)^3$，δ_S/δ_I，$\delta_I/L)$时，(5.4.25) 式在最低阶上给出

$$\frac{\partial\psi_B}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2\psi_B}{\partial\xi^2}-\frac{\partial\psi_B}{\partial y}\frac{\partial^3\psi_B}{\partial\xi^3}+\frac{\partial\psi_B}{\partial\xi}=0, \tag{5.6.3}$$

或者

$$J\left(\psi_B, \frac{\partial^2\psi_B}{\partial\xi^2}+y\right)=0, \tag{5.6.4}$$

式中 J 是对于 ξ 和 y 的雅可比行列式。这只不过是位涡守恒的表达式。在此情况下，位涡是相对涡度与行星涡度之和。因在边界层中，

$$v_B \gg u_B, \qquad \frac{\partial}{\partial x} \gg \frac{\partial}{\partial y}, \tag{5.6.5}$$

故涡度是

$$\zeta=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\approx\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}. \tag{5.6.6}$$

守恒方程(5.6.4)可积分得

$$\frac{\partial^2\psi_B}{\partial\xi^2}+y=G(\psi_B), \tag{5.6.7}$$

式中G是ψ_B的任意函数。由于边界层中的运动是无耗散的，故相对涡度和行星涡度之和在一条流线上一定守恒。这就带来了一个根本性的困难。考虑图 5.6.1，其上给出一条假设的流线，它在 $y=y_1$处进入惯性层，而在 $y=y_2$处重新加入内区运动。在内区，流体的相对涡度与行星涡度相比可以忽略。所以在 y_1 处流体柱的总涡度就是 y_1（或者用有量纲单位表示为 $\beta_0 y_1$)。当流体柱在边界流中向北速行时，它保持总涡度守恒，所以在 y_2 处，它所具有的负相对涡度是

$$\zeta(y_2)=y_1-y_2, \tag{5.6.8}$$

但其总涡度仍等于y_1。但是为了连续地进入内区，它的相对涡度应为零，而且总涡度应与环境流体一样为y_2。显然，不可能把 (5.6.7) 式应用于整个路径上。并且我们将首先证明，只有在$u_I(X_W,y)$向西的 y 区间上，惯性理论才成立。也就是说，我们可以预料，该理论仅在流动的南部形成区成立，而在北部重新进入内区之区域，耗散必起决定性作用，这样才能耗散掉运动过剩的相对涡度。

和上节一样，把 ψ_B 写为内区流函数与边界层修正量之和：

$$\psi_B(\xi,y)=\psi_I(x,y)+\phi_B(\xi,y). \tag{5.6.9}$$

特别关键的是要记住，为了使ψ_B能光滑地过渡到内区值，ϕ_B必须满足

$$\lim_{\xi\to\infty}\phi_B(\xi,y)=0. \qquad (5.6.10)$$

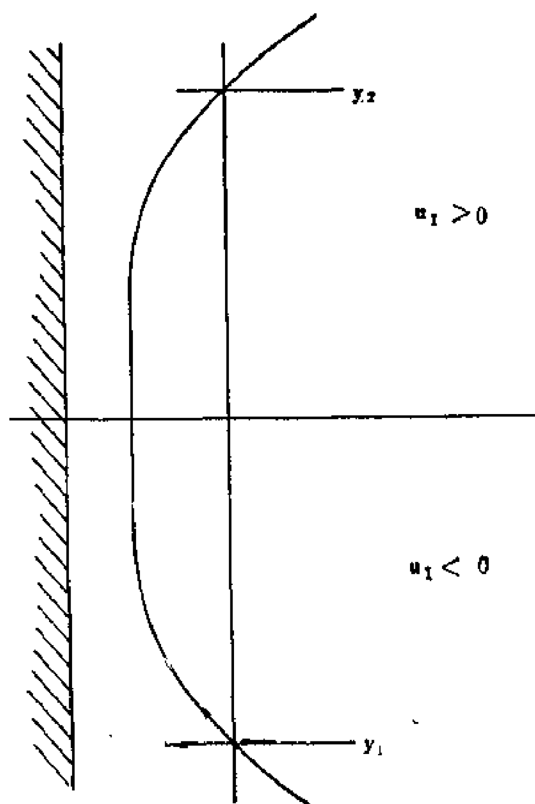


图5.6.1 进入又离开西部惯性边界流的流线。
在y_1处进入该区的流体元之相对涡度几乎为零，其无量纲的绝对涡度是y_1。在y_2处它的相对涡度是$-(y_2-y_1)$，其绝对涡度仍是y_1。它在y_2处不能连续地变为内区值，因为在y_2处，内区相对涡度仍几乎为零而绝对涡度是y_2。

在ξ很大的区域中考虑(5.6.3)式。在这个从边界层向内区过渡的区域里，ϕ_B必定是小量，即对很大的ξ，

$$\phi_B\ll\psi_I. \qquad (5.6.11)$$

若把(5.6.9)式代入(5.6.3)式，且仅保留ϕ_B的线性项，则作为(5.6.11)式的结果我们得到

$$-\frac{\partial\psi_I}{\partial y}(X_W,y)\frac{\partial^3\phi_B}{\partial\xi^3}+\frac{\partial\phi_B}{\partial\xi}=0, \qquad (5.6.12)$$

式中已略去了形式为

$$\frac{\partial\phi_B}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2\psi_I}{\partial\xi^2}=\left(\frac{\delta_I}{L}\right)^2\frac{\partial\phi_B}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2\psi_I}{\partial x^2} \qquad (5.6.13)$$

的项，因为它们的量级是$O((\delta_I/L)^2)$。我们还用了

$$-\frac{\partial\psi_I}{\partial y}(x,y)=-\frac{\partial\psi_I}{\partial y}\left(X_W+\frac{\delta_I}{L}\xi,\ y\right)$$

$$\approx-\frac{\partial\psi_I}{\partial y}(X_W,y)+O\left(\frac{\delta_I}{L}\right)$$

$$=u_I(X_W,y). \qquad (5.6.14)$$

把(5.6.12)式对ξ积分一次，借助(5.6.10)式可得

$$\boxed{u_I(X_W,y)\frac{\partial^2\phi_B}{\partial\xi^2}+\phi_B=0}. \qquad (5.6.15)$$

(5.6.15)的通解对于使$u_I(X_W,y)>0$的一切y，都将在ξ方向振荡。振荡是非阻尼的，因此不能满足(5.6.10)式。在y处存在惯性边界流的必要条件是

$$u_I(X_W,y)<0. \qquad (5.6.16)$$

在u_I为零的点以北，不再可能出现纯惯性流（Greenspan，1962）。所以(5.6.7)式是仅适合于该点以南区域的西边界流模式。在$u_I(X_W,y)<0$的地方(5.6.15)的衰减解的形式为

$$\phi_B=C(y)\exp\{-\xi[-u_I(x,y)]^{-1/2}\}. \qquad (5.6.17)$$

因为(5.6.15)式只适用于远离海岸的区域，所以我们不能通过应用那里的边界条件来确定C。但是(5.6.17)式揭示出一个重要的事实。ϕ_B的衰减率随$u_I^{1/2}$成反比地增长，即在u_I很小且向岸的那些y处，惯性流的宽度也很小。显然，惯性流的局部宽度是

$$\delta_{I局部}=\sqrt{-\frac{U_*(y)}{\beta_0}}, \qquad (5.6.18)$$

式中$U_*(y)$是有量纲的内区纬向流。当接近U_*为零的点y_0时，$\delta_{I局部}$将变小，且最终落于摩擦层厚度之内。正象蒙克层在 $U_*=O(1)$ 时只占据惯性层的一小部分那样。从这一观点看，不论何时，只要$u_I>0$或者$\delta_{I局部}$变为远小于δ_M或δ_S的小量，摩擦就是边界层动力学的重要组成部分。

对于 $u_I(X_W,y)$是 $O(1)$且向西的那些 y，可以借助3.14节所述的方法，用(5.6.7)式来求 ϕ_B。因此对 $\partial^2\psi_B/\partial\xi^2$ 为零的大的 ξ 值，

$$G(\psi_{B\infty})=y, \tag{5.6.19a}$$

而在无穷远处，

$$\psi_{B\infty}=\psi_I(X_W,y). \tag{5.6.19b}$$

如果将 (5.6.19b) 反演，则

$$y=\psi_I^{-1}(\psi_{B\infty}), \tag{5.6.20}$$

式中ψ_I^{-1}是ψ_I的反函数。于是

$$G(\psi_{B\infty})=\psi_I^{-1}(\psi_{B\infty}), \tag{5.6.21a}$$

但是由于G对ψ的依赖关系只取决于ψ，而与xy平面上的位置无关，所以函数关系(5.6.21a)必对所有起源于内区的流线均成立。因此

$$G(\psi_B)=\psi_I^{-1}(\psi_B), \tag{5.6.21b}$$

故(5.6.7)变为

$$\frac{\partial^2\psi_B}{\partial\xi^2}+y=\psi_I^{-1}(\psi_B). \tag{5.6.22}$$

对(5.6.19)的反演过程，一般使 $\psi_I^{-1}(\psi_B)$变为ψ_B的复杂的非线性函数，因而很少能解析地处理(5.6.22)式。在

$$\psi_I=y=1\cdot y \tag{5.6.23}$$

的简单情况下，反函数ψ_I^{-1}就是用 1 乘的运算，所以ψ_B满足

$$\frac{\partial^2\psi_B}{\partial\xi^2}-\psi_B=-y, \tag{5.6.24}$$

它的解为

$$\psi_B=y[1-e^{-\xi}], \tag{5.6.25}$$

或确切地说就是3.14节中求得的解。因此，(5.6.25)式给出的运动的流线就是图3.14.2的流线。注意在这种情况下，渐近的线性方程(5.6.15)等价于完全方程(5.6.22)，这证实了由前者推论出的定性结果。

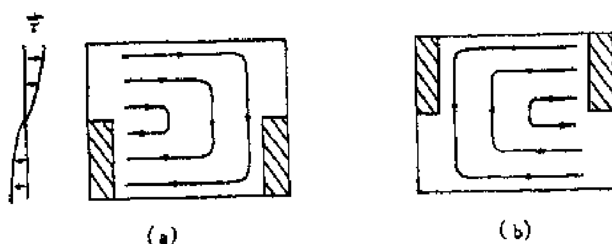


图5.6.2

(a)、(b) 中的斜线区域表示分别对应于图5.3.3(a)、(b) 的可能的惯性边界层位置。注意在图 (b) 中，在不需要惯性边界层的西北边界，可能有惯性边界层；或者在有来自假定的边界流运动之东北边界处，可能有惯性边界流。

惯性边界层的性质对于确定总的环流型（如选择图 5.3.3(a)、(b) 中的运动）没有什么直接的帮助。在变换 $\xi\to-\xi$ 之下，(5.6.15) 的形式保持不变，故对可能存在的东边界层修正函数来说，可立即得出在 $x=X_E$ 处，类似的方程为

$$u_I(X_E,y)\frac{\partial^2\phi_B}{\partial\xi^2}+\phi_B=0. \tag{5.6.26}$$

所以如果 $u_I(X_E,y)$ 也是向西的，则在 $x=X_E$ 处，也可能有惯性边界层。图5.6.2再次表明两种可能的情况，它们都有斜线区所表示的可能的惯性层。注意，在图5.6.2(a)中，在西边界流的形成区内，可能有惯性层，而在图 5.6.2 (b) 中，在海域东南边界（这里可以是东边界流形成区）不可能有惯性层。似乎理应假设惯性流存在于形成区内，所以图5.6.2(a)看来比 5.6.2 (b) 更容易从直觉上接受。然而，必须认识到，还没有只根据惯性理论对这一假设的成立作过证明。不考虑耗散，就不可能在定常问题中严格地排除图 5.6.2 (b) 的可能性。在下节中将对这个问题作较详细的讨论。

如果我们认为内区环流由通常的选择(5.4.20)式的确定，那末显然惯性理论给出西边界流的形成区的无参数模式。(5.6.18) 式确切地预测了边界流宽度。对介于 1 厘米/秒和 10厘米/秒之间的$U_*(y)$值，(5.6.18)式给出量级为30到100公里的边界流宽度，这与实际值很接近。

5.7 有摩擦时的惯性流

尽管惯性理论适合于某些目的，但它局限于 $u_I<0$ 的区域，这就使它不能作为使大洋质量通量闭合（即如图 5.6.1 所示使流线闭合）的唯一机制。本节中我们将考察有小侧向摩擦存在时（在很多方面与Moore(1963)的模式一样)，惯性理论出现的变化。当 $\delta_I\gg\delta_M$、δ_S时，我们仍在(5.4.25)式中选l_*为δ_I，且把ψ_B表示为

$$\psi_B(\xi,y)=\psi_I(x,y)+\phi_B(\xi,y). \tag{5.7.1}$$

考虑

$$\left(\frac{\delta_M}{\delta_I}\right)^3\gg\frac{\delta_S}{\delta_I} \tag{5.7.2}$$

的情况，从而起支配作用的摩擦效应是由侧向摩擦引起的。由(5.4.25)式得包括摩擦的最低阶方程是

$$\frac{\partial\phi_B}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2\phi_B}{\partial\xi^2}-\left(\frac{\partial\psi_I}{\partial y}+\frac{\partial\phi_B}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^3\phi_B}{\partial\xi^3}\right)+\frac{\partial\phi_B}{\partial\xi}=\left(\frac{\delta_M}{\delta_I}\right)^3\frac{\partial^4\phi_B}{\partial\xi^4}, \tag{5.7.3}$$

其中又一次用到了$\frac{\partial\psi_I}{\partial\xi}$为$O(\delta_I/L)$这一事实，以便略去(5.4.25)式中的某些小项。现在考虑位于

$$\phi_B\ll\psi_I$$

的 ξ 值很大的过渡区中的(5.7.3)式。在这个区域中，(5.7.3)式可以用和 5.6 节相同的方式线性化，得到

$$u_I(X_W,y)\frac{\partial^3\phi_B}{\partial\xi^3}+\frac{\partial\phi_B}{\partial\xi}=\left(\frac{\delta_M}{\delta_I}\right)^3\frac{\partial^4\phi_B}{\partial\xi^4}, \tag{5.7.4}$$

或者因为当 $\xi\to\infty$时，ϕ_B必须为零，故有

$$u_I(X_W,y)\frac{\partial^2\phi_B}{\partial\xi^2}+\phi_B=\left(\frac{\delta_M}{\delta_I}\right)^3\frac{\partial^3\phi_B}{\partial\xi^3}, \tag{5.7.5}$$

注意，比较(5.7.5)和(5.6.15)式可以发现，摩擦造成的右端项引入了 $\pm\xi$之间的非对称性。可以求出如下形式的 ϕ_B 的解：

$$\phi_B=Ce^{\alpha\xi}, \tag{5.7.6}$$

式中 α 满足三次方程

$$\left(\frac{\delta_M}{\delta_I}\right)^3\alpha^3-u_I\alpha^2-1=0, \tag{5.7.7}$$

对于 δ_M/δ_I 的小值，可以求出如下形式的解：

$$\alpha=\alpha_0+\left(\frac{\delta_M}{\delta_I}\right)^3\alpha_1+\cdots\cdots. \tag{5.7.8}$$

其他的解给出量级小于δ_I的长度尺度，因而不合要求。若把(5.7.8)式代入(5.7.7)式，令小参数 $(\delta_M/\delta_I)^3$ 的同次幂相等，则我们得到

$$\alpha_0^2=-\frac{1}{u_I(y)}, \tag{5.7.9a}$$

$$\alpha_1=\frac{\alpha_0^2}{2u_I(y)}=-\frac{1}{2u_I^2(y)}; \tag{5.7.9b}$$

所以，

$$\alpha=\left\{(-u_I)^{-1/2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\delta_M}{\delta_I}\right)^3u_I^{-2}\right\}. \tag{5.7.10}$$

当 $u_I<0$ 时，α_0 是实数，且α_1 表示对惯性边界层衰减尺度的微不足道的修正。所以如前面所假定的，摩擦在西边界流的形成区内基本上可以忽略。但若考虑 $u_I>0$ 的情况，即"北部"重入区的情况，则 α_0 是纯虚数，并且方程(5.7.5)的解为

$$\phi_B=C\exp i[u_I^{-1/2}\xi]\exp\left\{-\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\delta_M}{\delta_I}\right)^3u_I^{-2}\xi\right]\right\}, \tag{5.7.11}$$

它代表一个罗斯贝驻波、其有量纲波数为

$$k_*=\frac{1}{\delta_I}u_I^{-1/2}=\left(\frac{\beta_0}{u_{I*}}\right)^{1/2}, \tag{5.7.12}$$

而波长是

$$\lambda_*=2\pi\left(\frac{u_{I*}}{\beta_0}\right)^{1/2}, \tag{5.7.13}$$

这与3.18节的结果一致。这个罗斯贝驻波的存在，使纯惯性理论当 $u_I>0$ 时失效，然而它在尺度$u_I^2\delta_I^3/\delta_M^3$上缓慢地被摩擦所衰减，用有量纲单位表示，该尺度是

$$l_A=\delta_I\left(u_I^2\frac{\delta_I^3}{\delta_M^3}\right)=\frac{u_{I*}^2}{\beta_0A_H}. \tag{5.7.14}$$

因此在衰减前的振荡数为$O((\delta_I/\delta_M)^3)$。如果u_{I*}的量级是O(1厘米/秒)，A_H的量级是$O(10^6$厘米^2/秒)，则 l_A的量级是 O(100公里)。若 u_{I*}较大或A_H较小，则该尺度相应地较大。但它一般远小于海域之范围，故 (5.7.11) 式意味着在西边界的海域北半部可能有复杂的惯性-粘性边界层。另一方面，在东边界上与(5.7.4)式相应的方程给出朝海洋方向呈指数增长的解，所以衰减尺度也取决于 β_0^{-1} 的惯性-粘性层，只能存在于西边界层中。因此，少量摩擦同β效应一起，又一次选择图 5.6.2(a) 作为适当的总环流型。对于 $\delta_I>\delta_M\gg\delta_S$ 的环流型，其略图如图5.7.1所示。

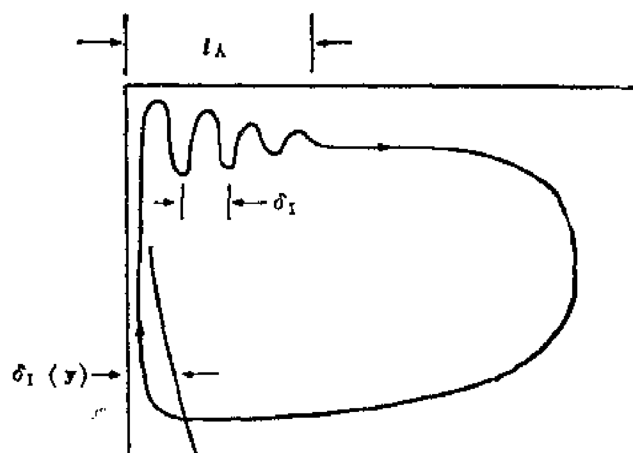


图5.7.1 推导的环流型示意图。
该图说明斯维尔德鲁普内区、西部形成区的惯性边界层、和西北部惯性摩擦区中的衰减罗斯贝波区。

5.8 罗斯贝波和大洋环流的西部强化

尽管各种不同的大洋环流动力学模式，在西边界层的处理方法上有很大差异，但都有西部强化的共同特征。通过对罗斯贝波基本特征的考虑，可以找到简单的物理解释。这些波动在准地转运动中起着能量传递者的作用，并清楚地显示出行星涡度梯度造成的空间各向异性。

罗斯贝波的频率用有量纲单位(1)表示是(3.15.11)：

$$\sigma=-\frac{\beta_0 k}{k^2+l^2+\mathscr{R}^{-2}},\tag{5.8.1}$$

式中 k 和 l 是波矢量的向东和向北的分量，而 $\mathscr{R}$ 是变形半径，

$$\mathscr{R}=\frac{(gD)^{1/2}}{f},\tag{5.8.2}$$

对于 $f=10^{-4}$ 秒$^{-1}$的中纬度地区的深度为 4 公里的海洋，它为O(2,000公里)。行星涡度梯度是β_0。根据(3.19.23a)式，向东的群速度是

$$C_{gx}=\beta_0\frac{k^2-(l^2+\mathscr{R}^{-2})}{(k^2+l^2+\mathscr{R}^{-2})^2}.\tag{5.8.3}$$

x 方向尺度较小 ($k^2>l^2+\mathscr{R}^{-2}$) 的波能量将以适当的群速度向东传播，而 x 方向尺度较大 ($k^2<l^2+\mathscr{R}^{-2}$)的波，能量则以适当的群速度向西传播。

现设在某时刻风应力输给大洋各种尺度的能量。小尺度分量将移向大洋东边界，根据3.23节的概念，在那里它们将作为东西方向的大尺度分量而被反射。另一方面，大尺度分量将移向大洋西边界，在那里它们将作为小尺度的波动而被反射。于是西边界充当着小尺度能源的作用。这就是产生西部强化的物理基础。它只取决于行星涡度波能量传播性质的各向异性。

上述论证可以进一步对西部强化区的大小作出估计。例如考虑蒙克模式，在那里侧向摩

(1) 本节中所有变量均是有量纲的，所以暂时去掉对有量纲变量打星号的约定。

擦远大于非线性平流和涡度的底层耗散。西边界所产生的小尺度 ($k^2 \gg l^2+\mathscr{R}^{-2}$)能量衰减的特征时间是粘性耗散时间，即

$$t_D=O(A_H k^2)^{-1}, \tag{5.8.4}$$

在这段时间里，能量已向东移动了一个距离

$$l=C_{gx}t_D=t_D\frac{\beta_0}{k^2}, \tag{5.8.5}$$

这是因为对小尺度波.

$$C_{gx}\sim\frac{\beta_0}{k^2}. \tag{5.8.6}$$

对于尺度足够小、以至于距离 l 与波长为同量级的波动，即对于那些临界尺度为

$$k\sim l^{-1} \tag{5.8.7}$$

的衰减波，其能量将在西边界处被有效地拦截。将(5.7.4)、(5.7.5)和(5.7.7)式结合起来可得到估计值

$$l\sim\frac{\beta_0 l^4}{A_H}, \tag{5.8.8}$$

或

$$l=\left(\frac{A_H}{\beta_0}\right)^{1/3}, \tag{5.8.9}$$

这与 (5.4.1) 式一致。在斯多美尔模式中，底摩擦耗散起主导作用，故在那种情况下，由(4.7.1)(1)式得

$$t_D\sim 2\frac{D}{\delta_E}f^{-1}, \tag{5.8.10}$$

该式与(5.8.5)式和(5.8.7)式一起给出与(5.5.2)式一致的拦截尺度

$$l=\frac{\delta_E f/2}{D\beta_0}. \tag{5.8.11}$$

在惯性理论中，平均运动的涡度平流变成重要的因子，而且如3.18节所述，平均运动改变波动频率，并使群速度增大。于是西边界上产生的短波分量具有群速度

$$C_{gx}=u_I+\frac{\beta_0}{k^2}, \tag{5.8.12}$$

式中 u_I 是斯维尔德鲁普运动造成的平流。那些 $C_{gx}<0$ 的运动尺度将在西边界受拦截。这显然要求$u_I<0$，且k足够大，以至于使原来向东的群速度变小到足以被向西的斯维尔德鲁普运动所补偿。短于

$$l=\left(-\frac{u_I}{\beta_0}\right)^{1/2} \tag{5.8.13}$$

的尺度将受到拦截。这个估计值还揭示出惯性理论在 $u_I>0$ 处的基本困难。产生于西边界的短波分量在那里不受拦截，而实际上还得受助于斯维尔德鲁普运动，且作为罗斯贝波向大洋内区传播。在传播过程中，它们将因耗散过程而缓慢地衰减。如果侧向摩擦是主要耗散机制，从而(5.8.4)适用，那末根据(5.8.5)式，波长为 k^{-1} 的罗斯贝波衰减的尺度应为

(1) (5.8.10) 式和(4.3.26) 式之间相差一个因子 2，这是因为现在只有下艾克曼层使涡度耗散，旋转加强时间为原来的 2 倍。

$$l=\frac{\beta_0}{A_H}k^{-4},\tag{5.8.14}$$

或因 $k\sim(\beta_0/u_I)^{1/2}$，根据 (3.18.11) 式和 $u_I>0$，得到与(5.7.14)式一致的结果：

$$l=\frac{u_I^2}{\beta_0 A_H},\tag{5.8.15}$$

因此，可以根据用来阻止边界层尺度的运动从西边界（它们大多数是在这里产生的）渗入大洋内区的方法（粘性的、惯性的或惯性-粘性的），来对各种西边界流理论加以分类。

5.9 定常环流耗散之积分

当西边界流基本上是惯性流时，不可能得到对于整个环流的解析解。虽然已导出的定性结果，对环流性质给出了很好的图像，但要得到流线的显示结构，则需对涡度方程(5.2.20)作数值积分。在考察目前已有的数值计算之前，在本节中先推导某些积分关系，它们有助于我们理解这些很复杂的计算。

在所算得的闭合域大洋的定常环流型中，所有流线必须是闭合的。考虑如图 5.9.1 所示

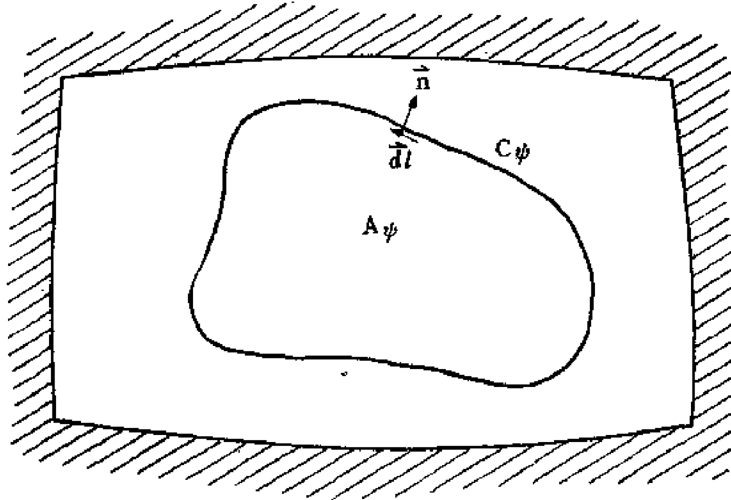


图5.9.1　与定常环流型流线重合的周线C_ψ包围面积A_ψ。

的任一闭合流线，它所包围的面积是A_ψ，且由曲线C_ψ组成。对定常运动，涡度方程(5.2.20)可以写为

$$\mathbf{u}\cdot\nabla\left\{\left(\frac{\delta_I{}^2}{L^2}\right)\zeta+y+\frac{\eta_B}{\beta}\right\}=\operatorname{curl}\tau-\frac{\delta_S}{L}\zeta+\left(\frac{\delta_M}{L}\right)^3\nabla^2\zeta,\tag{5.9.1}$$

式中使用了定义 (5.4.1)。在面积A_ψ上积分(5.9.1)式。由于速度场是地转的，故

$$\iint_{A_\psi}\mathbf{u}\cdot\nabla\left\{\frac{\delta_I^2}{L^2}\zeta+y+\frac{\eta_B}{\beta}\right\}dxdy=\iint_{A_\psi}\nabla\cdot\left[\mathbf{u}\left(\frac{\delta_I^2}{L^2}\zeta+y+\frac{\eta_B}{\beta}\right)\right]dxdy,\tag{5.9.2}$$

再用散度定理

$$\iint_{A_\psi}\mathbf{u}\cdot\nabla\left\{\frac{\delta_I^2}{L^2}\zeta+y+\frac{\eta_B}{\beta}\right\}dxdy=\oint_{C_\psi}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\left\{\frac{\delta_I^2}{L^2}\zeta+y+\frac{\eta_B}{\beta}\right\}dl=0,\tag{5.9.3}$$

这是因为根据定义，u 必须平行于流线，而n是垂直于流线的单位矢量。于是(5.9.1)式在 A_ψ 上的积分给出

$$\oint_{C_\psi}\boldsymbol{\tau}\cdot d\mathbf{l}=\frac{\delta_S}{L}\oint_{C_\psi}\mathbf{u}\cdot d\mathbf{l}-\left(\frac{\delta_M}{L}\right)^3\oint_{C_\psi}(\nabla\zeta\cdot\mathbf{n})dl, \tag{5.9.4}$$

式中$d\mathbf{l}$是与C_ψ相切的无穷小矢量线元，其大小为 dl。在导出(5.9.4)式时，使用了下述斯托克斯定理和散度定理的矢量积分恒等式：

$$\iint_{A_\psi}\mathrm{curl}\,\tau dxdy=\oint_{C_\psi}\boldsymbol{\tau}\cdot d\mathbf{l}, \tag{5.9.5a}$$

$$\iint_{A_\psi}\zeta dxdy=\oint_{C_\psi}\mathbf{u}\cdot d\mathbf{l}, \tag{5.9.5b}$$

$$\iint_{A_\psi}\nabla^2\zeta dxdy=\oint_{C_\psi}\nabla\zeta\cdot\mathbf{n}dl. \tag{5.9.5c}$$

(5.9.4)式的物理意义就是，风应力在C_ψ上产生的环流必须和底摩擦在C_ψ上的涡度耗散及穿过C_ψ的涡度扩散相平衡。涡度的净输入和τ在C_ψ上的环流成正比，而由底摩擦引起的涡度耗散与涡度场的环流成正比。必须注意，由(5.9.4)式所描写的应力输入和摩擦耗散之间的平衡，必须对 δ_I/δ_S 的 δ_I/δ_M 的所有值均成立。也就是说，惯性力(5.9.3)不能平衡涡度输入，且不能参与涡度平衡。因此，摩擦必须起到维持平衡的作用，不管摩擦力与惯性效应相比是多么小，完全忽略摩擦显然是不行的。

在流体内区，各无量纲变量都是$O(1)$。从(5.9.4)式立即可以得出，由于δ_S和δ_M相对于L是小量，故在全部位于内区的流线上，不可能达到各项之间的平衡，因为这时

$$\oint\boldsymbol{\tau}\cdot d\mathbf{l}=O(1), \tag{5.9.6}$$

而右端项分别是$O(\delta_S/L)$和$O((\delta_M/L)^3)$。因此如图5.9.2所示，每条流线都必须通过耗散是重要因子的边界层区。我们把蒙克模式作为第一个例子来考虑。该模式中没有有效的底摩擦。根据(5.4.39)式，在边界层中，

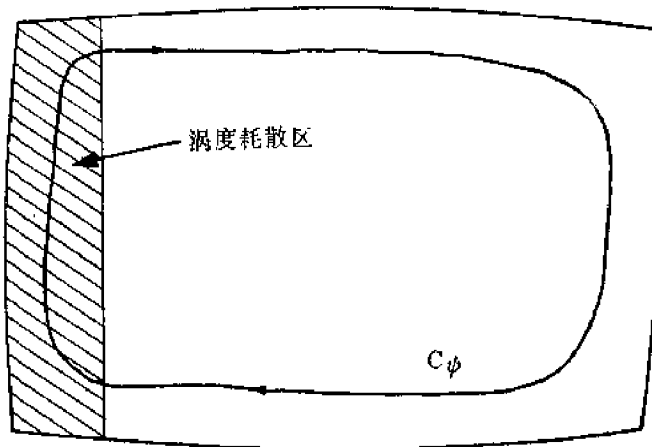


图5.9.2 若内区涡度由斯维尔德鲁普关系给出，则每条流线必须进入涡度耗散区，且流线不可能只在内区闭合。

$$v_B=O\left(\frac{L}{\delta_M}\right),$$

而且边界层中的涡度梯度是

$$\nabla\zeta\sim\frac{\partial\zeta}{\partial x}=O\left(v_B\frac{L^2}{\delta_M^2}\right)=O\left(\frac{L}{\delta_M}\right)^3, \tag{5.9.7}$$

结果有

$$\left(\frac{\delta_M}{L}\right)^3\oint\nabla\zeta\cdot\mathbf{n}dl=O(1), \tag{5.9.8}$$

这是因为每条流线在该层中 y 方向上的距离量级为$O(1)$。所以边界层中侧向摩擦产生的涡度扩散和风应力涡度源相平衡。

在斯多美尔模式中，底摩擦起主导作用，由(5.5.19)式得

$$v_B = O\left(\frac{L}{\delta_S}\right).$$

因此有流线穿过西边界层，所以在斯多美尔层中，(5.9.4) 式中右端第一个积分从该层的流线部分得到的贡献是

$$\frac{\delta_S}{L}\int \mathbf{u}\cdot d\mathbf{l} = \int v_B dy = O(1). \tag{5.9.9}$$

在有摩擦的各种情况下，使质量通量连续的西边界层，也能把风输送给大洋的涡度耗散掉。

再转而考虑 $\delta_I \gg \delta_M$ 或 δ_S 的惯性边界流情况。流体在惯性流中运动时，不难估计作用于其上的耗散对涡度平衡的贡献。这是因为

$$v_B = O\left(\frac{L}{\delta_I}\right),$$
$$\zeta_B = O\left(\left(\frac{L}{\delta_I}\right)^2\right), \tag{5.9.10}$$

所以，

$$\frac{\delta_S}{L}\int v_B dy = O\left(\frac{\delta_S}{\delta_I}\right) \ll 1,$$
$$\left(\frac{\delta_M}{L}\right)^3 \int \frac{\partial \zeta_B}{\partial x} dy = O\left(\left(\frac{\delta_M}{\delta_I}\right)^3\right) \ll 1. \tag{5.9.11}$$

在惯性边界层中，没有能足以平衡风应力输入的耗散作用。弄清这个明显的佯谬是困难的，但这很重要。对于一切 $A_H \neq 0$，不论它多么小，在惯性边界层中必须存在一个摩擦附属层，以满足无滑动条件。它与 5.5 节的附属层类似。但是因为现在 $\delta_I > (\delta_M, \delta_S)$，附属层的特征必定是水平摩擦力和非线性平流之间的平衡，即

$$\left(\frac{\delta_I}{L}\right)^2 \mathbf{u}\cdot\nabla\zeta = O\left(\left(\frac{\delta_M}{L}\right)^3\right)\nabla^2\zeta. \tag{5.9.12}$$

附属层的无量纲宽度 l 可以作如下的估计。在附属层内，

$$\left(\frac{\delta_M}{L}\right)^3 \nabla^2\zeta = O\left(\left(\frac{\delta_M}{L}\right)^3\right)\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} = O\left(\left(\frac{\delta_M}{L}\right)^3 \frac{\zeta_B}{l^2}\right), \tag{5.9.13}$$

而

$$\left(\frac{\delta_I}{L}\right)^2 \mathbf{u}\cdot\nabla\zeta = \left(\frac{\delta_I}{L}\right)^2\left(u\frac{\partial\zeta}{\partial x} + v\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right) = O\left(\left(\frac{\delta_I}{L}\right)^2\right) v_B \zeta_B. \tag{5.9.14}$$

所以 (5.9.12) 式意味着

$$l = \left(\frac{\delta_M^3}{\delta_I^2 L v_B}\right)^{1/2} = \frac{1}{L}\left(\frac{\delta_M^3}{\delta_I}\right)^{1/2}, \tag{5.9.15}$$

或用有量纲单位表示，

$$l_* = lL = \sqrt{\frac{A_H \delta_I}{U}} = \frac{\delta_I}{Re_\delta^{1/2}} \ll \delta_I, \tag{5.9.16}$$

式中

$$Re_\delta = \frac{U\delta_I}{A_H}$$

是边界层雷诺数。

现在考虑与区域周界重合的流线 C_0。对于这条外部流线，涡度平衡(5.9.4)式表示整个区域的涡度平衡。因为 C_0直接与边界相邻，它一定通过摩擦附属层，并且对此流线而言，侧向涡度扩散的贡献（用(5.9.10)式和(5.9.15)式表示）是

$$\left(\frac{\delta_M}{L}\right)^3\int\nabla\zeta\cdot\mathbf{n}\,dl=O\left(\left(\frac{\delta_M}{L}\right)^3\frac{v_B}{l^2}\right)$$

$$=C\left(\frac{\delta_M^3}{L^3}\frac{L}{\delta_I}\frac{L^2}{\delta_M^2}\delta_I\right)=O(1), \tag{5.9.17}$$

而且恢复了此区域的涡度平衡。所以无论 A_H 多小，只有考虑了水平扩散，才能得出具有斯

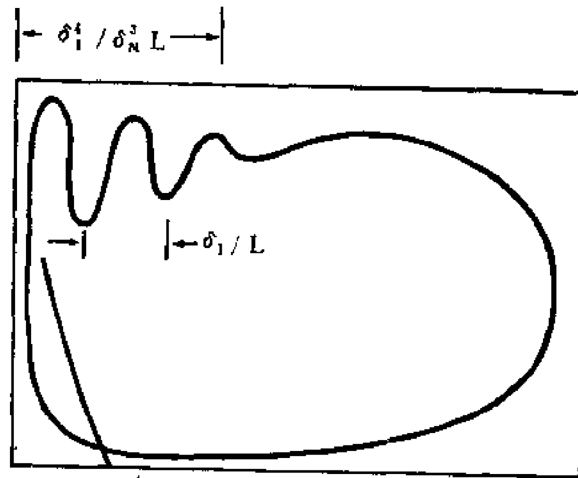


图5.9.3 考虑耗散时得到的定常流线型。

维尔德鲁普内区运动的定常解（所以（5.9.11）式的变量在内区确实是$O(1)$）。当非线性惯性项成为重要项时，忽略侧向扩散是完全改变解之性质的奇异摄动。

然而并非所有的流线均通过附属层（其他附属层本身也会作为适当的西边界流出现）。考虑如图 5.9.3 所示的附属层外的一条流线，它通过惯性层向北，且通过北部的波状惯性-粘性区重新进入区内。我们已经看到，在西边界流的形成区，涡度耗散不能平衡风应力的涡度输入。

现在考察出现在区域西北部的粘性-惯性区内的扩散。在该区内，用无量纲单位表示的涡度为$O(v_B L/\delta_I)$，所以

$$\left(\frac{\delta_M}{L}\right)^3\int\nabla\zeta\cdot\mathbf{n}\,dl=O\left(v_B\frac{L^2}{\delta_I^2}\cdot\left(\frac{\delta_M}{L}\right)^3\right)\mathscr{L}; \tag{5.9.18}$$

式中 $\mathscr{L}$ 是粘性-惯性区中沿波动流线和路径长度。每一波动的路径长度是 $O(1)$，但利用（5.7.14）式之后，从（5.8.3）式可以看出波动数是

$$N=\frac{\delta_I^4/\delta_M^3}{\delta_I}=\frac{\delta_I^3}{\delta_M^3}。 \tag{5.9.19}$$

因为

$$v_B = O\left(\frac{L}{\delta_I}\right), \tag{5.9.20}$$

故可得出，(5.9.18) 式中积分的大小是

$$\frac{L}{\delta_I}\ \frac{L^2}{\delta_I^2}\ \frac{\delta_M^3}{L^3} N = O(1). \tag{5.9.21}$$

所以对粘性-惯性区中流线波动的另一种观点是，波动起着阻碍作用，它使涡度有足够长的时间穿过波动扩散进入摩擦附属层而到大洋区域之外，故可以满足 (5.9.4) 式。

如果任意令 $A_H=0$，且只保留底摩擦，则如同我们已看到的，甚至在底摩擦存在的情况下所产生的奇异摄动，也不能导致与$O(1)$内区涡度的平衡。在这种情况下，解决的办法是什么？显然，即使风应力旋度强迫项量级固定为 $O(1)$，内区涡度量级也必须大于 $O(1)$，才能达到涡度耗散平衡。这种情况出现在类似于发生共振（当强迫频率与系统固有频率一致时）的弹簧谐振子那样的简单力学系统中。此时响应的振幅只受系统的摩擦限制，如果系统的摩擦力很小，则最后的振幅可以远远超过以无共振频率强迫的振幅。这很自然地出现了一个问题：在环流问题中，是否存在一个频率为零的无粘自由波，它能在强迫问题中忽略 A_H 时产生共振？下节将研究这个问题。

5.10 自由惯性波

考虑如图5.10.1所示的矩形域中可能存在的定常自由惯性运动。对于$\tau=\delta_M=\delta_S=0$的平底大洋的情况，(5.9.1)式变为

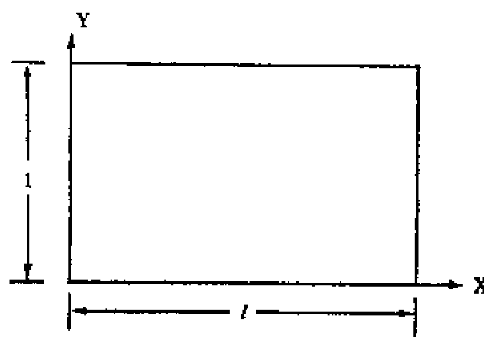


图5.10.1 用以计算频率为零的惯性波的闭合矩形域。

$$\mathbf{u}\cdot\nabla\left\{\left(\frac{\delta_I}{L}\right)^2\zeta + y\right\} = 0. \tag{5.10.1}$$

或等价地写为

$$\left(\frac{\delta_I}{L}\right)^2\nabla^2\psi + y = G(\psi), \tag{5.10.2}$$

式中 ψ 是地转流函数。由于区域是闭的，所有流线也是闭合的，故 $G(\psi)$不能用5.6节的方法来确定，这是因为在任意流线上，事先并不知道运动的情况。但是我们可以选择

$$G(\psi) = \frac{\psi}{A^2}, \tag{5.10.3}$$

并观察其结果。常数 A^2 是任意的。于是 (5.10.2) 式变为

$$A^2\left(\frac{\delta_I}{L}\right)^2\nabla^2\psi - \psi = -yA^2, \tag{5.10.4}$$

其边界条件是

$$\text{在}\begin{cases} x=0 \\ x=l \\ y=0 \\ y=l \end{cases}\text{上，}\qquad \psi=\text{常数。} \tag{5.10.5}$$

因为 $(\delta_I/L)^2$是小参数，所以可用边界层方法寻求方程（5.10.4）的满足（5.10.5）的近似解。内区的解为

$$\psi=\psi_I=yA^2, \tag{5.10.6}$$

它代表均匀的向西运动。在 $x=0$ 和 $x=l$ 上需要有边界层，以使法向速度为零。所以暂时不计 $y=0$、1处的边界，则（5.10.4）满足 $x=0$ 和$x=l$ 处法向速度为零的解为

$$\frac{\psi}{A^2}=y-(y-y_r)[e^{-xL/\delta_I A}+e^{-(l-x)L/\delta_I A}], \tag{5.10.7}$$

其中 y_r是任意常数。(5.10.7) 式所描写的运动如图 5.10.2 所示。内区质量通量处处都向东。流动向西岸接近，在西岸 $y=y_r$ 处分为两支，一支向北流，另一支向南流。为了使质量通量返回东部，需要有 $y=0$ 和 $y=1$ 处的边界层，即为了说明返回的质量通量，必须在（5.10.7）式上附加形如

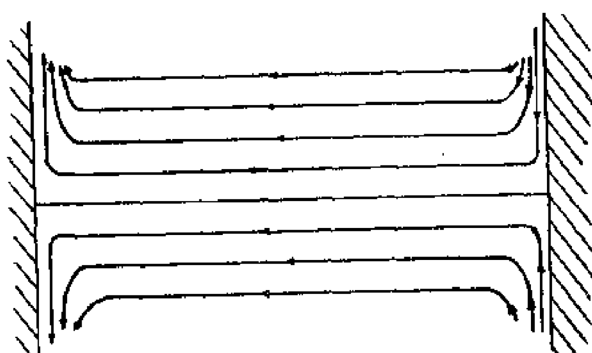


图5.10.2　不考虑南北边界的惯性波流型。

$$\psi_N=C_N e^{-(1-y)L/\delta_I A}$$
$$\psi_S=C_S e^{-yL/\delta_I A} \tag{5.10.8}$$

的方程（5.10.4）的齐次解。北边界层中总的向东的质量通量是 $-C_N$，它必须等于西边界层中，当其到达北边界时向北的质量通量，即

$$-\frac{C_N}{A^2}=(1-y_r). \tag{5.10.9}$$

类似地有

$$-\frac{C_S}{A^2}=y_r. \tag{5.10.10}$$

所以对于小 $(\delta_I/L)^2$ 之完全解是

$$\frac{\psi}{A^2}=y-(y-y_r)[e^{-xL/\delta_I A}+e^{-(l-x)L/\delta_I A}]-(1-y_r)\times e^{-(1-y)L/\delta_I A}+y_r e^{-yL/\delta_I A}. \tag{5.10.11}$$

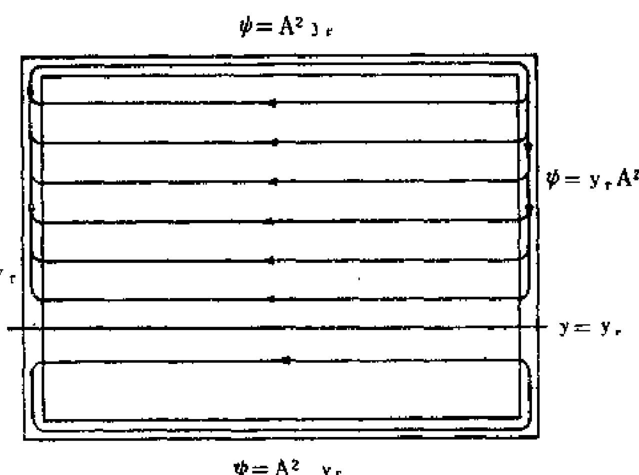


图5.10.3　福福诺夫自由惯性波。
注意y_r是任意的，并可移到区域中的任一纬度上。

它的流线简略地表示在图5.10.3上。这一自由波首先是由 *Fofonoff* (1954) 讨论过的。这基本上是一种非线性波，

因为在 $x=0$ 或 1 处有边界阻挡时，在 y 为常数的地转等值线上，不可能有严格线性的定常地转运动。从图 5.10.3可清楚地看出，为了使质量通量连续，必须有惯性边界流。重要的是应当注意，波振幅是任意的。

现在来考虑有少量的底摩擦（即 $\delta_S \ll \delta_I$）、并完全忽略侧向摩擦的情况。由（5.9.4）式，福福诺夫波的耗散是

$$\frac{\delta_S}{L}\oint \mathbf{u}\cdot d\mathbf{l}=O\left(\frac{\delta_S}{L}v_B\right), \tag{5.10.12}$$

这是因为耗散主要伴随高速的边界流发生。根据（5.9.11）式，在这此边界流中（例如在边界层中）速度为

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{L}{\delta_I}A(y-y_r)\,e^{-XL/\delta_I A}=O\left(\frac{AL}{\delta_I}\right), \tag{5.10.13}$$

所以

$$\frac{\delta_S}{L}\oint \mathbf{u}\cdot d\mathbf{l}=O\left(A\left(\frac{\delta_S}{\delta_I}\right)\right). \tag{5.10.14}$$

如果

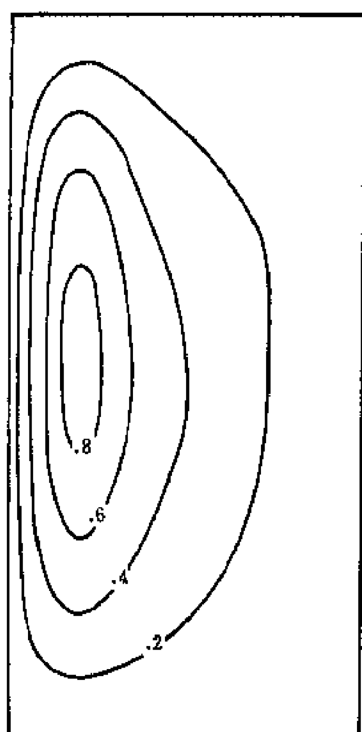
$$A=O\left(\frac{\delta_I}{\delta_S}\right)\gg 1, \tag{5.10.15}$$

则上式将对涡度耗散产生 $O(1)$ 的贡献。

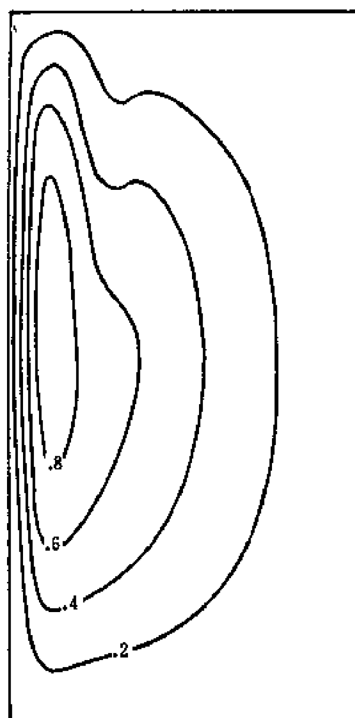
可以预料，在有 $O(1)$ 风应力时，可能发生与福福诺夫自由波的共振，引起 $O(\delta_I/\delta_S)$ 的内区运动——即比斯维尔德鲁普理论预测的 $O(1)$ 运动大 $O(\delta_I/\delta_S)$ 倍。这种共振只出现在A_H恰好为零的时候，否则对非零的A_H，将出现图 5.9.3的流型。这些结论可以为下节讨论的数值试验所证明。

5.11 数值试验

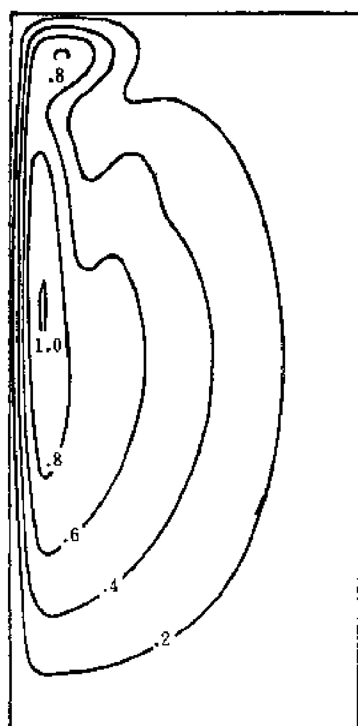
对地转运动来说，除要求相对涡度远小于行星涡度（即$U/fL\ll 1$）外，斯维尔德鲁普理论和西边界流的线性理论要求更严格的条件：相对涡度梯度远小于行星涡度梯度，即 $U/\beta_0 L^2\ll 1$。否则，非线性涡度平流就会变成涡度平衡中的重要因子。在实测的西边界流中，相对涡度梯度与β_0同量级，所以非线性效应是重要的。然而，如同5.7和5.8节的讨论所指出的那样，为了得到定常解，在总环流问题中必须考虑摩擦。这就导致了一个十分困难的数学物理问题；而且，尽管以上给出的解析论证指出了环流的定性性质，但是显式的准确解则需要用计算机给出数值解。重要的是应当考虑到，和解析研究法一样，数值计算也有其本身的局限性，这些局限性是由尺度分辨率、经济性和所得结果的性质所决定的，其中最后一个原因特别重要。按其结果的性质来说，在任何情况下，数值解只能给出单个的具体动力学状况，而不能给出动力学变量间的普遍关系。这类似于在一次实验室实验中得到的信息。为了得到关于结果的有用的物理解释，这些结果都需要增加补充的知识。当数值计算是以有关的运动方程为出发点，而不是只计算一个推导出来的解析公式时，这种计算，通常称为数值试验。有关大洋环流的数值模拟问题，我们将在本章最后一节中作一概述。在这里只是介绍几种重



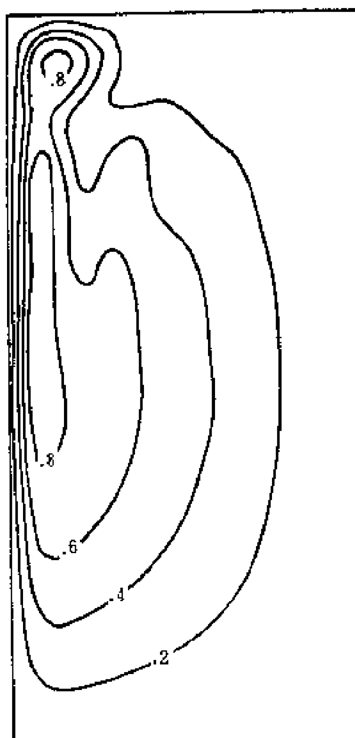
Re = 5



Re =20



Re =40



Re =60

图5.11.1 定常流型的流线。

(a) $Re=5$, (b) $Re=20$, (c) $Re=40$, (d) $Re=60$; 各种情况下都取$\beta^{-1}=1.28\times10^{-3}$ (*Bryan*, 1963).

要的数值试验，它们给出涡度方程（5.2.22）式的解答，这些试验的结果如下。

Bryan（1963）在没有底摩擦的情况下，对矩形平底大洋（他在(5.2.22)式中令$r=0$且$\eta_B=0$)积分了涡度方程。内区速度象（5.2.19）式那样来规定尺度，在计算中大部分用固定的β^{-1}值：

$$\beta^{-1}=\frac{U}{\beta_0 L^2}=1.28\times10^{-3}, \tag{5.11.1}$$

而雷诺数

$$Re=\frac{UL}{A_H} \tag{5.11.2}$$

从5变化到60。Re超过60时，只得到非定常解，在此不予讨论。由于

$$\frac{\delta_I}{\delta_M}=\left(\frac{Re}{\beta^{1/2}}\right)^{1/3}, \tag{5.11.3}$$

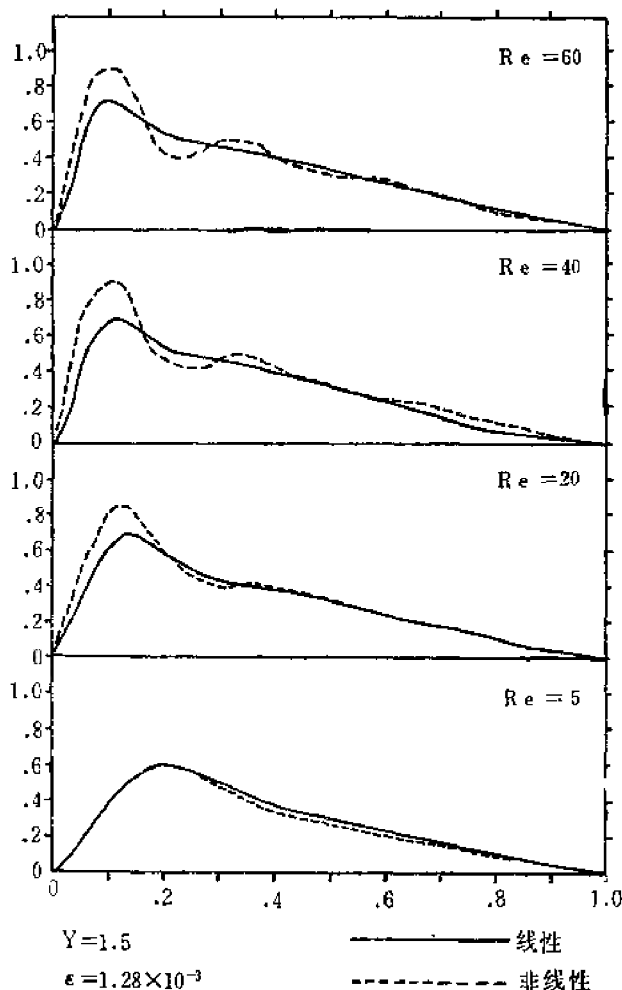


图5.11.2　虚线表示在5.11.1图的四种雷诺数情况下，流函数随经度变化的廓线。实线是蒙克线性解(*Bryan*1963)。

所以$\frac{\delta_I}{\delta_M}$的试验范围从（$Re=5$时）0.56左右到（$Re=60$时）1.29。在后一极限情况下，边界层肯定是强非线性的，但摩擦也几乎是重要的，实际上，$\delta_I/\delta_M \ll 1$的情况对定常问题基本上不恰当，因为试验指出，在那种情况下，定常解无疑是不稳定的，而且实际上是不可实现的。

图5.11.1．给出*Bryan*计算的对应四种不同雷诺数（即δ_I/δ_M的四个值）的流线型。他所用的风应力形式是

$$curl\tau=-\sin\pi y. \tag{5.11.4}$$

图5.11.1(*a*)给出$Re=5$的计算结果，这个结果几乎和蒙克的线性模式（即(5.4.40)式）所预报的结果一样。随着Re的增大，非线性效应变得越来越明显，直到$Re=60$时为止，此时流型得到了5.6节所讨论的运动的一般性质。区域的北半部是衰减的罗斯贝波的波动流场。如5.9节所述，相对涡度在这里被水平扩散所耗散。(5.9.19)式对$Re=60$时流型波动数的粗略估计给出$N=2$，这与图5.11.1（*d*）的结果极为吻合。图5.11.2给出区域北部流函数随x的变化。该图表明，当Re增大时，

超过线性解的 ψ 也增加，这反映了为补偿非线性引起的逆流所需的输送量之增大。蒙克线性模式也具有弱的摩擦驱动的逆流，因此边界流输送也稍有增加。在这一计算中，这种增加是由区域北部惯性-粘性效应引起的罗斯贝驻波产生的。

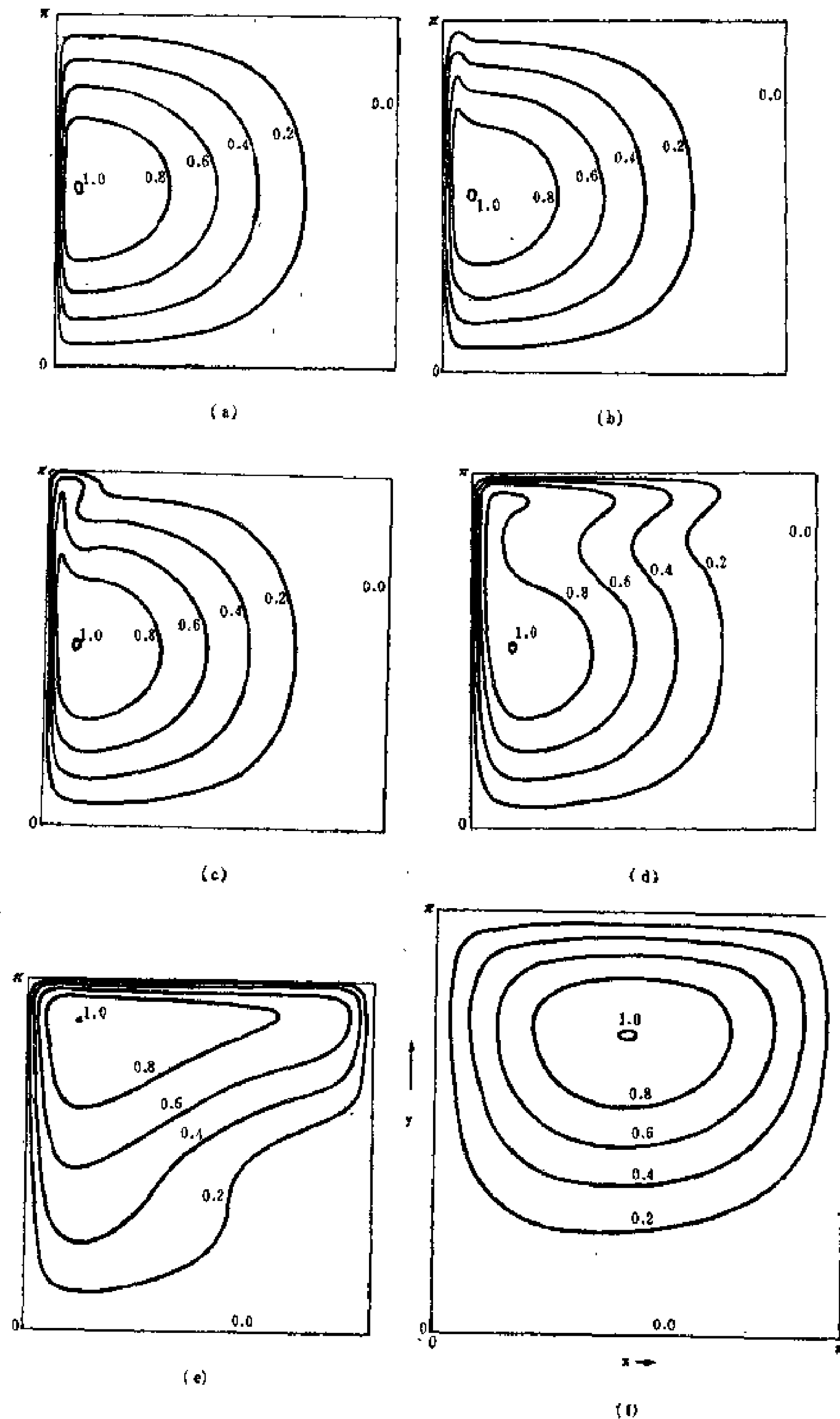


图 5.11.3 忽略水平动量扩散而只考虑底摩擦时的定常运动流线。

(a) $\delta_I/\delta_S=2\times10^{-2}$, (b) $\delta_I/\delta_S=6\times10^{-2}$, (c) $\delta_I/\delta_S=1$, (d) $\delta_I/\delta_S=2$, (e) $\delta_I/\delta_S=4$, (f) $\delta_I/\delta_S=8$ (Veronis, 1966)。ψ 的等值线从 $\psi/\psi_{max}=0$ 到 $\psi/\psi_{max}=1.0$ 每隔0.2画一条。(a) $\psi_{max}=1.841$, (b) $\psi_{max}=1.836$, (c) $\psi_{max}=1.829$, (d) $\psi_{max}=1.797$, (e) $\psi_{max}=3.164$, (f) $\psi_{max}=12.81$。

Veronis (1966) 作了一个很有意义的数值试验。他令 $A_H=0$，从而去掉了矩形域边界处的无滑动条件，只把底摩擦考虑为耗散机制。在这个例子中大洋底也是平坦的。西边界区非线性程度的合理度量是

$$\frac{\delta_I}{\delta_S}=\frac{\beta^{1/2}}{r}. \qquad (5.11.5)$$

Veronis 的计算范围从 δ_I/δ_S 为 2×10^{-2} 到其最大值8。显然，在后一种情况下，基本上可得到惯性边界流。正如我们已注意到的，完全忽略水平摩擦是涡度方程的奇异摄动，当$\delta_I/\delta_S\gg1$ 时，动力学性质对奇异摄动特别敏感。图5.11.3 (a) 给出了对于和 Bryan 计算所用的风应力型基本相同的情况计算得到的流线型。在此情况下，δ_I/δ_S 是 2×10^{-2}，所得到的环流型等价于 5.5 节讨论过的斯多美尔线性模式。当 δ_I/δ_S 增大时，非线性效应变得越来越明显。运动场中出现南北非对称性，而且在 δ_I/δ_S为 1 的图 5.11.3 (c) 上，区域北部出现了熟悉的流场波动。当 δ_I/δ_S 增加到超过 1 时，5.8 节考虑的耗散变得越来越重要。例如，图 5.11.3 (e) 给出$\delta_I/\delta_S=4$ 的计算结果。在该图上波动已消失。代替它的是形成了一支强的北边界流，它横跨整个北边界，所以流体自东边重新进入内区。在图 5.11.3 (f)所示的 $\delta_I/\delta_S=8$ 的极端情况下，环流的西部强化本身也已消失，流型很象 5.10 节的福福诺夫自由波。由于没有侧向摩擦，所以导致了与福福诺夫波的共振。在图 5.11.3 (a) 的线性解中，ψ 的极大值是1.84，而在共振情况下，ψ的最大值已猛增了约一个量级，达到 12.81。这与 (5.10.15) 式的估计是一致的，该式表明，在没有侧向摩擦时，内区流函数当 $\delta_I\gg\delta_S$时为 $O(\delta_I/\delta_S)$，而不是由斯维尔德鲁普理论给出。由此得出福福诺夫波振幅的一个预报值：$1.84\times8\sim14.7$，该值与计算结果很接近。Bryan 和 Veronis 的计算结果之间非常重要的定性差异，显然说明了忽略侧向摩擦的奇异摄动之结果。

5.12 艾克曼上升流

本章中所建立的风生环流理论，明显地使用了 β 平面近似。特别是涡度方程通过使用条件 (5.2.12)，

$$\frac{\beta_o L}{f_o}<O\ (1) \qquad (5.12.1)$$

而得到简化。根据 (5.12.1) 的其他意义，该条件使我们能在$O(\beta_o L/f_o)$ 上忽略艾克曼输送，因为它远小于 (5.2.24) 式所示的内区地转输送，所以总的输送可近似地由地转分量来表示。但是尽管 $\beta_o L/f_o$ 很小——例如对多数大洋循环流为 $O(10^{-1})$——仍不能完全忽略。实际上，在涡度方程中忽略这一量级的项而保留一般较小的 $O(\delta_I^2/L^2,\ \delta_M^3/L^3,\ \delta_S/L)$ 项的唯一依据是，后几项虽然在内区可以完全略去，但在运动尺度缩小为 δ_I,δ_M，或者 δ_S 时，它们却变为$O(1)$量。

本节重新考察艾克曼输送产生的$O(\beta_o L/f_o)$环流。艾克曼层输送是由风应力的局部值确定的，且与它垂直。当艾克曼层通量流向大洋边界时会发生什么情况呢？地转运动是由艾克曼通量的辐散驱动的。当无辐散的艾克曼通量存在时，将出现什么情况？在这样的情况下，运动局限于艾克曼层吗？需要有西边界流吗？内区地转速度在大洋东边界上仍然必须为零吗？这些基本问题，不是 (5.2.22) 这种简单模式所能回答的，但是这种模式的推广形式，除非仔细地加以限制，否则也是难以处理的。为了回答以上提出的基本问题，我们将考虑一

个非常简单的平底大洋模式，其中预先忽略了非线性项。

均质流体层的有量纲运动方程由（4.3.1 a,b,c）给出。如果把科氏参数在一中心纬度θ_o附近线性化，则

$$f=f_o(1+\frac{\beta_o}{f_o}y_*)=f_o\tilde{f}, \tag{5.12.2}$$

式中

$$f_o=2\Omega\sin\theta_o, \tag{5.12.2}$$

$$\beta_o=\frac{2\Omega\cos\theta_o}{r_o},$$

$$\tilde{f}=1+\frac{\beta_o y_*}{f_o},$$

其中r_o是地球半径，而y_*是有量纲的向北坐标。如果用（5.2.19）式给出的U来作水平速度的特征尺度，而用$(D/L)U$、L、D、PLf_oU和τ_o分别作为垂直速度、水平长度、垂直深度、水平气压变化和风应力的特征尺度，则从（4.3.1 a、b、c）式直接得出的无量纲形式线性运动方程为

$$-\tilde{f}v=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{E_V}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{E_H}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{5.12.3a}$$

$$\tilde{f}u=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{E_V}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\frac{E_H}{2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right), \tag{5.12.3b}$$

$$0=-\frac{\partial p}{\partial Z}+\frac{\delta^2}{2}\left[\frac{E_V}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+\frac{E_H}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right], \tag{5.12.3c}$$

而连续方程仍是

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0. \tag{5.12.4}$$

在$z=1$的上表面处，风应力的存在要求有一个厚度为δ_E的艾克曼层，如4.10节所述，有下述关系

$$\frac{\delta_E}{D}=E_v^{1/2}. \tag{5.12.5}$$

应力的作用产生艾克曼通量，用无量纲单位表示，该通量为

$$\mathbf{M}_E=\left(\frac{\beta_o L}{f_o}\right)\frac{\boldsymbol{\tau}\times\mathbf{k}}{\tilde{f}}, \tag{5.12.6}$$

式中$\mathbf{k}$是z方向的单位矢量。因为

$$\nabla\cdot\mathbf{M}_E=\frac{\beta_o L}{f_o}curl\frac{\tau}{\tilde{f}}, \tag{5.12.7}$$

所以从内区抽入上艾克曼层的垂直速度是

$$w(x,y,1)=\frac{\beta_o L}{f_o}curl\frac{\tau}{\tilde{f}}. \tag{5.12.8}$$

既然在内区里，(5.12.3a、b、c）式中与E_H和E_V成比例的项完全可以略去，故对内区有

$$\gamma v_I = \frac{\partial p_I}{\partial x}, \tag{5.12.9a}$$

$$\gamma u_I = -\frac{\partial p_I}{\partial y}, \tag{5.12.9b}$$

$$0 = -\frac{\partial p_I}{\partial z}, \tag{5.12.9c}$$

式中下标 I 是代表内区动力学变量。在（5.12.9$a.b.c$）中消去 p_I 得到

$$\left(\frac{\beta_o L}{f_o}\right) v_I = \gamma \frac{\partial w_I}{\partial z}. \tag{5.12.10}$$

因为根据（5.12.9c）式得 u_I 和 v_I 与 z 无关，故对（5.12.10）式积分得：

$$\frac{\beta_o L}{f_o} v_I = \gamma(w_I(x,y,1) - w_I(x,y,0)). \tag{5.12.11}$$

由于根据（4.5.39）式有

$$w_I(x,y,o) = \frac{E_V{}^{1/2}}{2}\left\{\frac{\partial v_I}{\partial x} - \frac{\partial u_I}{\partial y}\right\}. \tag{5.12.12}$$

所以精确到 $O(E_V{}^{1/2})$ 时(5.12.11)式变为

$$\boxed{v_I = \gamma curl \frac{\tau}{\gamma}} \tag{5.12.13}$$

或

$$v_I = curl\tau + \frac{\tau^{(x)}}{\gamma} \frac{\beta_o L}{f_o}, \tag{5.12.14}$$

式中 $\tau^{(x)}$ 是 τ 的 x 分量。注意，略去 $O(\beta_o L/f_o)$项时，(5.12.14) 式将化为（5.3.2）式。因为总的向北输送是地转输送与艾克曼输送之和，如果利用（5.12.6），则有

$$M_S{}^{(y)} = v_I + M_E^{(y)} = curl\tau. \tag{5.12.15}$$

$M_S^{(y)}$ 是总的向北的斯维尔德鲁普输送，且在保留 $O(\beta_o L/f_o)$ 项时，仍然由风应力旋度给出。从（5.12.9）式和（5.12.13）式可得

$$p_I = -\int_x^{X_E} \gamma^2 curl \frac{\tau}{\gamma} dx' + P(y), \tag{5.12.16}$$

式中$P(y)$ 是任意的，X_E 是东边界的位置。因此向东的地转速度为

$$u_I = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial y} \int_x^{X_E} \gamma^2 curl \frac{\tau}{\gamma} dx' - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial P(y)}{\partial y}. \tag{5.12.17}$$

和以前一样，向东的地转速度含有一个纬度的任意函数，即包含沿地转等值线的纯纬向运动。但应注意，x 方向上的艾曼克输送

$$M_E^{(x)} = \frac{\beta_o L}{f_o} \frac{\tau^{(y)}}{\gamma}(x,y),$$

完全用风应力 y 分量的局部值确定。为了确定 $P(y)$，必须研究冲向东边界的艾克曼通量之去向。考虑图 5.12.1 的情况，深度为 $E_V{}^{1/2}$ 的上层艾克曼通量 $M_E^{(x)}$ 冲向边界，按照艾克曼理论，若沿海岸方向的风应力 $\tau^{(y)}(X_E, y)$ 不为零，则该通量在那里也不为零。但不管怎么

说，上艾克曼层中的实际输送在 $x=X_E$ 处必须为零。显然在靠近海岸的某个小区域内，那些在艾克曼层中其他地方忽略不计的力，在这里必引起（5.12.6）式失效。方程（5.12.3 a,b）中唯一能局部增加量值，从而改变上层平衡的项是水平摩擦项，而且仅当各 x 导数量级为 $E_H^{1/2}$ 时，上述水平摩擦项才能在艾克曼层中与垂直摩擦项具有同量阶。这引导我们去考察深度为 $E_V^{1/2}$ 和宽度为 $E_H^{1/2}$ 的角区。为了考察该区，我们引入边界层坐标：

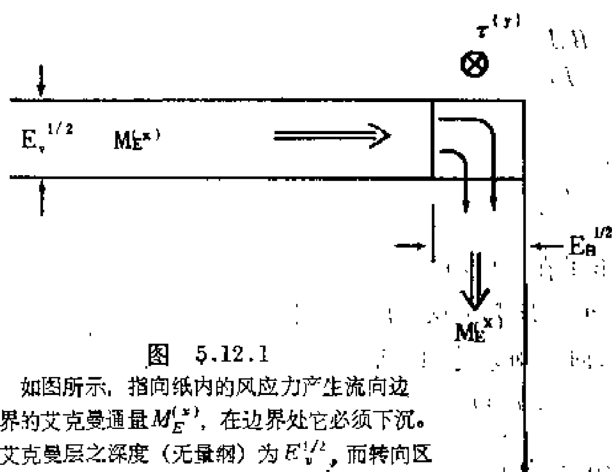


图 5.12.1
如图所示，指向纸内的风应力产生流向边界的艾克曼通量$M_E^{(x)}$，在边界处它必须下沉。艾克曼层之深度（无量纲）为$E_V^{1/2}$，而转向区的宽度为$E_H^{1/2}$。

$$\zeta=\frac{1-z}{E_V^{1/2}},\qquad \xi=\frac{X_E-x}{E_H^{1/2}},\tag{5.12.18}$$

而且把每个动力学变量表示为它的内区量与角区修正量之和——即在角区内

$$\begin{aligned}
u&=u_I(x,y)+u_c(\xi,y,\zeta)E_V^{-1/2},\\
v&=v_I(x,y)+v_c(\xi,y,\zeta)E_V^{-1/2},\\
w&=w_I(x,y)+w_c(\xi,y,\zeta)E_H^{-1/2},\\
p&=p_I(x,y)+p_c(\xi,y,\zeta)\delta^2\left(\frac{E_V}{E_H}\right)^{1/2}.
\end{aligned}\tag{5.12.19}$$

修正函数的大小由下述要素来确定：角区中的水平输送应当和艾克曼输送的量级相同，即 $uE_V^{1/2}=O(1)$，由此得到在角区中 u 和 v 的量级是$O(E_V^{-1/2})$。w_c 的尺度分析由质量守恒得出，即若流向岸边的输送将在角区转向下方的话，$wE_H^{1/2}$ 的量级一定是 $O(1)$，同时 p_I 修正量的尺度由（5.12.3c）式确定，因 w 的尺度已定。如果把（5.12.19）式代入（5.12.3）式，而且只保留$O(1)$项，则在使用内区变量之关系（5.12.9 a,b,c）以后，我们得到 u_c、v_c和 w_c 的方程式，即

$$-\hat{f}v_c=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2u_c}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2u_c}{\partial\zeta^2}\right),\tag{5.12.20a}$$

$$\hat{f}u_c=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2v_c}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2v_c}{\partial\zeta^2}\right),\tag{5.12.20b}$$

$$\frac{\partial w_c}{\partial\zeta}+\frac{\partial u_c}{\partial\xi}=0.\tag{5.12.20c}$$

在上表面处，流体的应力必须和（4.10.2）式表示的外加应力匹配，用无量纲单位表示，该条件变为

$$\frac{\partial u_c}{\partial\xi}=-2\frac{\beta_0L}{f_0}\tau^{(x)},\tag{5.12.21a}$$

$$\frac{\partial v_c}{\partial\xi}=-2\frac{\beta_0L}{f_0}\tau^{(y)},\tag{5.12.21b}$$

而在角应力区以下的深度上，$\partial u_c/\partial\xi$ 和 $\partial u_c/\partial\xi$ 必须为零。把（5.12.20 a,b,c）式从$\zeta=0$到

$\zeta=\infty$ 积分得

$$-\tilde{f}V_c=\frac{1}{2}\ \frac{\partial^2 U_c}{\partial\xi^2}-\frac{\beta_o L}{f_o}\tau^{(x)}, \tag{5.12.22a}$$

$$\tilde{f}U_c=\frac{1}{2}\ \frac{\partial^2 V_c}{\partial\xi^2}-\frac{\beta_o L}{f_o}\tau^{(y)}, \tag{5.12.22b}$$

式中

$$\begin{bmatrix} U_c \\ V_c \end{bmatrix}=\int_0^\infty d\zeta \begin{bmatrix} u_c \\ V_c \end{bmatrix}. \tag{5.12.23}$$

U_c 和V_c 是角区中的垂直积分速度。由于在该区中 $dz=-d\zeta\, E_V{}^{1/2}$，而 u 和 v 在最低阶上由$u_c E_V^{1/2}$ 和 $v_c E_V^{1/2}$ 给出，故可得出 u_c 和 v_c 是上艾克曼层中的水平输送。方程组 (5.12.22a,b) 是该输送的常微分方程组。根据法向运动条件和无滑动条件，在 $x=X_E$ (即$\xi=0$)处U_c 和 V_c 必须为零，故立即可求出 (5.12.22a,b) 的解：

$$U_c=-\frac{\beta_o L}{f_o}\ \frac{\tau^{(y)}}{\tilde{f}}+\frac{\beta_o L}{f_o}e^{-\tilde{f}^{1/2}\xi}\left[\frac{\tau^{(y)}}{\tilde{f}}\cos\tilde{f}^{1/2}\xi+\frac{-\tau^{(x)}}{\tilde{f}}\sin\tilde{f}^{1/2}\xi\right],$$

$$V_c=\frac{\beta_o L}{f_o}\ \frac{\tau^{(x)}}{\tilde{f}}+\frac{\beta_o L}{f_o}e^{-\tilde{f}^{1/2}\xi}\left[-\frac{\tau^{(y)}}{\tilde{f}}\sin\tilde{f}^{1/2}\xi+\frac{-\tau^{(x)}}{\tilde{f}}\cos\tilde{f}^{1/2}\xi\right]. \tag{5.12.24}$$

注意，对于很大的 ξ，U_c 和V_c象所要求的那样，化为和 (5.12.6) 式一致的艾克曼输送。(5.12.20c) 的积分给出被迫从角区流出、并抽入其下方的流体垂直速度，即

$$-w_c(\xi,y,\infty)=-\frac{\partial U_c}{\partial\xi}(\xi,y)=\frac{\beta L}{f_o}\ \tilde{f}^{1/2}e^{-\tilde{f}^{1/2}\xi}\left\{\frac{\tau^{(y)}}{\tilde{f}}[\cos\tilde{f}^{1/2}\xi\right.$$

$$\left.+\sin\tilde{f}^{1/2}\xi]+\frac{\tau^{(x)}}{\tilde{f}}[\cos\tilde{f}^{1/2}\xi-\sin\tilde{f}^{1/2}\xi]\right\} \tag{5.12.25a}$$

向下的总质量为

$$-\int_0^\infty w_c(\xi,y,\infty)d\xi=\frac{\beta L}{f_o}\ \frac{\tau^{(y)}}{\tilde{f}}(x,y). \tag{5.12.25b}$$

这正是流向海岸的向东的艾克曼输送，角区流动使艾克曼通量转向下方，并进入角区以下的沿岸层中。在如图 5.12.2 所示的这个沿岸层中，动力学变量是 x 的速变函数，但为了和内区匹配，它们在 $O(1)$ 的深度尺度上随 z 变化。故在 (5.12.3 a,b,c) 式中的主要项是

$$-\tilde{f}v_B=-\frac{\partial p_B}{\partial x}+\frac{E_H}{2}\ \frac{\partial^2 u_B}{\partial x^2}, \tag{5.12.26a}$$

$$\tilde{f}u_B=-\frac{\partial p_B}{\partial y}+\frac{E_H}{2}\ \frac{\partial^2 v_B}{\partial x^2}, \tag{5.12.26b}$$

$$0=-\frac{\partial p_B}{\partial z}+\delta^2\frac{E_H}{2}\ \frac{\partial^2 w_B}{\partial x^2}, \tag{5.12.26c}$$

式中下标 B 指沿岸层的变量，沿岸层的宽度现在必须加以确定。带下标 B 的变量必须连续地变得和内区运动变量一样，后者与 z 无关。我们暂时假设 u_B 和 v_B 也与 z 无关，并在以后检验这一假设的正确性。若 u_B 和 v_B 与z 无关，则从 (5.12.26 a,b) 中消去 p_B 得到

$$\frac{\beta_o L}{f_o} v_B = \tilde{f} \frac{\partial w_B}{\partial z} + \frac{E_H}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial v_B}{\partial x} - \frac{\partial u_B}{\partial y}\right). \tag{5.12.27}$$

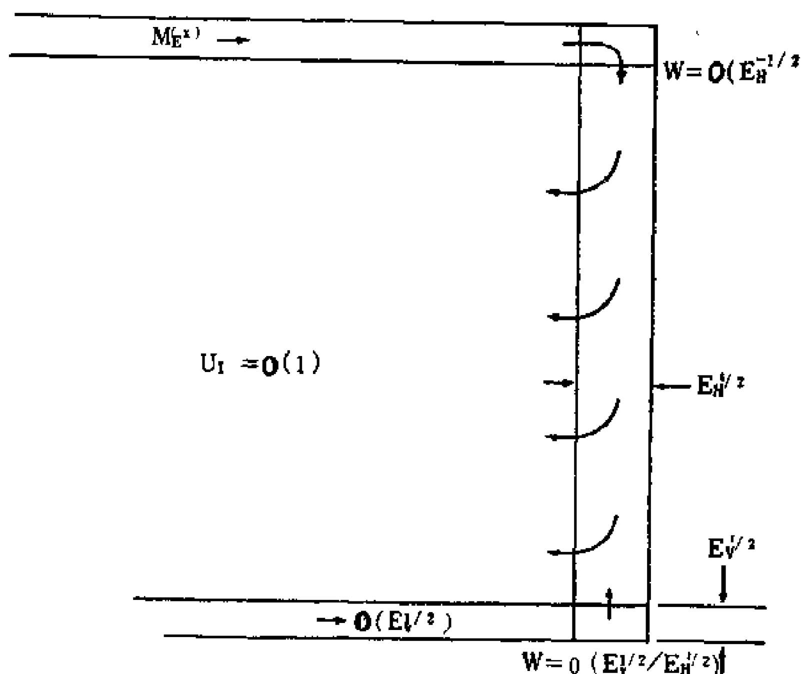


图5.12.2 东边界处垂直环流的示意图。上艾克曼层通量在侧边界层中下沉，并作为纬向地转流由边界层进入内区。

其垂直积分为

$$\frac{\beta_o L}{f_o} v_B = \tilde{f}\left[w_B(x,y,1) - w_B(x,y,o)\right] + \frac{E_H}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial v_B}{\partial x} - \frac{\partial u_B}{\partial y}\right). \tag{5.12.28}$$

在 $z=1$ 处，w_B 由 (5.12.19) 式和 (5.12.25) 式给出，即

$$w_B(x,y,1) = E_H^{-1/2} \frac{\beta_o L}{f_o} \tilde{f}^{1/2} exp(-\tilde{f}^{1/2}\xi)\left\{-\frac{\tau^{(y)}}{\tilde{f}}[\cos \tilde{f}^{1/2}\xi + \sin \tilde{f}^{1/2}\xi] + \frac{\tau^{(x)}}{\tilde{f}}[\sin \tilde{f}^{1/2}\xi - \cos \tilde{f}^{1/2}\xi]\right\}. \tag{5.12.29}$$

另一方面，因内区速度是 $O(1)$，下层中流向岸边的艾克曼输送的量级只是 $O(E_V{}^{1/2})$，所以如图 5.12.2 所示，从下角区吸入沿岸层的垂直速度是 $O(E_V^{1/2}/E_H^{1/2})$，因而与 $w_B(x,y,1)$ 相比是微不足道的，可以忽略不计。其次，在沿岸层，u_B 和 v_B 是 $O(1)$，以便与内区速度匹配，故 $\partial u_B/\partial y$ 同 $\partial v_B/\partial x$ 相比可以略去。于是方程 (5.12.28) 变成一个受非齐次项 $w_B(x,y,1)$ 强迫的 v_B 的常微分方程。

因为强迫项的 x 尺度之量级为 $O(E_H^{1/2})$，所以 v_B 的解也在该尺度上变化。于是比值为

$$\frac{v_B \beta_o L/f_o}{(E_H/2)(\partial^3 v_B/\partial x^3)} = O\,(E_H^{1/2}) \ll 1, \tag{5.12.30}$$

从而 (5.12.28) 式化简为

$$\frac{\partial^3 v_B}{\partial \xi^3} = -E_H^{3/2}\ \frac{\partial^3 v_B}{\partial x^3} = \tilde{f}^{3/2}\,\frac{2\beta_o L}{f_o}\Big\{-\frac{\tau^{(y)}}{\tilde{f}}[\cos \tilde{f}^{1/2}\xi + \sin \tilde{f}^{1/2}\xi]$$

$$+\frac{\tau^{(x)}}{\tilde{f}}[\sin \tilde{f}^{1/2}\xi - \cos \tilde{f}^{1/2}\xi]\ \Big\}e^{-\tilde{f}^{1/2}\xi}, \tag{5.12.31}$$

由于 $\partial^2 v_B/\partial\xi^2$ 在 ξ 很大时必须为零，所以上式的首次积分是

$$\frac{\partial^2 v_B}{\partial \xi^2} = 2\frac{\beta_o L}{f_o}\{\tau^{(y)}[\cos \tilde{f}^{1/2}\xi] - \tau^{(x)}[\sin \tilde{f}^{1/2}\xi]\}e^{-\tilde{f}^{1/2}\xi}, \tag{5.12.32}$$

式中 v_B 是 x（而不是 ξ）的函数，但从（5.12.26b）式有

$$u_B = -\frac{\partial p_B}{\partial y} + \frac{1}{2}\ \frac{\partial^2 v_B}{\partial \xi^2}. \tag{5.12.33}$$

既然在 $x = X_E$（即 $\xi = 0$）处 u_B 必为零，故

$$\left(\frac{\partial p_B}{\partial y}\right)_{\xi=0} = \frac{\beta_o L}{f_o}\tau^{(y)}(X_E, y). \tag{5.12.34}$$

然而 u_B、v_B 和 p_B 仍是 $O(1)$，所以（5.12.26a）意味着，精确到 $O(E_H^{1/2})$ 时有

$$\frac{\partial p_B}{\partial \xi} = 0. \tag{5.12.35}$$

因此，根据匹配原则，边界层中的压力等于紧邻沿岸边界层外侧的地转运动之压力。本章前几节的结果已证明，在大洋东边界上，不可能存在对内区向岸纬向运动有 $O(1)$ 修正的地转边界层。所以紧邻沿岸层外侧的纬向运动，精确到 $O(1)$ 时是内区地转运动。这又意味着利用（5.12.35）式有

$$\left(\frac{\partial p_B}{\partial y}\right)_{\xi=0} = \left(\frac{\partial p_B}{\partial y}\right)_{\xi=\infty} = \frac{\partial p_I}{\partial y}(X_E, y) = \frac{\beta_o L}{f_o}\tau^{(y)}(X_E, y). \tag{5.12.36}$$

这个条件完全确定了（5.12.17）式中的任意纬向运动，这是因为由（5.12.16）式有

$$\frac{1}{\tilde{f}}\ \frac{\partial p_I}{\partial y}(X_E, y) = \frac{\partial p}{\partial y}\ \frac{1}{\tilde{f}} = \frac{\beta_o L}{f_o}\ \frac{\tau^{(y)}}{\tilde{f}}(X_E, y), \tag{5.12.37}$$

或者

$$\boxed{u_I = \frac{1}{\tilde{f}}\ \frac{\partial}{\partial y}\int_x^{X_E} \tilde{f}^2 curl\,\frac{\tau}{\tilde{f}}\,dx' - \frac{\beta_o L}{f_o}\ \frac{\tau^{(y)}}{\tilde{f}}(X_E, y)}. \tag{5.12.38}$$

所以在 $x = X_E$ 处，地转运动仅精确到 $O(1)$才为零，在 $O(\beta_o L/f_o)$ 上必定存在地转运动：

$$u_I(X_E, y) = -\frac{\beta_o L}{f_o}\ \frac{\tau^{(y)}}{\tilde{f}}(X_E, y) = -M_E^{(y)}(X_E, y). \tag{5.12.39}$$

这个地转质量通量在岸边与表层艾克曼层质量通量大小相等而方向相反，所以总输送——即地转输送与艾克曼输送之和——在$x = X_E$ 处为零。经过少量的运算之后，(5.12.38) 式可改写为

$$u_I = \frac{\partial}{\partial y}\int_x^{X_E} curl\ \tau\ dx' - \frac{\beta_o L}{f_o}\ \frac{\tau^{(y)}(x, y)}{\tilde{f}}. \tag{5.12.40}$$

在大洋西边界上，上角区的分析和东边界的情况完全一样。流向岸边的艾克曼通量，也向

下沉入宽度为 $E_H^{1/2}$ 的层中并进入地转内区。考虑图 5.12.3 的情况，在那里西边界处的艾克曼通

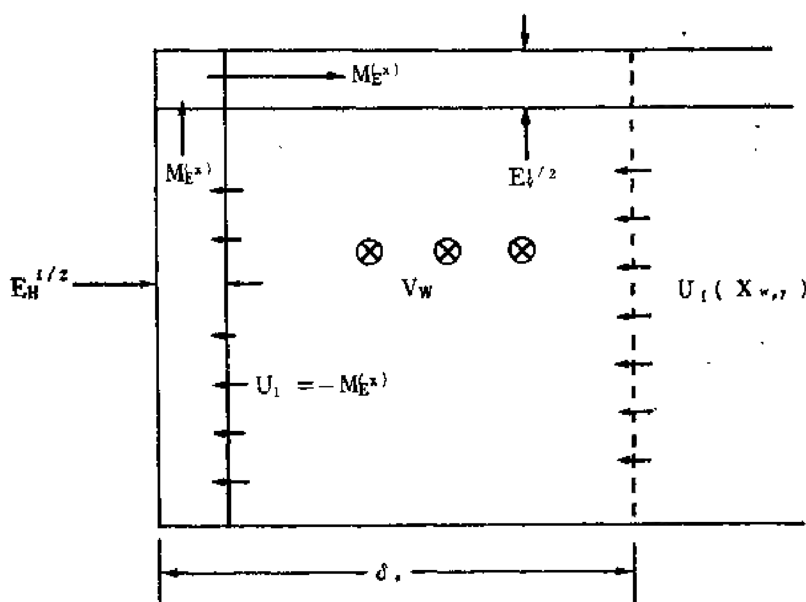


图5.12.3　西边界附近环流示意图。

风生质量通量 $M_E^{(x)}$ 是离岸的，并被宽度为 $E_H^{1/2}$ 的上升层中的垂直运动所补偿。内区运动是 $U_I(X_W, y)$ $\cdot U_I(X_W, Y)$ 和 $M_E^{(x)}$ 之差代表在宽度为 δ_* 的西边界流中必须侧向偏转并向北运动的输送量。

量是向东的。该通量在角区中的上升，要求在 $x = X_W$ 处有地转的流体通量进入上升层，所以在 $x = X_W$ 处的地转速度为

$$u(X_W, y) = -M_E^{(x)}(X_W, y) = -\frac{\beta_0 L}{f_0}\frac{\tau^{(y)}(X_W, y)}{f}. \tag{5.12.41}$$

但是 (5.12.40) 式说明在 $x = X_W$ 处，

$$u_I(X_W, y) = \frac{\partial}{\partial y}\int_{X_W}^{X_E} curl\tau\ dx' - \frac{\beta_0 L}{f_0}\frac{\tau^{(y)}(X_W y)}{f}, \tag{5,12,42}$$

因而在 X_W 处内区地转运动的数值与必须假定进入上升层的地转运动数值所相差的量是

$$u_I(X_W, y) - u(X_W, y) = \frac{\partial}{\partial y}\int_{X_W}^{X_E} curl\tau\ dx'. \tag{5.12.43}$$

因此，这一质量通量必须被类似于西部湾流的 β 层所吸收并转向北流。至于该层究竟是蒙克层、斯多美尔层、还是惯性层，则基本上无关紧要。β 层是水平无辐散的，故其向东和向北的速度满足：

$$\frac{\partial v_W}{\partial y} = -\frac{\partial u_W}{\partial x}, \tag{5.12.44}$$

式中下标 w 指西边界层中的运动。对该层积分可得：

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_{X_W}^{X_W+\delta_*} v_W dx' = u_W(X_W, y) - u_W(X_W+\delta_*, y) = -\frac{\partial}{\partial y}\int_{X_W}^{X_E} curl\tau\ dx', \tag{5.12.45}$$

或

$$\int_{X_W}^{X_W+\delta_*} v_W dx' = -\int_{X_W}^{X_E} curl\tau\ dx', \tag{5.12.46}$$

式中已令积分常数为零，从而使总的向南输送（即斯维尔德鲁普输送和边界层输送之和）达到平衡。注意，西边界流的输送与以前的结果不一样，它只取决于风应力旋度，且与（5.12.15）式给出的内区总的斯维尔德鲁普输送平衡。

在继续进行讨论之前，我们必须简要地推导并验证 u_B 和 v_B 是否确实满足与 z 无关的假设。在（5.12.26a）和（5.12.26c）之间消去 p_B 得

$$\hat{f}\frac{\partial v_B}{\partial z}+\frac{E_H}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial u_B}{\partial z}=\delta^2\frac{E_H}{2}\frac{\partial^3 w_B}{\partial x^3}, \tag{5.12.47}$$

因 w_B 是 $O(E_H^{-1/2})$，而在沿岸上升层中 $\frac{\partial}{\partial x}$ 也是 $O(E_H^{-1/2})$，故若

$$\delta^2 \ll E_H,$$

或用有量纲的单位表示，若

$$\frac{D}{\delta_u}\ll 1, \tag{5.12.48}$$

式中 δ_u 是沿岸上升层的宽度：

$$\delta_u=LE_H^{1/2}=\left(\frac{2A_H}{f_o}\right)^{1/2}, \tag{5.12.49}$$

则量级为 $O(1)$ 的 u_B 和 v_B 可以认为与 z 无关。如果运动的垂直尺度与水平尺度之比为小量的话，那末条件。(5.12.48) 就是保证静力近似成立的那个条件。

为了说明上述结果，考虑以下的例子。首先设风应力为

$$\boldsymbol{\tau}=\tau^{(y)}(y)\mathbf{j},\quad \tau^{(y)}(y)>0, \tag{5.12.50}$$

即风应力严格向北且与经度无关。于是 $curl\ \boldsymbol{\tau}$ 和 $curl\ \boldsymbol{\tau}/f$ 都恒等于零。没有净输送，即内区地转输送与艾克曼输送之和恒等于零，且内区中无垂直运动：艾克曼输送是无辐散的。上艾克曼层中的艾克曼通量 $(\beta_o L/f_o)\tau^{(y)}/\hat{f}$ 指向东。它流向东边界，然后在那里下沉并向西转入地转的内区，根据（5.12.40）式，u_I 在内区只是 $-(\beta_o L/f_o)\tau^{(y)}/\hat{f}$。这一地转运动完全被吸收到西边界的上升层中，流体元在那里上升并在 $x=X_w$ 处进入艾克曼层。由于 $curl\ \boldsymbol{\tau}$ 是零，故本例不存在 β 层，并且整个通量回路局限于 xz 平面，也不出现西部强化，这是因为西部强化要求 $curl\ \boldsymbol{\tau}\neq 0$。

作为第二个例子，我们考虑风应力

$$\boldsymbol{\tau}=A(x)\hat{f}\mathbf{i},\qquad A>0. \tag{5.12.51}$$

在此情况下，风应力是纬向的，且由（5.12.13）式得 v_I 为零。根据（5.12.15）式，斯维尔德鲁普输送由向北的艾克曼输送给出，

$$M_S^{(y)}=M_E^{(y)}=curl\,\tau=-\frac{\tau^{(x)}(x)}{\hat{f}}\frac{\beta_o L}{f_o}=-A(x)\frac{\beta_o L}{f_o}. \tag{5.12.52}$$

所以在西边界流以外的区域，经向输送局限于上艾克曼层。但根据（5.12.46）式，这一质量通量应与伸展到洋底的西边界地转流相平衡。

因为 $\beta_o L/f_o$ 是小量，上述环流一般弱于风应力旋度产生的环流和 5.3—5.10 节讨论过的环流。然而，为了了解始于艾克曼通量的质量循环是如何闭合的，则需要考虑这些环流和上升层。必须记住，在有上升和下沉发生时，垂直于边界的地转速度不必为零，但垂直于边界的地转速度必须与向岸的艾克曼输送相平衡，以使边界处总的向岸输送为零。

5.13 洋底地形的影响

当大洋底不平坦时，(5.9.1) 式指出行星涡度梯度必须由与洋底起伏有关的环境位涡 η_B 来补充。地转运动等值线，即环境位涡等值线，先前是 y 为常数的线，而现在变成与曲线

$$B(x,y)=\beta y+\eta_B=\text{常数} \tag{5.13.1}$$

相合，这是 f/H 的等值线，其中 H 是变化的环境流体深度。

由 (5.2.22) 式，斯维尔德鲁普内区方程变为

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}\left(\beta+\frac{\partial\eta_B}{\partial y}\right)-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\eta_B}{\partial x}=\beta curl\tau, \tag{5.13.2}$$

或

$$\nabla\psi\cdot[\nabla B\times\mathbf{k}]=\beta curl\tau. \tag{5.13.3}$$

所以它是穿越环境位涡 B 的等值线的运动，而这种运动由风应力旋度所确定。

引入新的自然坐标

$$\begin{aligned}\theta&=\theta(x,y),\\ s&=s(x,y),\end{aligned} \tag{5.13.4}$$

或等价地

$$\begin{aligned}x&=x(\theta,s),\\ y&=y(\theta,s),\end{aligned} \tag{5.13.5}$$

式中

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\right)_s&=1+\beta^{-1}\frac{\partial\eta_B}{\partial y}=\beta^{-1}\frac{\partial B}{\partial y},\\ \left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)_s&=-\beta^{-1}\frac{\partial\eta_B}{\partial x}=-\beta^{-1}\frac{\partial B}{\partial x}.\end{aligned} \tag{5.13.6}$$

于是

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_s=\left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)_s\Big/\left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\right)_s=-\frac{\partial B}{\partial x}\Big/\frac{\partial B}{\partial y}=\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_B, \tag{5.13.7}$$

所以如图 5.13.1 所示，在 xy 平面内，s 的等值线与 B 的等值线重合，而 (5.13.6)式确定了 xy 和 θ 之间的关系，用 θ 与 s 表示的斯维尔德鲁普关系是

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)_s=curl\tau\equiv T(\theta,s), \tag{5.13.8}$$

这是因为 $curl\tau$ 可以用 x 和 y 表示，也可以用 θ 和 s 表示。积分 (5.13.8) 式得到

$$\psi(\theta,s)=\int T(\theta',s)d\theta'+\psi_0(s), \tag{5.13.9}$$

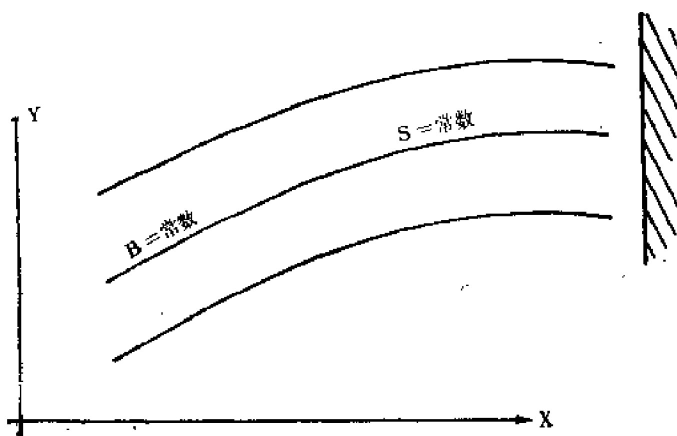


图5.13.1 由B＝常数给出的 f/H 的等值线。自然坐标 s 在 B 的等值线上为常数，假定 B 的等值线与大洋东边界相交。

其中 $\psi_0(s)$ 表示沿 B 的等值线，即沿 f/H 的等值线来确定的地转运动。如果 η_B 为零，那末把 x 相当于 s，把 y 相当于 θ，就又恢复到平底大洋模式了。为了确定 $\psi_0(s)$，必须考察地转等值线和东边界相交的 $x=X_E$ 处的边界层。我们把注意力放在象斯多美尔模式这样的最简单的模式上，底摩擦在这种模式的边界层动力学中起主要作用。在（5.2.25）式中，只保留底摩擦项可以得到

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}\left(1+\frac{1}{\beta}\frac{\partial\eta_B}{\partial y}\right)-\frac{1}{\beta}\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\eta_B}{\partial x}=curl\tau-\frac{\delta_s}{L}\nabla^2\psi. \tag{5.13.10}$$

在大洋东边界处令

$$\psi=\psi_B=\psi_I(x,y)+\tilde{\psi}_B(\xi,y). \tag{5.13.11}$$

式中

$$\xi=\frac{L(X_E-x)}{\delta_s}.$$

于是精确到 $O(\delta_S/L)$ 有

$$\frac{\partial^2\tilde{\psi}_B}{\partial\xi^2}-\frac{\partial\tilde{\psi}_B}{\partial\xi}\frac{\partial B}{\partial y}(X_E,y)=0, \tag{5.13.12}$$

所以只有当 $\partial B/\partial y<0$，即仅当地形斜坡陡到使环境位涡梯度与平底情况的值反号的程度，大洋东边才会有边界层。否则 ψ_I 在大洋东边界上必须满足法向速度为零的条件。而西边界处的类似分析表明，若 $\partial B/\partial y>0$，则与以前一样，西边界流可能存在，且出现西部强化。因此若 $\partial B/\partial y(X_E,y)>0$，则

$$\psi_I=\int_{\theta_E(X_E,s)}^{\theta}\mathrm{T}(\theta',s)d\theta', \tag{5.13.13}$$

式中 $\theta_E(X_E,s)$ 是与边界 $x=X_E$ 相交的 B 的每条等值线上的 θ 值。

例如考虑下述情况

$$\eta_B=\eta_0e^{-\alpha(x-X_W)}, \tag{5.13.14}$$

此时，

$$B(x,y)=\beta y+\eta_0e^{-\alpha(x-X_W)}. \tag{5.13.15}$$

这个大洋模式在接近西边界处均匀地变浅。方程组（5.13.6）变为

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)_s=1, \tag{5.13.16a}$$

$$\left(\frac{dy}{d\theta}\right)_s=+\frac{\alpha\eta_0}{\beta}e^{-\alpha(x-X_W)}. \tag{5.13.16b}$$

（5.13.16a）式可以直接积分得到

$$x=\theta+x_0(s), \tag{5.13.17a}$$

这使得（5.13.16b）也可以积分

$$y=-\frac{\eta_0}{\beta}e^{-\alpha(\theta+x_0(s)-X_W)}+y_0(s). \tag{5.13.17b}$$

为方便起见，在西边界上选 θ 为零，从而 $x_0(s)=X_W$。因为根据(5.13.17b)式，$y_0(s)$ 是任意函数，它只是在 B 的等值线上必须为常数：

$$y_0(s)=y+\frac{\eta_0}{\beta}e^{-\alpha(x-X_W)}=\frac{B}{\beta}, \tag{5.13.18}$$

所以可把变量 s 直接定义为

$$s=y+\frac{\eta_0}{\beta}e^{-\alpha(x-X_W)}, \tag{5.13.19}$$

而

$$\theta=(x-X_W). \tag{5.13.20}$$

考虑旋度为

$$curl\tau=y^2-l^2 \tag{5.13.21}$$

的风应力，即旋度处处为负，而在 $y=\pm l$ 上为零的风应力。因为

$$y=s-\frac{\eta_0}{\beta}e^{-\alpha\theta}, \tag{5.13.22}$$

故 (5.13.13) 式变为

$$\psi_I=\int_{X_E-X_W}^{\theta}\left[s^2-2\frac{s\eta_0}{\beta}e^{-\alpha\theta'}+\frac{\eta_0^2}{\beta^2}e^{-2\alpha\theta'}-l^2\right]d\theta' \tag{5.13.23}$$

或

$$\psi_I=(s^2-l^2)\left\{\theta-[X_E-X_W]\right\}+2\frac{s\eta_0}{\beta\alpha}\{e^{-\alpha\theta}-e^{-\alpha(X_E-X_W)}\}$$

$$-\frac{\eta_0^2}{\beta^2 2\alpha}\{e^{-2\alpha\theta}-e^{-2\alpha(X_E-X_W)}\}, \tag{5.13.24}$$

或用 (5.13.19) 和 (5.13.20) 式有

$$\psi_I=(x-X_E)\left\{\left[y+\frac{\eta_0}{\beta}e^{-\alpha(x-X_W)}\right]^2-l^2\right\}+2\frac{\eta_0}{\alpha\beta}\left\{y+\frac{\eta_0}{\beta}e^{-\alpha(x-X_W)}\right\}$$

$$\times\{e^{-\alpha(x-X_W)}-e^{-\alpha(X_E-X_W)}\}-\frac{\eta_0^2}{2\alpha\beta^2}\{e^{-2\alpha(x-X_W)}-e^{-2\alpha(X_E-X_W)}\}. \tag{5.13.25}$$

若 η_0 为零，即对平坦洋底则有

$$\psi_I=(x-X_E)(y^2-l^2), \tag{5.13.26}$$

而若 $\alpha(X_E-X_W)\gg 1$，则

$$\psi_I\approx(x-X_E)\left\{\frac{B^2(x,y)}{\beta^2}-l^2\right\}+\frac{2\eta_0}{\alpha\beta}B(x,y)e^{-\alpha X}-\frac{\eta_0^2}{2\alpha\beta^2}e^{-2\alpha X}, \tag{5.13.27}$$

式中

$$X=(x-X_W). \tag{5.13.28}$$

任意 y 处总的向南的内区质量通量必须由西边界流补偿，其值为

$$\psi_I(X_W,y)=\left(l^2-\frac{B^2(o,y)}{\beta^2}\right)(X_E-X_W)+\frac{2\eta_0}{\alpha\beta}B(0,y)-\frac{\eta_0^2}{2\alpha\beta^2}.$$

所以精确到$O(\alpha[X_W-X_E])$，地形的存在使总的向南输送改变的量值为

$$\psi_I(X_W,y)-(X_W-X_E)(y^2-l^2)=(X_W-X_E)\left[\frac{B^2(0,y)}{\beta^2}-y^2\right]$$

$$=(X_W-X_E)\left[2y\frac{\eta_0}{\beta}+\frac{\eta_0^2}{\beta^2}\right].\tag{5.13.29}$$

这个例子表明,洋中地形可以显著地改变总的斯维尔德鲁普输送,从而改变西边界流的输送。

一般而言，虽然地形使平底大洋模式的流线型改观，但基本的动力学考虑是一样的：只要把行星涡度梯度的作用直接推广到包括洋底坡度的位涡梯度的情形即可。

5.14 对均质模式的总结

大洋环流的均质模式,从物理上说是很粗糙的,事先并没想用它来预测环流的垂直结构，环流的垂直结构是地转的，完全取决于水平密度梯度。其次，该模式有意地排除了作为大尺度运动能源的外表面加热。在西边界附近的非线性运动状况中，由风和加热产生的运动肯定不能相互分离并线性地迭加在一起。最后，没有层结也意味着没有有效位能，而有效位能是第七章中所描述的那种波状涡旋运动发展所需要的。这些波动通过热量和动量的调整输送，可以对平均运动结构产生显著影响，而且目前还完全不清楚它们是否可以借助简单的湍流混合系数来参数化。

尽管如此，均质模式仍然十分成功地给出了大洋环流的总图像。特别是它对西部强化作了简明的物理解释。这个理论的关键概念，即风应力旋度、行星涡度梯度、及经向边界的存在，起了如此明显而重要的作用，以至于使模式的定性预测之成功大大胜过了其缺陷，这些缺陷与为了完整地提出问题而作的各种假定的细节特征有关。大尺度的海洋与大气运动的动力学研究之特点是，为了得出有关现象的可靠的定性图像，需要仔细而完善地分析物理意义简明而又理想化的模式。

5.15 大洋环流的数值模式*

在 5.11 节中曾简单介绍了大洋均质模式的数值试验。由于近年来用数值模拟方法研究大洋环流问题有了迅速的进展，本节将进一步概述这一方面的问题。

大洋环流的数值模式可以定义为两大类：机制模式（mechanistic model）和模拟模式。（simulation model)。在机制模式中，几何形状设计得尽量简单，而且在模式方程中不考虑那些对研究之课题不太重要的项。可以用这样的模式来考察非线性项或洋底地形对环流影响的重要性。模拟模式主要用来重现实际的大洋环流，以便与海洋观测作比较。在这种模式中需要考虑大洋区域的实际几何形状，以及所有可能的驱动因子和方程中的所有项。模拟模式产生的资料很多，也许难以弄清哪种动力学因子是重要的，而且需要对模式输出作大量的分析。这两类数值模式对于加深我们对大洋环流的理解来说，都是重要的。机制模式易于给出物理解释，有助于我们理解大洋环流动力学的特定性质。另一方面，模拟模式使我们能直接与自然界作比较，这对证实大洋模式的确代表实际自然界、以及证实机制模式（它是模拟模式之基础）能引导我们理解实际现象的动力学性质来说，都是很重要的。

在此不拟详细地讨论数值方法。但是，因为许多读者可能不太熟悉这种方法，所以下面仅对最常使用的方法作一概述，然后介绍两种大洋模式及其主要结果。

5.15.1. **数值方法** 数值模式，尤其是模拟模式，最常使用的方法是有限差分方法。

---

* 本节摘译自 S. Pond 和 G. Pickard《Introductory Dynamic Oceanography》, Pergmon Press. 1978.

在此方法中，不是寻求能给出任意位置上在某时刻的速度之方程，而是寻求格点上的数值。例如，研究对整个水柱垂直平均的变量时，可以假定流场在垂直方向上没有变化，此时可采用一个二维网格。如果我们研究的流动在空间各个方向上均有变化，则需要用三维网格。同样我们也计算在离散时刻 t_1、t_2……t_n 的值，而不是计算随时间连续的值。

为了根据运动方程由前一时刻的值来计算新时刻的值，我们必须计算物理量的空间梯度。例如，我们欲确定点 x_j 处的 $\partial u/\partial x$，可以用 $(u_j-u_{j-1})/\Delta x$ 来值近该值，其中 Δx 是 x 方向上的格距，u_j 是在 x_j 点处的 u 值，u_{j-1} 是在 x_{j-1} 处的值，这叫向后差（分）。我们也可以使用向前差 $(u_{j+1}-u_j)/\Delta x$．x_j 附近的泰勒级数展开式给出

$$u_{j+1}-u_j=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\Delta x)^2+\frac{1}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\Delta x)^3+\frac{1}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\Delta x)^4+O(\Delta x)^5,$$

$$u_j-u_{j-1}=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\Delta x)^2+\frac{1}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\Delta x)^3-\frac{1}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\Delta x)^4+O(\Delta x)^5,$$

式中的导数是在 x_j 处计算的，而 $O(a)^n$ 指该项是有限数乘以 a^n，称为"a^n 阶"。在 $\partial u/\partial x$ 的向前差或向后差近似中，梯度误差的最大项都是 $(\partial^2 u/\partial x^2)\cdot\Delta x/2$，它与 Δx 成正比。这种格式称为一阶精确的，因为近似式的误差取决于 Δx 的一次幂。若把上述二方程相加，并除以 $2\Delta x$，则可得到 $\partial u/\partial x$ 的更精确的近似：

$$(u_{j+1}-u_{j-1})/2\cdot\Delta x=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\Delta x)^2+O(\Delta x)^4,$$

此式中最大误差项是 $O(\Delta x)^2$，这种格式称为二阶精确的，也叫中央差，因为它使用了 x_j 两侧格点上的值。下一个高阶项是 $O(\Delta x)^4$，因为 $O(\Delta x)^3$ 项消掉了。如果我们使用 x_{j+2} 和 x_{j-2} 两点处的值，还可得到更高精度的近似。再次用泰勒级数展开式，我们有

$$(u_{j+2}-u_{j-2})/4\Delta x=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{4}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\Delta x)^2+O(\Delta x)^4.$$

所以

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{4}{3}\left[\frac{u_{j+1}-u_{j-1}}{2\Delta x}\right]-\frac{1}{3}\left[\frac{u_{j+2}-u_{j-2}}{4\Delta x}\right]+O(\Delta x)^4$$

是四阶精确的，因为现在已消去了 $\partial^3 u/\partial x^3$ 项。可以如此继续做下去，值计算机程序设计会越来越复杂，而且边界附近的处理也会变得更加复杂。例如，如果我们用四阶中央差格式计算 $\partial u/\partial x$，则紧靠南北向边界附近的两个点，必须作特别处理才行。

用同样的方法也可对 $\partial^2 u/\partial x^2$ 等高阶导数作差分近似。取

$$(u_{j+1}-u_j)-(u_j-u_{j-1})=u_{j+1}+u_{j-1}-2u_j=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\Delta x)^2+O(\Delta x)^4$$

可以得到二阶精确的近似，使用更多的点则可得到更高阶的近似。

知道了计算一阶和二阶空间导数的方法后，我们可以对方程中的时间导数作近似，以便得到模式中的时间演变。最简单的方法是使用向前差近似，用过去一个时间步长的值计算梯度，即 $(u_{n+1}-u_n)/\Delta t=$ 在时刻 $t=n\Delta t$ 的空间导数的函数，其中 Δt 是时间步长。(这里下标表示我们在每一点上计算 u 的时刻，为简单起见，我们省去了表示空间位置的第二个下标)。这样一种格式在 Δt 上是一阶精确的。二阶精确（时间差分误差与 $(\Delta t)^2$ 成正比）的格式，是

蛙跳格式 $(u_{n+1}-u_{n-1})/2\Delta t=$ 在时刻 $t=n\Delta t$ 的空间导数的函数。这种方法比较精确，但在计算机中要包含三个时刻（而不是两个时刻）的贮存值。上述格式中，新时刻的值是用过去时刻的值计算的，这种格式称为显式格式。还可以逐点计算下一时时等长的值。也可以设计这样一种格式，即新时刻的值取决于新时刻的物理量的空间梯度。此时，要写出各点处的方程，且必须同时求解整个线性方程组。这种格式称为隐式格式。因为对一个很大的网格，必须解一个很大的方程组，所以这种格式比显式格式需要更多的计算时间。

运动方程和连续方程可以用多种方法表示为有限差分形式。问题在于，这些不同的数值差分模式是否可以根据其优点加以区别。说得更普遍些，即估价某一种方法的优劣，需要把使用线性运动方程和连续方程的有限差分方程所得到的结果，与已知的简单解析解加以比较。用这种方法得到了几种判据，这些判据对于数值模式能正确模拟海洋现象之能力是很关键的。例如，有线性计算不稳定问题。在直接的显式计算格式中，存在一个时间步长的上限，它取决于空间步长和模式中传播最快的波速 C_{max}，其关系式为 $\Delta t\leqslant\Delta x/C_{max}$。如果超过了这一时间步长，那末在数值计算中，不可避免地存在着的小误差就会迅速增长。隐式方法似乎有较好的计算稳定性，有可能使用大于上述条件所给出的时间步长。然而，如果使用的时间步长过大，那末所得到的隐式解，尽管计算稳定，但可能不是一个真解。

还会出现进一步的问题，即在数值模式中，波动的振幅与速度可能与天然存在的波动显著不同，而且可能引入这种完全由计算格式造成的虚假的振荡。例如，在使用时间中央差分格式时，就会遇到后一种例子。此外，象平流加速度这类非线性项也会引起非线性不稳定。例如，与任何真实物理现象完全无关的、在小尺度上的虚假的能量迅速增长。实际上，过去多年中已建立了许多方案来克服上述数值计算问题。但是必须指出，一种特定的模式只能局限于海洋运动的一定范围，对此范围内的运动，它才能给出令人满意的模拟。

详细地讨论数值模拟的这些问题超出了本书的范围。需要进一步了解有关知识的读者可以阅读专门的文献。数值模拟专题讨论会文集（Reid，1975）可作为一个很好的阅读起点。

5.15.2. **大洋环流数值模拟的一般方法** 把运动方程、连续方程、以及有时用到的热量守恒和盐分守恒方程，都写成有限差分形式。包括非线性项在内的所有项，都可同时结合起来考虑，这确实胜过解析方法。选择某种适宜的二维或三维网格，选定边界条件。例如海面处的风应力、温度和盐度，侧边界上的温度、盐度和速度等。还需给出 $t=0$ 时刻的初始条件。经常假定初始状态为静止状态，即所有点的速度初始都为零。大洋内部的温盐值可以选为均匀分布场，但更常用的情况是预先给定近似于真实海洋的深度分布。然后按时间步长逐步进行计算。这一过程称为时间"积分"。

随着空间分辨率的增加，(即格距的缩小)，必须相应地缩小时间步长，以便保持计算的稳定性，至少对显式方法必须这样做。所以，对二维网格来说，分辨率增加一倍所要求的计算时间大概要增至八倍；在三维问题中，若垂直分层也增加一倍，则计算工作量增至十六倍。因此，容易看出，为什么希望改进模式分辨率的企图，受到计算机的速度和容量之限制。

在非线性模式中，为了使计算稳定，一般要有足够的摩擦耗散项，它们或者编入数值方法中，或者在所用的方程中考虑。当然实际的自然界也是有摩擦的，当运动增强时，摩擦效应也增大，直到供给运动的能量速率与由摩擦耗散之能量速率达到平衡为止。因为能源是有限的，故运动保持有界，但是运动可以很强，随时间和空间的变化可以很大。

为了使方程组闭合，必须补充一些附加方程，把摩擦效应与计算的大尺度速度场联系起

来，把扩散效应与温度场和盐度场的梯度联系起来。上述摩擦和扩散效应是通过网格不能分辨的小尺度运动产生的，其产生方式与湍流类似。这种现象叫次网格尺度现象。为了使方程组闭合，上述次网格尺度效应，通常用简单的方法利用涡动粘滞性和扩散性来参数化。更为普遍的是把它们取为常数值（当然在水平方向和垂直方向上取不同的值）。

涡动粘滞性在某种程度上与格距或模式分辨率有关。如上所述，摩擦必须保持合理值，同时相邻格点间的速度差不能变得过大。因此，如果我们使用较大的格距，则最大速度梯度是有限的。因为摩擦应力取为涡动粘滞系数与速度梯度的乘积，所以当格距增大时，涡动粘滞系数必须相应增加。由于分辨率受到可用的计算机的限制，因此所用的涡动粘滞系数通常大于我们根据有限次观测所推论出来的值。这可以防止非线性项起不适当的作用。

最近在某些大气模式中，采用了可变的涡动粘滞系数，把它取为与计算的流动的应变率均方根成正比（应变率由计算的切变算出）。从物理上看，这种可变的粘滞系数，在切变或速度梯度较大的地方，似乎比不变的粘滞系数更好，并使大气模式得到改善。迄今为止，这种方法在海洋模式中用得还很少（除了下面要讲的 O'*Brien* 的模式以外）。其次，可变涡动粘滞系数与不变的涡动粘滞系数相比，前者似乎对接近网格尺度的运动比对较大尺度的运动有更强的阻尼作用。所以用较低的、更为切合实际的平均粘滞系数值，可以保持计算的稳定，使用可变粘滞系数有助于实现非线性效应的处理。

如上所述，我们设置的边界条件之一是风应力强迫作用。目前由实测风速计算风应力的方法还不太完善，尤其是在风速较大的情况下。在下面所要讨论的模式中，外加风应力一般是根据 Hellerman 所作的计算。他的计算是根据风的气候资料作出的，而且尽可能考虑了局部地区的风速与风向之变化。在这些计算中，Hellerman 所用的计算拖曳系数的公式是阶梯函数的平滑形式，C_D 的值从低风速时的 0.8×10^{-3} 左右迅速而平滑地上升到风速为7米/秒左右时的 2.4×10^{-3}。这种计算可能过高地估计了强风区的应力值，而低估了低风速区的应力值，即低估了大洋循环流中央区域的应力值，在这些区域中，风应力变号，且风应力旋度达到极大值。但是即使在那里，从气候上说，小于 6 ～ 8 米/秒的风速也是不重要的。由于收集气候资料方法上的弱点，也使 Hellerman 的应力值之空间分辨率受到限制。由于这种有限的分辨率，应力梯度或风应力旋度也可能被估计得过低。很难知道上述误差有多大，但是实际的旋度极大值大概不会比 Hellerman 计算的值大 50%。对于大西洋最大风应力旋度区所作的更详细的计算，有较高的空间分辨率，并且使用了较新的拖曳系数值，所得到的最大旋度值与使用类似于 Hellerman 的计算所得到的结果相近。但是，上述计算给出的是长时间的平均值，没有考虑最大旋度位置的季节变化。这样计算所得到的值，可能低于我们根据每天、每周或每月资料算出极大值后再取平均（而不管最大旋度值的纬度）所得到的数值。正是后一种最大旋度值，对于用简化的斯维尔德鲁普关系计算风所引起的最大输送来说可能是最合适的。

5.15.3. **O'Brien 的北太平洋二维风生模式** 我们在此简略地讨论一个数值模拟模式的特点和主要结果，并指出其局限性。

O'*Brien* 的北太平洋二维风生模式是一个相当简单的垂直平均模式，类似于经典的蒙克解析模式，所不同的是，它用了更逼真的几何形状而且考虑了非线性效应。其特点为

（1） 密度场取为均匀的，即模式是正压的；速度与深度无关，把问题简化为二维的。

（2） 模式使用的驱动风应力是 Hellerman 计算的气候平均风应力。

（3） 采用球极坐标系中的运动方程，而不是蒙克所用的β平面近似。

（4） "网格"大小是纬度和经度2°见方。

（5） 大洋深度假定为2,000米，2,000米以上的洋底地形也作了考虑。

（6） 在侧向摩擦的计算中用了可变的涡动粘滞系数。

该模式从静止开始积分。在积分过程中，出现流动并形成一系列的涡旋。这个过程称为"旋转加强"过程。经过一段时间后，出现了相当稳定的环流，但是其上迭加着波动。积分72天以后，质量输送型如图5.15.1所示。图5.15.1(a)给出了西边界处的详细结构，而图5.15.1(b)给出了整个大洋区域中很大尺度的流型。注意该图中流函数的符号规定与通常流体力学的规定相反。在这里，中心处具有正的ψ值的循环流表示顺时针方向环流。

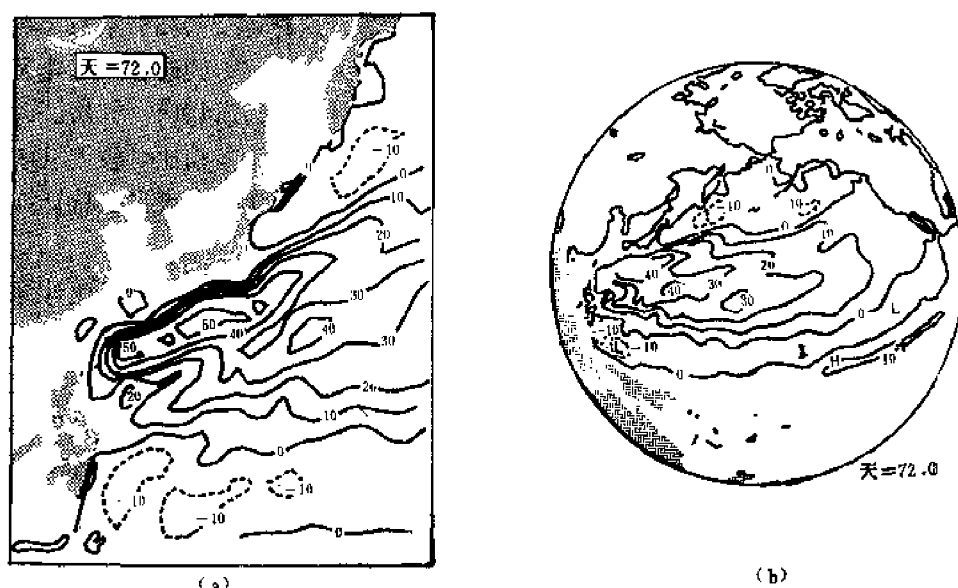


图 5.15.1 均质密度风生模式计算出的质量输送流函数(ψ)(北太平洋)：

(a) 西边界处的环流型，单位为10^6吨/秒≃斯维尔德鲁普(10^6米^3/秒)；

(b) 整个区域中的流型。(关于ψ的符号见正文中的解释)。

该模式很合理地给出了已知的环流特征。只是在细节上有些差异。黑潮在35°N处离岸，其输送值大约为60斯维尔德鲁普，这与观测值吻合。早期根据地转运动计算的估计值表明，输送量是65斯维尔德鲁普，但最近的估计值稍高些，约80到90斯维尔德鲁普。蒙克计算的输送是38斯维尔德鲁普，而且黑潮直到约45°N处才离开岸边。所以数值模式给出的结果似乎更好些。在35°N处离岸运动的部分原因是地形的影响（在正压模式中，地形的影响可能强调得过分一些，但在本例中已把超过2,000米的实际深度取为平坦的，所以该模式中，这个问题不至于太严重）。

模式中的输送量比蒙克的线性模式大，这可能是由于非线性效应（平流加速度项）使流动加快。用来研究非线性效应的早期数值模式清楚地表明，与略去非线性效应的结果相比较得知，非线性效应使流量加大。所以，如同Stommel所指出，非线性增强或惯性增强，可以导致环流的加强。大量的附加输送是局部性的再生环流造成的。O'Brien的结果说明，具有黑潮输送量大约1/3的这种输送与局部再生环流有关。主要大洋循环流在内区的向南输送，

大约是 40 斯维尔德鲁普，这正是使用适合于平底模式的斯维尔德鲁普关系计算所得到的结果，只要非线性效应和底摩擦在内区（如我们所期望的那样）是次要的。

具有类似分辨率的其他北太平洋数值模式，使用不变的涡动粘滞系数和同样的风应力，所得到的输送更接近蒙克的研究结果。这似乎说明，可变涡动粘滞系数使总粘性系数较低，从而使非线性效应更为重要，并导致黑潮输送量增加到更接近于实测值。

尽管 O'Brien 的模式给出的结果，似乎与我们对实际环流的有限的认识相当一致，但其计算的最大输送值仍然稍低于最新的实测估计值。不过上述输送估计值和 O'Brien 计算中使用的风应力都不是很肯定的。然而，密度不变的假设完全忽略了温盐环流。在解析研究中，这种将物理因子分别加以讨论的方法总是必要的，因为不能一下子处理整个系统。除了描写速度场的方程具有非线性性质外，在盐分守恒和热量守恒方程中也有基本的非线性项——平流项。由这两种驱动力所产生的环流，似乎不可能不发生相互作用，除了 Stommel 最先提出的热盐流与风生流的简单线性迭加外，它们将提供另一种可能的增强机制。O'Brien 模式表明了模拟模式中惯性增强效应，也表明了蒙克模式在研究更为真实的情况时也适用。

5.15.4. **中尺度涡的数值模式** 近年来已积累了大量证据，证明大洋中存在着中尺度涡旋。这些涡旋似乎具有量级为 200 公里到 500 公里的特征水平尺度，其时间尺度为 1 个月到几个月，其动能为内区平均运动动能的 10 倍到 100 倍。与平均流有关的大部分能量是倾斜的等压面位能；这种能量也许比动能大一千倍。但是涡旋的位能与动能的量级差不多，所以即使到处可以看到中尺度涡旋，但平均流的总能量大概大于涡旋的总能量。迄今为止尚不清楚这些涡旋盛行的程度究竟如何，以及它们对平均运动有何重要性。与大洋涡旋相类似的大气系统是中纬度的风暴系统。在天气图上，它们看上去象一系列的大涡旋。可以认为这些涡旋是与二维湍流相类似的地转湍流。在大气中，已经知道涡旋从平均有效位能得到能量，而且把动能和动量转移给较大尺度的运动和平均运动。[*] 例如，它们对于确定西风带和急流的强度是很重要的。假如想用通常的简单方法，用涡旋粘性系数把这些涡旋的作用参数化，那末其值为负，因为与熟知的小尺度三维湍流（它起阻滞运动的作用）相反，它们使流动加速。如果大洋涡旋相当普遍，而且具有与大气涡旋类似的动力学性质，那末它们可以在平均运动动力学中起重要作用。

首次严格地证实大洋涡旋存在的是 Swallow。他在 1959—1960 年第一次使用他的浮标，企图观测深水中非常缓慢的流动时获得了关于中尺度涡旋的证据。实际上，最近的、但是不太多的观测指出，如果他进一步观测大洋内部，他会发现大洋内部正如他所料想的那样是平静的——看来那里确实是很平静的区域。总之，使他惊奇的是，他发现浮标在不同方向上以至少比预料的速度大十倍的速度离去，所以他不能跟踪很长的时间。一旦人们接受了涡旋是大洋的一个特征这一概念之后，便能在历史记录中找到大量的证据。尽管许多以往的资料是从距离很远的测点得到的，以至于不能清楚地表现出涡旋，但也确有一些详细的观测，其中可以在密度场（和作为确定外海密度的主要因素的温度场）中看出这种涡旋来，因为绕涡旋的运动是近似的地转运动。(象在西边界流和大气的天气系统中那样，与沿流动的，分量

---

* 读者可以参阅第七章的论述。

有关的科氏力，在垂直于流动方向的动量方程中起主导作用。)

迄今为止，人们还不能在模拟模式中使用足够好的分辨率，以考察中尺度涡旋的存在。然而，已经对有足够分辨率的、简化了几何形状的机制模式作了研究，并且指出，中尺度涡可以对总环流产生重要的影响。例如，它们能从上层风生环流的平均运动的位能中汲取能量，并把能量传递给涡旋和大洋深层的平均环流，用这种方式来增加系统的总输送。

能使上述涡旋随直接来自平均有效位能场的能量供应而增长的不稳定机制，称为斜压不稳定。这种可能的机制需要具有垂直切变的斜压流。另一种从平均流水平切变中汲取能量而增长的不稳定机制叫正压不稳定。这两种不稳定机制在大气中都是重要的；在海洋中，二者的相对重要性尚不太清楚，但是当涡旋存在时，其中一类不稳定或两类不稳定都是可能的能源。

对于正压不稳定，能量来自平均流，但是平均流可以从位能场汲取能量，所以对正压不稳定来说，可以由平均位能场间接地提供能量。旋转作用，尽管不直接影响动力不稳定性，但却起着间接的作用。由于科氏力项很重要，（与非旋转情况相比）需要有大得多的等压面倾斜，所以压力梯度可以平衡科氏力项的大部分。较大的等压面倾斜引起较多的平均位能。所以旋转作用产生很大的平均位能，并且为不稳定提供了比非旋转情况下的可用能源大得多的能源。

5.15.5. **关于数值解的评述** 许多模式都用 Hellerman 的风应力计算，但它不是一种最好的计算。然而对不同模式使用同样的风应力值便于进行比较；而且在目前的模拟水平上，误差大概也不太严重。但是，用这种计算不能给出关于斯维尔德鲁普关系之精度的定量论证。最近 Hellerman 正在用更多的资料，并使用不变的拖曳系数重新计算风应力。迄今为止，拖曳系数对风速和其他参数的依赖关系还没有很好地建立起来。但是假如新的测量表明，拖曳系数线性依赖于风速是一个较好的表达式，那末有可能对 Hellerman 的新计算作修正，因为在给定区域上引起风应力的风速范围很窄。

检验模拟结果对风应力输入变化之灵敏性的某些模拟，有助于我们确定，究竟要以什么样的精度描写这个强迫函数。这种知识对那些试图更好地测定拖曳系数的人来说也是有用的。在诊断模式中，这种应力函数看来几乎是不重要的，信息来自外加密度场，而风只是产生这种密度场的部分原因。

原则上说，数值模拟方法的优点在于可以考虑方程中的所有项和真实地形与海岸线。目前，至少在模拟模式中，摩擦项似乎太大，致使非线性项的作用失真。要想确定可能的参数范围，又受到所用计算机速度的限制。如果中尺度涡在海洋动力学中的重要性象气旋在大气动力学中那样，那末这就提出了一个严重的分辨率问题。我们知道，在大气中 250 公里分辨率给出的结果明显地优于 500 公里的分辨率。在前一种情况下，所有对动能有重要贡献的运动，包括风暴和中尺度涡在内部分辨得较好。这些涡旋的尺度与罗斯贝变形半径 $\lambda=[g\cdot(\Delta\rho/\rho)D]^{1/2}/f$ 成正比，其中 g 是重力加速度，$\Delta\rho$ 是两个主要流体层之间的密度差，D 是流体层厚度，f 是科氏参数。对大气来说，λ 的量级是 1,000 公里。对海洋来说，λ 的量级是 100 公里，因为 $\Delta\rho/\rho$ 和 D 都较小。所以在大洋模式中好象需要 25 公里量级的分辨率才能分辨所有的能量尺度。目前用这样的分辨率模拟全球大洋是不可能的。但是无疑可以做有限区域的模拟（但区域也不能太小，因为否则结果将主要取决于开边界上的边界条件，但这些边界条件我们了解得很差）。所有这些问题都与可用的计算机的大小和速度有关；但是现已

使用的高速计算机和正在发展的新的数值方法，将有助于克服上述困难。

如上所述，观测事实与风生大洋环流的线性理论之间存在差异。简单地迭加上温盐环流，大概也不能解释这一差异。虽然这里的数值模式不能给出最终的答案，但它们提出了几类机制来解释这一差异。这三种可能性是：惯性增强、洋底地形-斜压性、和中尺度涡旋。在一个机制模式中表现出来的另一种可能性是风应力变化的作用，这些变化可以通过非线性调整作用产生附加的平均流。至少在某些区域中，上述各种机制可能是重要的，但是在实际大洋中，它们的重要性究竟如何，还有待探讨。

对于上述差异，我们在此作一点试探性的解释，目前的观测还十分有限，且带有很大程度的不肯定性。某些最新的关于内区斯维尔德鲁普关系的试验，使用以较新的拖曳系数和较高的空间分辨率计算的风应力旋度，似乎给出了较好的结果。流动用地转方法计算，且假定是斜压的。(在内区，若洋底平坦，则 Sverdrup 指出，净南北向输送为 $\mathrm{curl}\tau_{-\eta}$. 任何附加的温盐流在整个深度上的净输送为零——向极方向的深层流恰好与向赤道方向的流动平衡。当然，洋底并非水平，而且实际上有些地方很不平坦（如中大西洋海脊），所以斜压性-洋底地形效应会起作用。在这种情况下，难以把内区和西边界区分开。)计算的地转输送与根据风应力旋度计算的输送很相近。当对整个大洋作外推时，为了避免侧边界效应，区段要适当地取在内区，计算的输送也与佛罗里达海峡的输送（30—35 斯维尔德鲁普）很相吻合；只在更远的下游才观测到很大的湾流输送（超过 100 斯维尔德鲁普）。这种斯维尔德鲁普试验已在适当的地方进行过。当然，确实还要对地转计算作一些核实，但上述试验，比把内区斯维尔德鲁普输送与湾流输送（它的观测还不太好）作对比的做法好得多。因为存在着由于惯性效应、中尺度涡、斜压-地形相互作用（或许还有其他效应）产生的边界流增强的可能性，所以西边界区的宽度可以比目前认为的宽度大得多。实测湾流和黑潮输送所依据的那些观测的离岸范围，可能不够大，以至于无法检测出所有的逆流，而在与根据风应力旋度按斯维尔德鲁普关系计算的内区输送作比较时，必须减去这些逆流。有证据说明，湾流右侧的次表层逆流很强，这种逆流及其他逆流的观测还不太完善。所以净的西边界区输送和斯维尔德鲁普输送之间的差异可能不象目前想象的这么大，显然还需要对此作进一步的调查研究。

第六章　层结流体在球面上的地转运动

6.1 引　　言

我们在第一章中认识到，由大气和海洋不均匀加热引起的密度变化，是引起该二系统环流的原因之一。甚至在大洋风生环流中，也隐含地要求有引起风的大气浮力。此外，重流体位于轻流体之下的稳定层结之存在，是大气和海洋二者的特征，它抑制垂直运动，强烈影响着动力学性质。从2.9节的讨论中也明显地看出，风和流的垂直结构，通过热成风关系，直接与水平密度梯度之存在和强度相联系。

在第三章至第五章中，用均质模式讨论了几种有地球物理学意义的现象，这些均质模式完全忽略了层结作用，并且由泰勒-普劳德曼定理可知，它们必有与高度无关的水平运动。在本章中，我们将引入层结和斜压性来消除泰勒-普劳德曼约束条件。现在，我们不仅要观察同一现象（如罗斯贝波）的均质模式和层结模式之间的关系，而且还将探讨依赖于层结作用而存在的新运动模态的可能性。

描述和计算可压缩（尤其是在大气情况下）的旋转层结流体是不容易的。要想在认识这类运动上取得进展，我们必须大大简化运动方程，致使它们只描述大尺度运动的基本特征。系统地利用尺度分析来简化方程的方法，与第三、四章中的尺度分析相类似，但是层结之存在引入了一些需要特别注意的新问题。同时，因泰勒-普劳德曼定理不再成立，所以底面坡度变化与科氏参数随纬度变化之间的直接的动力相似已不存在。在很大程度上，相似的依据是均质流体的位涡守恒原理。因此，现在已基本上超出3.17节的启发性论证的范围，而是根据推导一般的准地转方程时所用的系统的尺度考虑，来推导均质流体和层结流体的β平面模式。

必须记住，下面的尺度分析旨在描述一类特殊运动（即大尺度准地转运动）所得到的结果。尺度分析论证及其结果不是自动从运动方程得出的。相反地，我们必须暂时离开方程，借助运动之尺度和振幅，系统地预先设想运动的定性性质。我们可预期方程能使我们作出的判断是，我们的预想是否相容（而不是是否恰当），如果相容的话，哪种简化方程能令人满意地描述所设运动的动力学性质。

6.2 球坐标系中的运动方程：尺度分析

图6.2.1 (a,b) 简略地给出所要描述的情况。我们考虑在一半径为 r_0 的球上的运动。也就是说，我们将一开始就把地球视为球体。运动的特征垂直尺度 D 在我们感兴趣的所有情况下，与 r_0 相比都是小量，以致在整个流体深度范围内，有效重力加速度 g 可以取为常数。运动的水平尺度 L 在2.1节所描述的意义上是个大量（即 L 大到使罗斯贝数为小量的程度），但我们首先将把注意力放在 L 远小于 r_0 的情况上面。这样做的理由有三条。首先，它能代表许多使人感兴趣的重要的海洋和大气现象，其中包括海洋的中尺度涡旋和大气的气旋波，并且很好地描述了大洋环流和大气环流的结构。其次，我们事先可以预料地转近似（以后的

大多数推导均以地转近似为基础）在赤道地区一定不适用，因为在那里作用于水平流上的科氏力非常弱．因此按其性质来说，准地转理论所讨论的运动必是小于全球尺度的．最后，把 L/r_0 限制为小量，可使运动方程大大简化，同时也是使 β 平面近似成立的一个特殊条件．

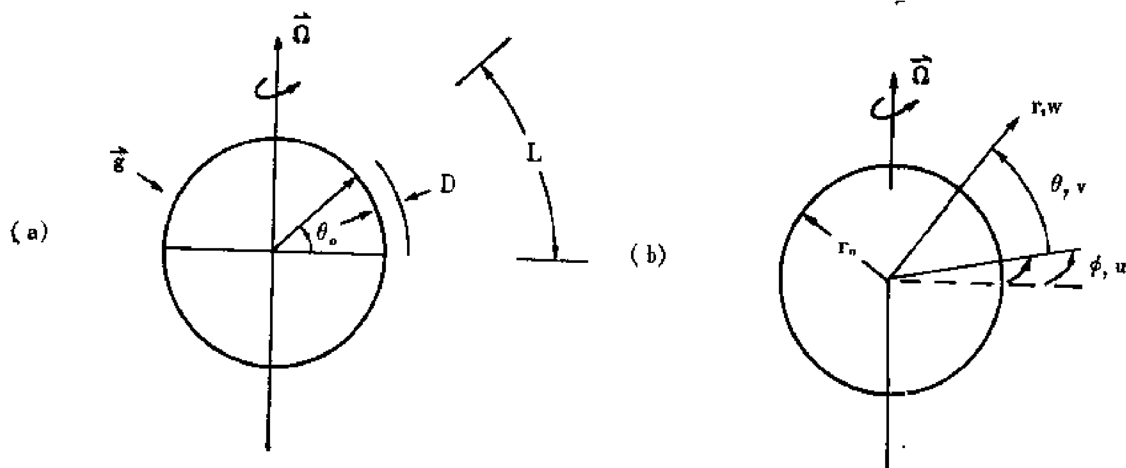


图6.2.1

(a)待研究的运动具有水平尺度 L、垂直尺度 D、并且中心位于纬度θ_0。(b)球极坐标系。经度为 ϕ，纬度为 θ，而 r 是到地心的距离。u、v 和 w 分别为向东、向北和垂直向上的速度。

L/r_0 为 $O(1)$ 的情况在6.21节中讨论。在球面系统中所用的坐标系如图 6.2.1(b) 所示。流体中任意一点的位置用 r、θ 和 ϕ 来确定，它们分别是该点到地心的距离、纬度和经度．向东、向北和垂直向上的速度为 u、v 和 w。在上述球坐标系中，质量守恒方程(1.4.2)式为[1)]

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\left\{\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{2w}{r}+\frac{1}{r\cos\theta}\frac{\partial(v\cos\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\cos\theta}\frac{\partial u}{\partial\phi}\right\}=0, \tag{6.2.1}$$

其中

$$\frac{d}{dt}\equiv\frac{\partial}{\partial t}+\frac{u}{r\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}+\frac{v}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+w\frac{\partial}{\partial r}. \tag{6.2.2}$$

动量方程为

$$\frac{du}{dt}+\frac{uw}{r}-\frac{uv}{r}\tan\theta-2\Omega\sin\theta v+2\Omega\cos\theta w=-\frac{1}{\rho r\cos\theta}\frac{\partial p}{\partial\phi}+\frac{\mathscr{F}_\phi}{\rho}, \tag{6.2.3a}$$

$$\frac{dv}{dt}+\frac{wv}{r}+\frac{u^2}{r}\tan\theta+2\Omega\sin\theta u=-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\theta}+\frac{\mathscr{F}_\theta}{\rho}, \tag{6.2.3b}$$

$$\frac{dw}{dt}-\frac{u^2+v^2}{r}-2\Omega\cos\theta u=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}-g+\frac{\mathscr{F}_r}{\rho}. \tag{6.2.3c}$$

式中 $\mathscr{F}_\phi$、$\mathscr{F}_\theta$、$\mathscr{F}_r$ 是作用在流体上的摩擦力的三个分量。运动方程必须加上一个热力学方程才能闭合。这个热力学方程，或者是用于大气的 (1.4.18) 式，或者是用于海洋的(1.4.22)式。这就是说，对于大气有

(1) 由附录 $A1.4$ 的球坐标系中散度表达式，换成这里的记号为

$$\nabla\cdot\mathbf{V}=\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{2w}{r}+\frac{1}{r\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(v\cos\theta)+\frac{1}{r\cos\theta}\frac{\partial u}{\partial\phi}.$$

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{\theta}{C_pT}\left(\frac{k}{\rho}\nabla^2T+Q\right), \tag{6.2.4}$$

其中 θ 是位温，即

$$\theta=T\left(\frac{p_0}{p}\right)^{R/C_p}, \tag{6.2.5}$$

而 p、ρ 和温度 T 的关系为

$$P=\rho RT, \tag{6.2.6}$$

其中 R 是空气的气体常数。另一方面，对于海洋来说，我们将用简化的热力学方程

$$\frac{d\rho}{dt}=\kappa\nabla^2\rho-\frac{\alpha\rho_0}{C_p}Q, \tag{6.2.7}$$

式中 κ 是热传导系数，α 是热膨胀系数。状态方程是(1.4.20)式。在(6.2.4)和(6.2.7)式中的 Q 都是内加热率，C_p 是空气或水（依情况而定）的定压比热。

我们现在来考虑海洋或大气中的一种运动，其变化的水平空间尺度为长度尺度 L，其水平速度由速度尺度 U 来表征。事实上，本章的基本假定是，速度及其导数都存在单一的完全确定的尺度，从而可以用这些尺度对运动方程中各项的大小依次作估计。我们进一步假设，运动发生在远离赤道的、中心纬度为 θ_0 的中纬度地区。于是，引入如下新的经度坐标和纬度坐标

$$\begin{aligned}x&=\phi r_0\cos\theta_0,\\ y&=(\theta-\theta_0)r_0,\end{aligned} \tag{6.2.8}$$

将带来很大的方便。变量 x 和 y 具有长度的量纲。但是，它们仅在地面 $(r=r_0)$ 和中心纬度 θ_0 处，才准确地度量出向东和向北的距离。虽然 x 和 y 原则上仅是一种新的经度坐标和纬度坐标，用它们来表示运动方程可以不作近似，但它们的引入显然是希望对于 L/r_0 和 D/r_0 为小量的运动，上述坐标将变为 β 平面近似下的直角坐标。注意

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\phi}&=r_0\cos\theta_0\frac{\partial}{\partial x},\\ \frac{\partial}{\partial\theta}&=r_0\frac{\partial}{\partial y}.\end{aligned} \tag{6.2.9}$$

同样，为方便起见引进

$$z=r-r_0, \tag{6.2.10}$$

所以

$$\frac{\partial}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial z}. \tag{6.2.11}$$

使用特征尺度引进带撇号的无量纲变量，即

$$x=Lx', \tag{6.2.12a}$$

$$y=Ly', \tag{6.2.12b}$$

和

$$z=Dz', \tag{6.2.12c}$$

而时间尺度则按照3.12节的论述，用平流时间 L/U 表征，即

$$t=\frac{L}{U}t' . \tag{6.2.12d}$$

对于水平速度分量，有

$$\begin{aligned} u&=Uu' ,\\ v&=Uv' . \end{aligned} \tag{6.2.13}$$

几何考虑表明，如果运动的垂直尺度为 D，水平尺度为 L，则流体元轨迹的相应坡度不超过 D/L，所以 w 的适当尺度分析为

$$w=\frac{D}{L}Uw' . \tag{6.2.14}$$

如果其他的动力学约束使垂直运动减小，那末 w 的实际尺度可以小于DU/L，所以(6.2.14)式最好认为是 w 大小的上界。

压力和密度的尺度分析是比较微妙的，如果相对速度是小量（即对于小罗斯贝数而言），那末，压力相对于静止时的压力值 $p_S(z)$ 的偏差很小，而 $p_S(z)$ 由下式确定：

$$\frac{\partial p_S(z)}{\partial z}=-\rho_S(z)g, \tag{6.2.15}$$

这正好是(6.2.3a,b,c)式在 u、v 和 w 为零时的简化形式。我们可以认为 $p_S(z)$ 和 $\rho_S(z)$ 定义了一个“标准”大气或海洋，即迭加着由运动造成的偏差的基本状态。虽然实际确定基本状态本质上说需考虑诸如大气中的辐射传输等机制，但我们假定基本状态为已知的。换言之，p_S 和 ρ_S 可以定义为 p 和 ρ 在每一个高度 z 处的全球平均值。于是我们有

$$\begin{aligned} p&=p_S(z)+\tilde{p}(x,y,z,t),\\ \rho&=\rho_S(z)+\tilde{\rho}(x,y,z,t), \end{aligned} \tag{6.2.16}$$

其中 $\tilde{p}$ 和 $\tilde{\rho}$ 是相对于标准值 p_S 和 ρ_S 的随空间和时间变化的偏差。如何对 $\tilde{p}$ 和 $\tilde{\rho}$ 作尺度分析呢？我们预料，对于我们所感兴趣的运动，水平压力梯度的量级与科氏加速度的相同。在纬度 θ_0 处的科氏加速度量级为

$$\rho 2\Omega u\sin\theta_0=O(2\Omega\sin\theta_0 U\rho_S),$$

而压力梯度的大小为 $\tilde{p}/L$。因此我们得 $\tilde{p}=O(\rho_S Uf_0L)$，其中

$$f_0=2\Omega\sin\theta_0 \tag{6.2.17}$$

是在中心纬度 θ_0 处的科氏参数。上述考虑意味着压力应表示为

$$p=p_S(z)+\rho_S Uf_0Lp' , \tag{6.2.18}$$

可以期望 p' 是 $O(1)$的量，并在 $O(L)$的距离上有 $O(1)$的变化。

同样我们可预料，由 $\tilde{\rho}$ 引起的单位质量的浮力将与垂直压力梯度有相同的量级，这是因为大尺度运动的一个观测特征是静力近似的程度极高。与 $\tilde{p}$ 相联系的垂直压力梯度为

$$\frac{\partial\tilde{p}}{\partial z}=O\left(\frac{\tilde{p}}{D}\right)=O\left(\frac{\rho_S Uf_0L}{D}\right), \tag{6.2.19}$$

因此，如果 $\tilde{\rho}g$ 具有该量级，即

$$\tilde{\rho}=O\left(\rho_S U\frac{f_0L}{gD}\right), \tag{6.2.20}$$

那末密度应写为

$$\rho=\rho_S(z)[1+\varepsilon F\rho'] , \tag{6.2.21}$$

其中

$$\varepsilon=\frac{U}{f_0 L}\tag{6.2.22}$$

是罗斯贝数，而

$$F=\frac{f_0^2 L^2}{gD}.\tag{6.2.23}$$

如果把(6.2.12)、(6.2.13)，(6.2.14)、(6.2.15)、(6.2.18) 和 (6.2.21)式代入 (6.2.3*a*, *b*,*c*)式，并用与压力项相乘的常数来除方程各项，则得：

$$\varepsilon\left\{\frac{du}{dt}+\frac{L}{r_*}[\delta uw-uv\tan\theta]\right\}-v\frac{\sin\theta}{\sin\theta_0}+\delta w\frac{\cos\theta}{\sin\theta_0}$$

$$=-\frac{\cos\theta_0}{\cos\theta}\frac{r_0}{r_*}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{1}{1+\varepsilon F\rho}+\frac{\mathscr{F}_{*\phi}}{\rho_* U f_0},\tag{6.2.24a}$$

$$\varepsilon\left\{\frac{dv}{dt}+\frac{L}{r_*}[\delta vw+u^2\tan\theta]\right\}+u\frac{\sin\theta}{\sin\theta_0}=-\frac{r_0}{r_*}\frac{\partial p}{\partial y}\frac{1}{1+\varepsilon F\rho}+\frac{\mathscr{F}_{*\theta}}{\rho_* U f_0},\tag{6.2.24b}$$

$$(1+\varepsilon F\rho)\left[\varepsilon\delta^2\frac{dw}{dt}-\frac{\varepsilon\delta}{r_*}(u^2+v^2)-\frac{\delta u\cos\theta}{\sin\theta_0}\right]=-\frac{\partial}{\rho_S\partial z}(p\rho_S)-\rho+\frac{\mathscr{F}_{*z}}{\rho_S U f_0}\delta,\tag{6.2.24c}$$

其中

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\cos\theta_0}{\cos\theta}\frac{r_0}{r_*}\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{r_0}{r_*}\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}\tag{6.2.25a}$$

和

$$\delta=\frac{D}{L}.\tag{6.2.25b}$$

不带撇号的变量是无量纲量，而有量纲变量由此开始用星号来标记，例如 (6.2.12*a*,*b*) 现在变为

$$x_*=Lx,$$

$$y_*=Ly,$$

以及

$$p_*=p_S(z)+\rho_S U f_0 L p,$$

等等。特别要注意

$$\frac{r_*}{r_0}=1+\delta\left(\frac{L}{r_0}\right)z.\tag{6.2.26}$$

连续方程(6.2.1)式变为

$$\varepsilon F\frac{d\rho}{dt}+(1+\varepsilon F\rho)\times\left[\frac{w}{\rho_S}\frac{\partial\rho_S}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial z}+2\frac{D}{r_*}w+\frac{r_0}{r_*}\frac{\partial v}{\partial y}\right.$$

$$\left.-\frac{L}{r_*}v\tan\theta+\frac{r_0}{r_*}\frac{\cos\theta_0}{\cos\theta}\frac{\partial u}{\partial x}\right]=0.\tag{6.2.27}$$

至此还未作近似。但方程已简单地作了尺度分析，所以，各项的相对大小可用与它相乘的无量纲参数清楚地给出。这是尺度分析方法的基本假定。现在，有可能系统地来利用参数 ε、

δ、L/r_0 和 F 为小量的特性。在此必须作些初步说明。参数 ε、δ、L/r_0 和 F 都是独立的，它们的相对量级随现象而稍有不同。我们所要得出的近似性质将取决于这些相对量级，尤其是取决于 L/r_0 与 ε 之比 $L/\varepsilon r_0$。下述的处理方法不是包罗万象地涉及这些参数所有可能的相对量级。我们只研究那些特别重要的情况。讨论的方法尽可能交待清楚，以便读者可把同样的方法应用到存在其他参数关系的情况中去。

把三角函数在纬度 θ_0 处作展开，如利用(6.2.8)和(6.2.12)式，得

$$\sin\theta=\sin\theta_0+\frac{L}{r_0}y\cos\theta_0-\left(\frac{L}{r_0}\right)^2\frac{y^2}{2}\sin\theta_0+\cdots, \tag{6.2.28a}$$

$$\cos\theta=\cos\theta_0-\frac{L}{r_0}y\sin\theta_0-\left(\frac{L}{r_0}\right)^2\frac{y^2}{2}\cos\theta_0+\cdots, \tag{6.2.28b}$$

$$\tan\theta=\tan\theta_0+\frac{L}{r_0}y\cos^{-2}\theta_0+\left(\frac{L}{r_0}\right)^2y^2\frac{\tan\theta_0}{\cos^2\theta_0}. \tag{6.2.28c}$$

摩擦力的大小可作如下估计。水平摩擦力（如 $\mathscr{F}_{*\theta}/\rho_*$）的量级，将如第四章中所述，用特征湍流混合系数来估计。即

$$\frac{\mathscr{F}_{*\theta}}{\rho_*}=O\left(A_H\frac{U}{L^2},\ A_V\frac{U}{D^2}\right), \tag{6.2.29}$$

所以

$$\frac{\mathscr{F}_{*\theta}}{\rho_*Uf_0}=O\left\{\frac{E_H}{2},\ \frac{E_V}{2}\right\}, \tag{6.2.30}$$

其中

$$\begin{aligned}E_H&=2\frac{A_H}{f_0L^2},\\E_V&=2\frac{A_V}{f_0D^2},\end{aligned} \tag{6.2.31}$$

分别是与尺度小于 $O(L)$ 和 $O(D)$ 的水平和垂直湍流动量混合有关的埃克曼数。除了边界层以外，这些摩擦项一般可以略去；在边界层内，由于长度尺度明显地有了变化，因此方程必须重作尺度分析。

最后，我们把

$$\beta_0=\frac{2\Omega}{r_0}\cos\theta_0=\left(\frac{1}{r_0}\frac{df}{d\theta}\right)_{\theta=\theta_0}. \tag{6.2.32}$$

定义为在纬度 θ_0 处科氏参数向北的梯度。注意，

$$\frac{\beta_0L}{f_0}=\frac{L}{r_0}\cot\theta_0=O\left(\frac{L}{r_0}\right), \tag{6.2.33}$$

所以有

$$\frac{\beta_0L/f_0}{\varepsilon}=\frac{\beta_0L^2}{U}=O\left\{\frac{L}{r_0\varepsilon}\right\}. \tag{6.2.34}$$

因此，虽然 ε 估量了 θ_0 处相对涡度与垂直于球面的行星涡度之比，但是相对涡度梯度和行星涡度梯度之比的量级由参数

$$\beta^{-1}=\frac{U}{\beta_0 L^2}=O\left(\varepsilon\frac{r_0}{L}\right) \tag{6.2.35}$$

给出。由于相对涡度在尺度 L 上变化，而行星涡度在尺度 r_0 上变化，所以 ε 为小量并不意味着 $U/\beta_0 L^2$ 也为小量。因此，尽管 ε 可以是小量，但 β^{-1} 可以是大量或小量，或其量级为 1，并且每种可能性将产生十分不同的准地转动力系统。

热力学方程的尺度分析将在后面几节需要时给出。

6.3 地转近似：$\varepsilon=O\left(\frac{L}{r_0}\right)\ll 1$

我们要研究的第一种情况是，其中

$$\varepsilon=O\left(\frac{L}{r_0}\right)\ll 1, \tag{6.3.1}$$

或等价地，利用(6.2.35)式有

$$\frac{U}{\beta_0 L^2}\equiv\frac{1}{\beta}=O(1). \tag{6.3.2}$$

这个参数指标对于海洋学和气象学都有特殊的意义。在中纬度，$f_0=O(10^{-4}/秒)$ 和 $\beta_0=O(10^{-13}/厘米\cdot秒)$，而大气西风带中的大尺度波动之特征速度为 $U=O(10米/秒)$，特征水平尺度为 $L=O(10^3公里)$。因此，

$$\varepsilon=O(10^{-1}), \qquad \beta=O(1).$$

对于在西大西洋中观测到的中尺度或天气尺度涡旋，$U=O(5厘米/秒)$，$L=O(100公里)$，所以，对于这些尺度的运动有

$$\varepsilon=O(5\times10^{-3}), \qquad \beta=O(0.5).$$

在大气情况下，D 的典型值为10公里（对流层厚度），参数 F 为 $O(10^{-1})$，即 $O(\varepsilon)$，而在刚才所提到的海洋情况下，$D=O(4公里)$，F 比大气情况的小得多（由于 L 只有 100 公里）：$F=O(0.2\times10^{-2})$，它也为 $O(\varepsilon)$。因此，在分析(6.2.24)和(6.2.27)式的近似表达式时，我们对

$$\frac{L}{r_0}=O(F)=O(\varepsilon) \tag{6.3.3}$$

的情况特别感兴趣。对于大尺度大气波动的情况，

$$\delta=\frac{D}{L}=O(10^{-2})=O(\varepsilon^2),$$

而对于海洋的天气尺度涡旋，

$$\delta=O(2\times10^{-2})=O(\varepsilon).$$

但是在以下分析中，这种区分并没导出二者的重要差别。

摩擦项较难估计，这是因为 A_H 和 A_V 的值难以估计和具有不确定性。根据第四、五章的讨论，在一些重要的海洋和大气现象中，认为摩擦的直接效应只存在于和边界相邻的薄边界层中，这看来似乎是合理的。我们要推导的近似方程只适用于该层以外的区域，因此我们假定：

$$(E_V,\ E_H)<O(\varepsilon). \tag{6.3.4}$$

最后我们注意到，根据(6.2.26)式有

$$\frac{r_*}{r_0}-1=O\left(\frac{\delta L}{r_0}\right)\leqslant O(\varepsilon^2).$$

每个因变量，例如运动方程的一个解 u，不仅是 x、y、z 和 t 的函数，而且也是无量纲参数 ε、L/r_0、F、δ 等的函数。为了得到近似方程，我们必须利用每个参数是小量这个特点。所得结果将取决于各参数的相对量级，毫无疑问，在把方程和解展开时，我们一定要选择参数间特殊的量级关系。例如，我们可以选择使 $\varepsilon r_0/L$ 在 $\varepsilon\to0$ 的极限情况下仍保持有1的量级。在某种程度上，这是从以上所描述的观测证据的启发中得到的。但这并不能证明，若 ε 确实变得非常小时，L/r_0 会相应地缩小，尤其是在线性情况下。此外，我们必须把尺度分析还原为直觉判断一些量级关系，这些关系通过区分重要的自然物理平衡的方法而得到阐明，而这些平衡对于我们所关心的现象是有物理意义的。$\varepsilon\to0$ 而 $\varepsilon r_0/L$ 的量级为 1 的极限情况特别重要，因为这种情况可以考察行星涡度梯度与相对涡度梯度对整个涡度平衡有同等贡献时的地转动力学。这个对量级关系的特殊意义的认识使我们相信，观测到的参数间的数值关系只是偶然的。

一旦用这种方法选择了量级关系，各变量可以认为是 ε 的函数，而其他参数根据前述的设想也直接与 ε 有关。由于 ε 为小量，我们可以写出各变量的展开式，例如

$$u(x,y,z,t;\varepsilon)=u_0(x,y,z,t)+\varepsilon u_1(x,y,z,t)+\cdots, \tag{6.3.5}$$

其中 u_K 与 ε 无关，并为 $O(1)$。现在u_K也是参数 $L/r_0\varepsilon$、F/ε、δ/ε 等的隐函数，我们在此假定这些参数的量级为1。如果把展开式(6.3.5)应用于每一个因变量，并把这些展开式代到运动方程中，那末在所得到的方程中，ε 的同次幂项必须平衡，这是因为 ε 虽小但还是任意的，所以方程必须对于 ε 的所有幂次都成立。如果三角函数项展为 (6.2.28) 的形式，那末 (6.2.24)和(6.2.27)的 ε 展式中的 $O(1)$项为

$$v_0=\frac{\partial p_0}{\partial x}, \tag{6.3.6a}$$

$$u_0=-\frac{\partial p_0}{\partial y}, \tag{6.3.6b}$$

$$\rho_0=\frac{-1}{\rho_S}\frac{\partial}{\partial z}(\rho_S p_0), \tag{6.3.6c}$$

以及

$$\frac{1}{\rho_S}\frac{\partial}{\partial z}\{w_0\rho_S\}+\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}=0. \tag{6.3.7}$$

方程(6.3.6a,b)为地转近似。注意，方程组与适用于平面域上的水平流动的地转关系是完全一样的，在该水平域上，x 和 y 是水平直角坐标。在此首次出现 β 平面近似。u_0、v_0 和 p_0 之间的关系不仅是以直角坐标形式出现，而更重要的是，与 $O(1)$ 速度和 $O(1)$ 水平压力梯度有关的科氏参数在 $\theta=\theta_0$ 时为常值 f_0，这是因为(6.3.6a)恢复为有量纲形式就是

$$v_{*0}=\frac{1}{\rho_S f_0}\frac{\partial p_{*0}}{\partial x_*}. \tag{6.3.8}$$

这个根本性的简化进一步意味着，$O(1)$ 水平地转速度是水平无辐散的，因为根据 (6.3.6a,

b) 有

$$\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}=0, \tag{6.3.9}$$

所以(6.3.7)式表示

$$\frac{\partial}{\partial z}(\rho_S(z)w_0)=0. \tag{6.3.10}$$

因此，$\rho_S w_0$ 一定与 z 无关。只要 w_0 在任一高度 z 处为零，则它将在所有的高度上为零。如果我们考虑的区域在上下各有一个水平固体边界，那末，$O(1)$ 垂直速度在那个面上一定为零。根据(4.5.39)式，该面上的粘性边界层将产生 $O(\delta_E/D)$ 的小垂直速度。因此，$O(1)$ 垂直速度 w_0 在该面上必定为零。以后我们必须考察层结对埃克曼层的结构是否有重大影响。我们将在 6.6 节中看到，回答基本上是否定的，但此处的结论实际上只取决于如下的简单事实，即根据质量守恒，从面体面边界层流体中抽吸去的垂直速度与水平速度之比，一定具有边界层形态比的量级。因此，只要边界层厚度小于 D，则在边界层厚度除以 D 的量级上，它对 w 的贡献是可以忽略的。同样，如果固体面不是平的，而是表征为有 $O(h_B)$ 高度的变化，那么将产生量级为

$$w_*=O\left(U\frac{h_B}{L}\right)$$

的垂直速度，或用无量纲单位表示，有

$$w=O\left(\frac{h_B}{D}\right).$$

与3.12节一样，我们只注意

$$\frac{h_B}{D}=O(\varepsilon) \tag{6.3.11}$$

的那些情况，因为大 h_B/D 的情况，如同3.12节中所描述的，可以作为我们要导出的理论之极限情况而得到。

借助(6.3.11)式，可以规定 w_0 至少对于一个 z 值一定为零，所以根据(6.3.10)式有

$$w_0=0, \tag{6.3.12a}$$

因此，

$$w=\varepsilon w_1+\varepsilon^2 w_2+\cdots, \tag{6.3.12b}$$

必须注意，这是旋转效应（即地转近似）的直接后果。用于 $O(1)$ 运动的地转近似(6.3.6a, b)引起现在已经熟悉的地转退化之困难，即 $O(1)$ 地转近似不可能确定 p_0 和 u_0、v_0。如第三章中所述，必须考虑更高阶的动力学性质，即考虑运动方程中的 $O(\varepsilon)$ 项。仔细注意三角函数展开式和利用(6.3.12)式，我们从(6.2.24a, b)得

$$\frac{\partial u_0}{\partial t}+u_0\frac{\partial u_0}{\partial x}+v_0\frac{\partial u_0}{\partial y}-v_1-v_0\left(\frac{L}{r_0\varepsilon}\right)y\cot\theta_0$$
$$=-\frac{\partial p_1}{\partial x}-\frac{Ly}{\varepsilon r_0}\tan\theta_0\frac{\partial p_0}{\partial x}, \tag{6.3.13a}$$

$$\frac{\partial v_0}{\partial t}+u_0\frac{\partial v_0}{\partial x}+v_0\frac{\partial v_0}{\partial y}+u_1+u_0\left(\frac{L}{r_0\varepsilon}\right)y\cot\theta_0=-\frac{\partial p_1}{\partial y}. \tag{6.3.13b}$$

(6.3.13a,b)式左端与 $L/r_0\varepsilon$ 成比例的项，是由科氏参数随纬度的变化引起的。根据关于 β 平面的启发性论证，我们预料到会存在这些项。但是，(6.3.13a)式右端与 $L/\varepsilon r_0$ 成比例的项，是由于与经度变化和向东的长度变化有关的几何项 $\cos\theta$ 之变化引起的。如果 $\tan\theta_0$ 为小量，则该项可以忽略。在这种情况下，对于科氏参数向北线性变化的平面地球，(6.3.13)式将简化成 $O(\varepsilon)$ 的动量方程。在动量平衡的水准上，这直接使 β 平面的理想化情况成立。但是，$\tan\theta_0$ 为小量的限制，是一个十分强的限制，事实上，它会把 β 平面近似限制在离赤道非常近的、地转近似最弱的纬度带里。我们必须得出结论、仅用变化的 f 来说明球状的平面地球模式，不适于考虑 $O(\varepsilon)$ 动量平衡。但是我们必须忆及前面所用的 β 平面近似，它只要求涡度方程满足 β 平面理想化的条件。不过，在构成涡度方程以前，先了解一下连续方程(6.2.27)式中的 $O(\varepsilon)$ 平衡，即

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}-\frac{L}{\varepsilon r_0}v_0\tan\theta_0+\frac{L}{\varepsilon r_0}y\tan\theta_0\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{1}{\rho_S}\frac{\partial}{\partial z}(\rho_S w_1)=0 \tag{6.3.14}$$

是有益的。

把(6.3.13a,b)式对 x 和 y 交叉微商，并利用(6.2.33)和(6.3.12)式，可得到关于

$$\zeta_0=\frac{\partial v_0}{\partial x}-\frac{\partial u_0}{\partial y} \tag{6.3.15}$$

的涡度方程：

$$\frac{\partial\zeta_0}{\partial t}+u_0\frac{\partial\zeta_0}{\partial x}+v_0\frac{\partial\zeta_0}{\partial y}+\beta v_0$$

$$=\frac{L}{\varepsilon r_0}\tan\theta_0\frac{\partial p_0}{\partial x}+\frac{L}{\varepsilon r_0}y\tan\theta_0\frac{\partial^2 p_0}{\partial x\partial y}-\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}\right). \tag{6.3.16}$$

然后，借助于(6.3.6a,b)式和连续方程(6.3.14)得：

$$\boxed{\frac{d_0}{dt}\{\zeta_0+\beta y\}=\frac{1}{\rho_S}\frac{\partial}{\partial z}(\rho_S w_1)}, \tag{6.3.17}$$

其中

$$\frac{d_0}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u_0\frac{\partial}{\partial x}+v_0\frac{\partial}{\partial y}. \tag{6.3.18}$$

这恰好是科氏参数随 y 线性变化的平面地球模式的 $O(1)$ 涡度方程。注意，根据“平面”地转近似(6.3.6a,b)，u_0 和 v_0 可用 p_0 直接确定，所以

$$\zeta_0=\frac{\partial^2 p_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p_0}{\partial y^2}. \tag{6.3.19}$$

但是，在把 w_1 与 p_0 联系起来以前，这个理论是不完善的。一般说来，这需要考虑热力学方程，即考虑(6.2.4)或(6.2.7)式。在下几节中将对此作考虑并进行推导。然而，我们在此可直接得出深度为 D 的均质流体层的基本涡度方程。如果流体是均质的，则 ρ_S 为常数，并且 ρ 恒为零，根据(6.3.6c)，这意味着 p_0 与 z 无关，所以 u_0 和 v_0 也必与 z 无关。在这种情况下，可以把(6.3.17)式对整个流体深度（即以 $z=0$ 到 $z=1$）积分，精确到 $O(h_B/D)$ 时可得

$$\frac{d_0}{dt}(\zeta_0+\beta y)=w_1(z=1)-w_1(z=0). \tag{6.3.20}$$

若下边界有坡度 h_B，则(4.11.13)式成立；若上界面为一自由面，则在 $z=1$ 处(4.11.10)式成立，所以(6.3.20)式变为

$$\frac{d_0}{dt}\{\zeta_0+\beta y-\eta_B-F\eta_0\}=\left[\frac{\tau_0}{\rho f_0 U D\varepsilon}\right]\mathbf{k}\cdot\mathrm{curl}\,\boldsymbol{\tau}-\frac{r}{2}\zeta_0, \tag{6.3.21}$$

其中

$$\eta_0=p_0,$$
$$\eta_B=\frac{h_B}{D\varepsilon},$$

以及 $r=E_V^{1/2}/\varepsilon$。由于对均质流体而言，不象 $\rho\neq 0$ 的情况那样，$F\ll 1$ 对于简化连续方程是个关键性的条件，所以我们保留了 $O(F)$ 的自由面项。重要的问题是，与(5.2.16)式[1]相比，(6.3.21)式恰好为均质流体涡度方程的β 平面模式。这就是说，用地转动力学的概念，作为确定 $O(1)$ 变量的控制方程的地转近似(6.3.6a,b)和位涡方程(6.3.21)式，恰好是在具有线性变化的 f 平面上的运动方程。甚至当 $\tan\theta_0$ 为 $O(1)$ 时，即当 $O(\varepsilon)$ 动量方程(6.3.13a, b) 不能被 β 平面精确模拟时，它仍然是正确的。所以，至少对于均质模式我们已证明，地球球状对 $O(1)$ 场的唯一影响完全由 β 项造成，即由 f 随纬度的变化造成。在下一节中，我们将把这个结果推广到层结流体的情况。

6.4 静力稳定度概念

完成对准地转运动方程的推导，需要用 $O(1)$ 地转场来表示小的垂直速度 εw_1。这是一个微妙的问题，在直接着手处理这个问题以前，我们在本节先建立与垂直速度有密切关系的静力稳定度的概念。

首先考虑处于静止状态的大气，即其等压面和等密度面为等 z[2] 面的最低阶平衡状态。然后，考虑如图 6.4.1 所示的流体元 A 向上移到流体元 B 所处的高度。设位移一方面足够慢，使 A 的压力可不断地调整到与环境相同的压力（这只要求 A 的移动速度远小于局部声

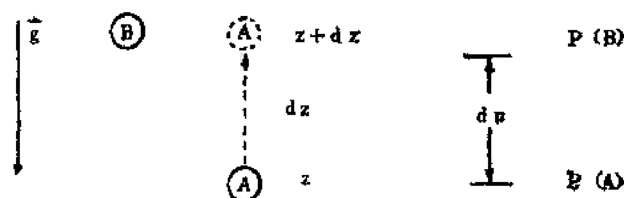


图 6.4.1

位于 z 高度的流体元 A 缓慢地上升到流体元 B 所在的高度 $z+dz$。在位移过程中，流体元的位温不变。由于 $p(B)\neq p(A)$，故其温度和密度改变。这个密度变化，再加上差值 $\rho(A)-\rho(B)$，可给出(6.4.7)式所示的、作用在A上的浮力。

---

(1) 在该情况下，(5.2.16) 式中与 R_0^{-1} 成比例的项已被略去，但这不是本质上的差别。如果选择参数的尺度，使之 $E_H=O(\varepsilon)$，那末在(6.3.21)式中包含与(5.2.16)式中相同的粘性项。

(2) 在本节中无其他说明时，变量用有量纲单位。

速)，另一方面又快到足以忽略位移过程中的热力耗散或加热作用，即在位移过程中，A绝热（等熵）地移到新的高度。按照(1.4.18)式，这意味着位温

$$\theta=T\left(\frac{p_0}{p}\right)^{R/C_p} \tag{6.4.1}$$

在位移过程中守恒。利用理想气体定律(1.4.16)，我们可把(6.4.1)式写成

$$\rho=\frac{p_0}{R\theta}\left\{\frac{p}{p_0}\right\}^{1/\gamma}, \tag{6.4.2}$$

其中

$$\gamma=\frac{C_p}{C_v}$$

是空气的定压比热与定容比热之比。对于空气，$\gamma=1.4$。于是在 $z+dz$ 的高度上，流体元A由于位移过程中的压力减小而产生的密度改变量为

$$\Delta\rho_A=\frac{1}{\gamma}\frac{p_0}{R\theta}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/\gamma}\frac{\partial p}{\partial z}\frac{dz}{p}, \tag{6.4.3}$$

所以，在 $z+dz$ 高度处，流体元 A 的新密度为

$$\rho_A+\Delta\rho_A=\rho_A(z)+\frac{1}{\gamma}\frac{\rho}{p}\frac{\partial p}{\partial z}dz. \tag{6.4.4}$$

另一方面，流体元 B 的密度可以用未受扰动时 z 高度处 A 的密度来表示，即

$$\rho_B=\rho_A(z)+\frac{\partial\rho}{\partial z}dz. \tag{6.4.5}$$

因此，流体元 A 在 $z+dz$ 处，其密度超过新环境值的量为

$$(\rho_A+\Delta\rho_A)-\rho_B=\left(\frac{1}{\gamma}\frac{\rho}{p}\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)dz. \tag{6.4.6}$$

由该密度差所引起的单位质量的恢复力之大小为

$$\frac{g}{\rho}\{\rho_A+\Delta\rho_A-\rho_B\}=g\left\{\frac{1}{\gamma p}\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial z}\right\}dz=\frac{g}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z}dz. \tag{6.4.7}$$

因此，若 $\partial\theta/\partial z>0$，则浮力是恢复力，并且对于小的等熵垂直运动来说，静力状态是稳定的。$(1/\theta)\partial\theta/\partial z$ 这个量叫做静力稳定度。由于(6.4.7)式中的恢复力与位移成正比，因此意味着流体元在平衡高度上下作振荡，其频率为

$$N=\left(\frac{g}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)^{1/2}. \tag{6.4.8}$$

N叫做布伦特-维赛拉频率（Brunt-Väisälä frequency）。它一般是高度的函数。若用温度表示的话，从(6.4.1)式得

$$\frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z}=\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial z}-\frac{R}{C_p}\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial z}, \tag{6.4.9}$$

并且，由于对大气的静力状态有

$$\frac{\partial p}{\partial z}=-\rho g, \tag{6.4.10}$$

所以(6.4.9)式变为

$$\frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z}=\frac{1}{T}\left[\frac{\partial T}{\partial z}+\frac{g}{C_p}\right]. \tag{6.4.11}$$

因此，即使 $\partial T/\partial z<0$，只要递减率 $-\partial T/\partial z$ 不大于 g/C_p，则大气仍是静力稳定的。图6.4.2给出大气冬季和夏季的 $T(z)$ 与 $N^2(z)$ 的典型廓线。在对流层中，$\partial T/\partial z<0$（且在那里出现"天气"现象），N为 $O(10^{-2}/秒)$，并且(在约 10 公里高度处)进入平流层后就剧烈增加，

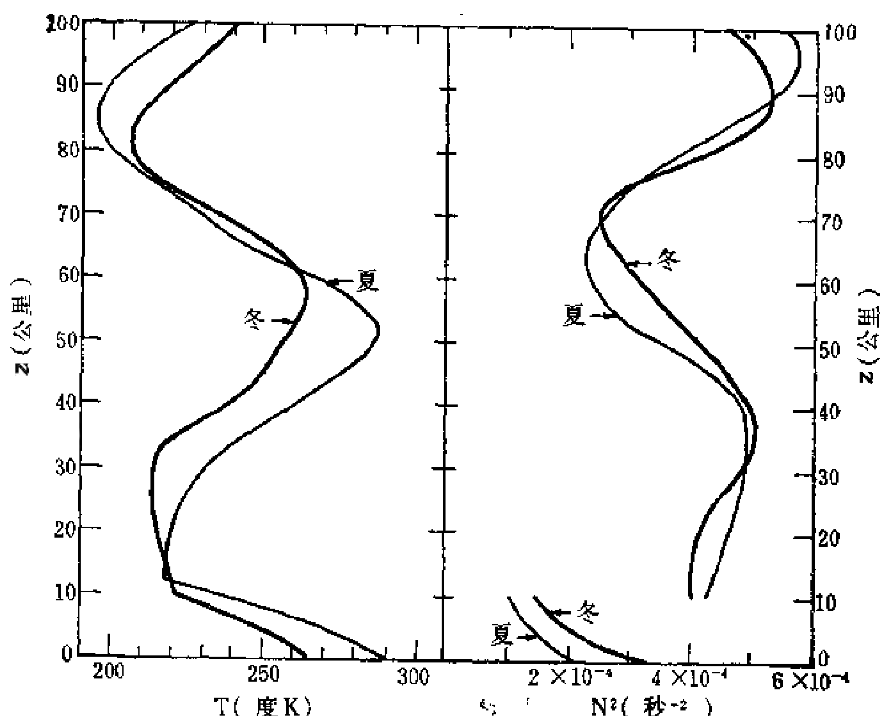


图 6.4.2

(a) 大气中冬夏温度的垂直分布。(b) 相应的 $N^2(z)$ 之分布。(根据 Charney 和 Drazin (1961) 复印)

这是由于平流层下界处递减率突然减小而造成的。(对流层的这个上界称为对流层顶。) 因为 $N\gg f$，所以(6.4.7)和(6.4.8)式所表示的振荡构成了缓变的大尺度地转运动中的高频振荡；而且，局限于研究特征频率 $\ll f$ 的主要运动之地转理论，并不直接研究这种振荡。然而，正如我们将要看到的，$N\neq 0$ 之存在强烈地抑制大尺度垂直运动，并且以一种重要方式把大尺度的小垂直运动与 $O(1)$ 地转场耦合起来。

对于海洋，流体元在小位移过程中所受到的可压缩性影响可以忽略，直接用平衡密度分布便可给出布伦特-维赛拉频率：

$$N=\left\{-\frac{g}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial z}\right\}^{1/2}. \tag{6.4.12}$$

图6.4.3给出海洋中密度随深度变化的示意廓线。在一个具有 $O(100米)$、浅的、基本上均质的风混合层以下，在 $O(700米)$ 深度处的密度跃层区密度剧烈增加，而在深水中密度相当均匀。相应地，在海面附近和很深的水域，N是小量，而在密度跃层处有一个 $O(10^{-3}/秒)$ 的明显的极大值。

注意，对于大气，若 D 为10公里，则

$$\frac{D}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z}=\frac{N^2D}{g}O(10^{-1}), \tag{6.4.13}$$

而对于海洋，

$$-\frac{D}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial z}=\frac{N^2D}{g}=O(10^{-3}). \tag{6.4.14}$$

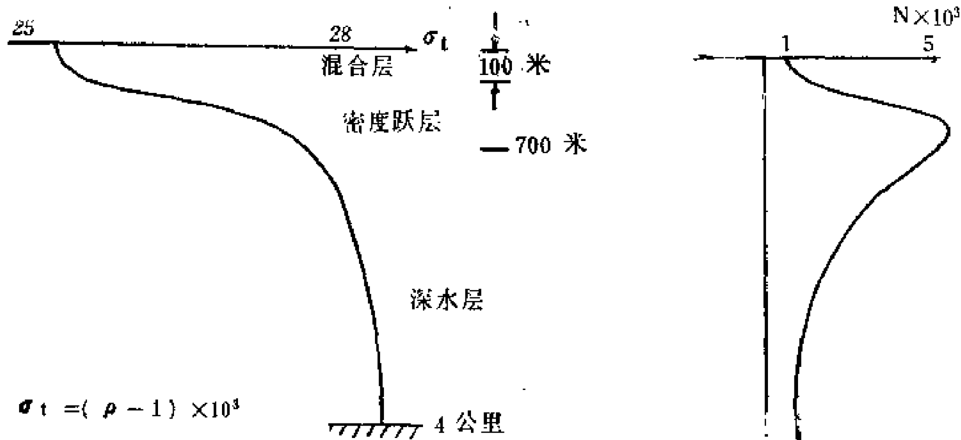


图6.4.3　海洋中密度的典型分布及相应的$N(z)$。

在大气的情况下，θ 在 D 上的变化虽则重要，但很小〔然而 $(D/\rho)\partial\rho/\partial z$ 为 $O(1)$〕；可是对于海洋，密度本身在海洋深度上的总变化是小量。然而，尽管层结很弱，但它对流体的重力稳定性来说却是至关紧要的。

6.5　大气中天气尺度运动的准地转位涡方程

我们现在回过头来继续对 $\beta=O(1)$，$\varepsilon\ll1$ 的情况作尺度分析。为了作出完整的动力学描述，必须把 (6.3.17) 式中的 w_1 与 $O(1)$ 地转动力学变量联系起来。我们先考虑大气运动的情况，并对位温 θ_*(1) 作恰当的尺度分析。由于根据(6.4.2)式有

$$\ln\theta_*=\frac{1}{\gamma}\ln p_*-\ln\rho_*+\text{常数}, \tag{6.5.1}$$

所以从(6.2.18)和(6.2.21)式得

$$\ln\theta_*=\left(\frac{1}{\gamma}\ln p_S-\ln\rho_S\right)+\frac{1}{\gamma}\ln\left[1+\varepsilon\frac{f_0^2L^2p}{p_S/\rho_S}\right]-\ln[1+\varepsilon F\rho]$$

$$=\frac{1}{\gamma}\ln p_S(z)-\ln\rho_S(z)+\frac{1}{\gamma}\varepsilon\frac{f_0^2L^2}{p_S/\rho_S}p-\varepsilon F\rho+O(\varepsilon^2F). \tag{6.5.2}$$

因此，在(6.5.2)式启发下，我们把 θ_* 表示为（如同对 ρ_* 所作的）静止状态值 $\theta_S(z)$ 与一个依赖于运动的 $O(\varepsilon F)$的小偏差之和，即

$$\theta_*=\theta_S(z)(1+\varepsilon F\theta(x,y,z,t)), \tag{6.5.3}$$

其中

(1)　在本节中我们对于有量纲变量恢复星号标记。

$$\ln\theta_S(z)\equiv\frac{1}{\gamma}\ln p_S(z)-\ln\rho_S(z)+\text{常数}.$$

因此，若用一个 ε 级数把 θ 展开，

$$\theta=\theta_0+\varepsilon\theta_1+\cdots, \tag{6.5.4}$$

则从(6.5.2)式得

$$\theta_0=-\rho_0+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{\rho_S gD}{p_S}\right)p_0. \tag{6.5.5}$$

但是根据(6.3.6c)和下面的关系式（利用以有量纲变量表示的(6.2.15))：

$$gD\rho_S=-\frac{\partial p_S}{\partial z},$$

我们求出

$$\theta_0=\frac{\partial p_0}{\partial z}-p_0\frac{1}{\theta_S}\frac{\partial\theta_S}{\partial z}. \tag{6.5.6}$$

根据(6.4.13)式，

$$\frac{1}{\theta_S}\frac{\partial\theta_S}{\partial z}=\frac{D}{\theta_S}\frac{\partial\theta_S}{\partial z_*}=O(10^{-1})=O(\varepsilon), \tag{6.5.7}$$

得

$$\boxed{\theta_0=\frac{\partial p_0}{\partial z}}. \tag{6.5.8}$$

(6.3.6c)显然是只要 $\delta\ll 1$[1] 时都适用的流体静力近似。而且，在(6.5.8)式中使用位温偏差是一种比较简洁的表达。

若把(6.5.3)式代入(6.2.4)式中，所得的无量纲方程为

$$\frac{d\theta}{dt}+\frac{w}{\varepsilon F\theta_S}\frac{\partial\theta_S}{\partial z}(1+\varepsilon F\theta)=\frac{\theta}{\theta_S}\left(\frac{\mathscr{H}_*}{C_pT_*}\right)\frac{gD}{U^2f_0}, \tag{6.5.9}$$

其中 $\mathscr{H}_*$ 为各流体元的总加热率，根据(6.2.4)式，

$$\mathscr{H}_*=\frac{k}{\rho_*}\nabla^2T_*+Q_*. \tag{6.5.10}$$

对于对流层，$C_pT_*=O(gD)=O(200\text{厘米}^2/\text{秒}^2)$；因此，若 $U=O(10\text{米}/\text{秒})$，则(6.5.9)式与加热率 $\mathscr{H}_*\leqslant O(v^2f_0)=10^2\text{厘米}^2/\text{秒}^3$ 是一致的。定义

$$\mathscr{H}=\mathscr{H}_*\frac{gD}{C_pT_*f_0U^2}; \tag{6.5.11}$$

于是，对 ε 的最低阶应用(6.3.12)式后，(6.5.9)式就变为

$$\boxed{\frac{d_0\theta_0}{dt}+w_1S=\mathscr{H}}, \tag{6.5.12}$$

---

(1) 注意，根据(6.2.24c)式，由于 w 为 $O(\varepsilon)$，在一平面中的流体静力近似只要求 $\varepsilon^2\delta^2\ll 1$，所以对于平面的小 ε，在 $\delta=O(1)$ 的情况下，(6.3.6c)式仍然适用。这对于实验室模拟大气运动具有实际意义，即模拟不必限于形态比为小量的系统。但是，为了能略去球面上科氏加速度垂直分量的影响，(6.3.6c)式要求 $\delta\ll 1$。

其中层结参数

$$\boxed{S(z)=\frac{F^{-1}}{\theta_S}\frac{\partial\theta_S}{\partial z}=\frac{\mathcal{N}_S^2D^2}{f_0^2L^2}} \tag{6.5.13}$$

为 $O(1)$，而 N_S 是静止大气的布伦特-维赛拉频率，即

$$\mathcal{N}_S^2=\frac{g}{\theta_S}\frac{d\theta_S}{dz_*}=\frac{1}{D}\frac{g}{\theta_S}\frac{d\theta_S}{dz}. \tag{6.5.14}$$

算子 d_0/dt 由(6.3.18)式给出。对于天气尺度的大气运动，由于 F 同 $(1/\theta_S)\partial\theta_S/\partial z$ 一样为 $O(\varepsilon)$，所以 $S(z)$ 为 $O(1)$。在我们考虑的大多数问题中，在平流时间 L/U 内热量的增加是小量，因而加热作用一般被略去。

一般从(6.5.12)式可解出 w_1：

$$w_1=\left\{\mathscr{H}-\frac{d_0}{dt}\theta_0\right\}\frac{1}{S}, \tag{6.5.15}$$

把 w_1 代入(6.3.17)，以计算出 w_1 造成的涡管伸长，即

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho_S}\frac{\partial}{\partial z}\rho_S w_1&=\frac{1}{\rho_S}\frac{\partial}{\partial z}\left\{\rho_S\left[\frac{\mathscr{H}}{S}-\frac{1}{S}\frac{d_0\theta_0}{dt}\right]\right\}\\&=\frac{1}{\rho_S}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\rho_S\mathscr{H}}{S}-\frac{1}{\rho_S}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho_S}{S}\frac{d_0\theta_0}{dt}\right)\\&=\frac{1}{\rho_S}\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\rho_S\mathscr{H}}{S}\right]-\frac{1}{\rho_S}\frac{d_0}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho_S}{S}\theta_0\right)\right]\\&\quad+S^{-1}\left(\frac{\partial u_0}{\partial z}\frac{\partial\theta_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial z}\frac{\partial\theta_0}{\partial y}\right).\end{aligned} \tag{6.5.16}$$

地转近似(6.3.6a,b)式与流体静力近似联立，得热成风方程

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial u_0}{\partial z}&=-\frac{\partial\theta_0}{\partial y}\\\frac{\partial v_0}{\partial z}&=\frac{\partial\theta_0}{\partial x}\end{aligned}} \tag{6.5.17}$$

把这些关系式应用到(6.5.16)式右端最后一项，结果表明该项恒为零。因此，涡度方程(6.3.17)式可以写为

$$\frac{d_0}{dt}\left[\zeta_0+\beta y+\frac{1}{\rho_S}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho_S}{S}\theta_0\right)\right]=\frac{1}{\rho_S}\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\rho_S\mathscr{H}}{S}\right], \tag{6.5.18}$$

在无加热作用时，它变为守恒定律：

$$\frac{d_0}{dt}\left[\zeta_0+\beta y+\frac{1}{\rho_S}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho_S}{S}\theta_0\right)\right]=0. \tag{6.5.19}$$

地转近似和静力近似使我们可以用

$$\psi=p_0 \tag{6.5.20}$$

来表示(6.5.19)式中每个因变量，所以(6.5.19)式变为基本运动方程，即

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right]\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{1}{\rho_S}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho_S}{S}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)+\beta y\right]=0 \tag{6.5.21}$$

(6.5.21)与(3.12.30)式之比较结果表明，(6.5.21)式是均质流体准地转位涡方程(3.12.30)对于球面上层结流体的推广。如果我们注意到 $S^{1/2}$ 是几何尺度 L 与固有长度

$$L_D=\frac{N_S D}{f_0}=\frac{(g' D)^{1/2}}{f_0} \tag{6.5.22}$$

之比，这种推广则将进一步明确，(6.5.22) 式中的

$$g'=\frac{gD}{\theta_S}\frac{\partial\theta_S}{\partial z_*}$$

是"约化重力"，即受浮力作用之流体元的有效重力加速度。长度 L_D 称为内罗斯贝变形半径，在上下文意思清楚时，就简单地称为变形半径，注意 L_D 与外变形半径 R 之比为

$$\frac{L_D}{R}=\left(\frac{1}{\theta_S}\frac{\partial\theta_S}{\partial z}\right)^{1/2}\ll 1. \tag{6.5.23}$$

天气尺度大气运动的控制方程 (6.5.21) 〔或其推广形式 (6.5.18)〕完全是用 $O(1)$ 压力场 p_0 来写的。p_0 或 ψ 一经确定，可直接从(6.3.6a,b,c)、(6.5.8)和(6.5.15)得出 u_0、v_0、ρ_0、θ_0 和 w_1。

在讨论(6.5.21)式的相应边界条件以前，先推导它与厄台尔定理 (Ertel's theorem) 2.5.8)、(2.5.9) 之关系，在 $\mathscr{H}=0$ 的情况下，位温是个守恒量，所以 (2.5.8) 式中的 λ 与 θ_* 等价。因此，有量纲的位涡为

$$\Pi_*=\frac{\boldsymbol{\omega}_{*a}\cdot\nabla\theta_*}{\rho_*}, \tag{6.5.24}$$

其中

$$\boldsymbol{\omega}_{*a}=(f_0+\beta_0 y_*+\zeta_*)\mathbf{k}+\mathbf{i}\xi_*+\mathbf{j}(\eta_*+f_0\cot\theta_0). \tag{6.5.25}$$

单位矢量 $\mathbf{i}$、$\mathbf{j}$ 和 $\mathbf{k}$ 分别指向东、向北和向上，并且 ζ_*、ξ_* 和 η_* 是涡度的垂直和水平分量。(6.5.25)中的第一项是涡度的垂直分量，而第二、三项为水平分量（包括行星涡度的向北分量）。如果 Π_* 用无量纲单位表示，那末借助(6.5.3)式便得

$$\Pi_*=\left[\frac{f_0/D}{\rho_S(1+\varepsilon F\rho)}\right]\left\{[1+\varepsilon(\zeta+\beta y)]\left[\frac{\partial\theta_S}{\partial z}+\varepsilon F\frac{\partial}{\partial z}(\theta\theta_S)\right]\right.$$
$$\left.+\varepsilon F\left[\varepsilon\xi\frac{\partial\theta}{\partial x}+\varepsilon\eta\frac{\partial\theta}{\partial y}+\varepsilon\delta\cot\theta_0\frac{\partial\theta}{\partial y}\right]\right\}. \tag{6.5.26}$$

而用无量纲单位表示的算子 d/dt_* 为

$$\frac{d}{dt_*}=\frac{U}{L}\left[\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}\right]. \tag{6.5.27}$$

如果只保留 $O(\varepsilon^2,\ \varepsilon F,\ \varepsilon\partial\theta_S/\partial z)$ 项，则守恒表达式

$$\frac{d}{dt_*}\Pi_*=0 \tag{6.5.28}$$

变为

$$\frac{d_0}{dt}(\zeta_0+\beta y)+\frac{F}{(\rho_0/\theta_S)\partial\theta_S/\partial z}\frac{d_0}{dt}\frac{\partial\theta_0}{\partial z}+\frac{\rho_S w_1}{\partial\theta_S/\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\theta_S/\partial z}{\rho_S}\right)=0, \tag{6.5.29}$$

或利用(6.5.15)式的绝热形式，有

$$\frac{d_0}{dt}(\zeta_0+\beta y)+\frac{1}{S}\frac{d_0}{dt}\frac{\partial\theta_0}{\partial z}-\frac{\rho_S}{S^2}\left(\frac{d_0}{dt}\theta_0\right)\frac{\partial}{\partial z}\frac{S}{\rho_S}=0, \tag{6.5.30}$$

或把最后两项合并，得

$$\frac{d_0}{dt}\left(\zeta_0+\beta y+\frac{1}{\rho_S}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\rho_S}{S}\theta_0\right)=0, \tag{6.5.31}$$

它与(6.5.19)式一致。

因此，天气尺度大气运动的控制运动方程是准地转位涡方程，即它是位涡守恒之表达式，其中，使用地转近似和流体静力近似，并通过压力来计算水平速度和位温。并且，β平面近似是可以用的，其中仅有$O(1)$球形效应引起行星涡度对位势涡度贡献之线性变化。非常重要的一点是应注意，尽管涡度的水平分量远大于相对涡度的垂直分量（其比例系数是L/D），但正是相对涡度的垂直分量依靠基本层结的作用，作为影响动力学性质的控制因子而进入位涡方程。还必须注意，地转并不要求$\theta_S^{-1}(d\theta_S/dz)=O(\varepsilon)$，即$S=O(1)$。如果$S$远小于1，则(6.5.15)只不过变成一个$w_1$的不适当的方程。事实上，若$S\to 0$，则应当用位涡方程的均质形式来代替。另一方面，若$S$非常大（即若层结非常稳定），则$w_1\to 0$，涡管伸长机制基本上消失，而(6.5.21)式就化为绝对涡度$\zeta_0+\beta y$守恒之表达式。

最后，为了进一步作参考，可把(6.5.21)式用有量纲单位表示为

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_*}+u_*\frac{\partial}{\partial x_*}+v_*\frac{\partial}{\partial y_*}\right]\left\{\zeta_*+\beta_0 y_*+\frac{1}{\rho_S}\frac{\partial}{\partial z_*}\left[\frac{f_0^2}{N_S^2}\rho_S\frac{\partial}{\partial z}\frac{\delta p_*}{\rho_S}\right]\right\}=0, \tag{6.5.32}$$

其中

$$\delta p_*=p_*(x,y,z,t)-p_S(z), \tag{6.5.33}$$

和

$$\begin{aligned}
u_*&=-\frac{1}{\rho_S f_0}\frac{\partial\delta p_*}{\partial y_*},\\
v_*&=\frac{1}{\rho_S f_0}\frac{\partial}{\partial x_*}\delta p_*,\\
\zeta_*&=\frac{1}{\rho_S f_0}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_*^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_*^2}\right)\delta p_*.
\end{aligned} \tag{6.5.34}$$

请再次注意，地转关系(6.5.34)式仅包含f_0，即仅包含科氏参数的不变部分。

6.6 层结流体中的艾克曼层

对于均质流体，抽自艾克曼层的垂直速度，构成给定固体面上内区垂直速度边界条件的基本成分。我们在本节将考察，如果有层结的话，那末它的存在对艾克曼层，尤其是艾克曼垂直速度将起什么作用？

我们利用6.2节中所讨论的$O(1)$动量方程的β平面近似。如同第四章中所作的，我们进一步假定，在下边界附近，对摩擦力的主要贡献可表示为

$$\frac{\mathscr{F}_{*\phi}}{\rho_* U f_0}=\frac{A_V}{f_0 D^2}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\equiv\frac{E_V}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$
$$\frac{\mathscr{F}_{*\theta}}{\rho_* U f_0}=\frac{A_V}{f_0 D^2}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\equiv\frac{E_V}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}. \tag{6.6.1}$$

设在 $z=0$ 面（即大气下边界）存在一个普通的艾克曼层。引进边界层坐标：

$$\zeta=\frac{2}{E_V{}^{1/2}},$$

并在边界层中写出作为 x、y 和 ζ 之函数的所有变量，根据(6.2.24a,b)，得出精确到 $O(\varepsilon,\delta,L/r_0)$ 的下述 $O(1)$ 方程

$$-\tilde{v}_0=-\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\tilde{u}_0}{\partial\zeta^2}, \tag{6.6.2a}$$

$$\tilde{u}_0=-\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\tilde{v}_0}{\partial\zeta^2}, \tag{6.6.2b}$$

其中符号"～"表示 $z=0$ 附近所假定的艾克曼层中的动力场变量。方程(6.6.2a,b)等价于(4.5.25a,b)，即等价于均质流体的艾克曼层方程。但关键问题是，$\tilde{p}_0$ 是否象均质流体一样与 ζ 无关，或密度变化之存在是否产生 $O(1)$ 的 $\partial\tilde{p}_0/\partial\zeta$。连续方程变为

$$\frac{\partial\tilde{w}}{\partial\zeta}=-E_V{}^{1/2}\left(\frac{\partial\tilde{u}_0}{\partial x}+\frac{\partial\tilde{v}_0}{\partial y}\right), \tag{6.6.3}$$

它意味着艾克曼层中的 $\tilde{w}$ 为 $O(E_V{}^{1/2})$。这使我们可根据流体静力近似来估计 $\partial\tilde{p}_0/\partial\zeta$，在形态比小于内区的艾克曼层中，静力近似肯定适用。因此，

$$\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\zeta}=E_V{}^{1/2}\tilde{\theta}_0. \tag{6.6.4}$$

另一方面，根据(6.5.12)和(6.3.12)式有

$$\tilde{\theta}_0=O(w_1 S)=O\left(\frac{w}{\varepsilon}S\right)=O\left(E_V{}^{1/2}\frac{S}{\varepsilon}\right), \tag{6.6.5}$$

所以，

$$\frac{\partial\tilde{p}_0}{\partial\zeta}=O\left(E_V\frac{S}{\varepsilon}\right). \tag{6.6.6}$$

因此，只要

$$E_V<O\left(\frac{\varepsilon}{S}\right), \tag{6.6.7}$$

则 $\tilde{p}_0$ 将在整个艾克曼层深度上不变，并且均质艾克曼层模式仍适用于层结流体。尤其是根据(4.5.39)式有

$$w(x,y,0)=\varepsilon w_1(x,y,0)=\frac{E_V{}^{1/2}}{2}\zeta_0(x,y,0),$$

或在下边界处，

$$w_1(x,y,0)=\frac{E_V{}^{1/2}}{2\varepsilon}\zeta_0(x,y,0) \tag{6.6.8}$$

存在地形坡度时，根据(4.3.36)式有

$$w_1(x,y,0)=\frac{E_V^{1/2}}{2\varepsilon}\zeta_0(x,y,0)+\mathbf{u}_0\cdot\nabla\left(\frac{h_B}{\varepsilon D}\right), \tag{6.6.9}$$

其中 $h_B(x,y)$ 是在参考高度 $z=0$ 以上的下边界的高度。这是用于(6.5.21)或(6.5.18) 式的下边界条件。利用(6.5.12)式，则以 ψ 来表示的(6.6.9)式变为

$$S^{-1}\left(\frac{d_0}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)_{z=0}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\eta_B}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\eta_B}{\partial x}-\frac{E_V^{1/2}}{2\varepsilon}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)+\frac{\mathscr{H}(x,y,0)}{S}. \tag{6.6.10}$$

6.7 位涡方程的边界条件：大气

在地球表面，(6.6.10)式提供了准地转位涡方程的边界条件。上边界条件是个比较复杂的问题。虽然大多数与能量“天气”有关的天气尺度运动在很大程度上限于对流层，但大气并没有上面的边界。我们将把上边界条件的数学公式留到6.12节中讨论，而用物理术语可把它作如下叙述。对于本书要讨论的运动，或者是运动的能量振幅在 z 趋于无穷大时一定衰减到零，或者若振幅保持有限而非零的话，则运动能通量一定朝上。

6.8 海洋中天气尺度运动的准地转位涡方程

对于 $\beta=O(1)$ 和 $\varepsilon\ll1$ 的海洋运动，与大气中相应的运动一样，(6.3.17) 式为 $O(1)$ 涡度方程。但是对于海洋运动，其热力学方程是(6.2.7)式而不是(6.2.4)式，并且完全用密度来表示。由于根据(6.2.21)式有

$$\rho_*=\rho_S(z)\{1+\varepsilon F\rho\}, \tag{6.8.1}$$

所以(6.2.7)式变为（以无量纲形式）

$$\varepsilon F\frac{d\rho}{dt}+\frac{w}{\rho_S}\frac{\partial\rho_S}{\partial z}(1+\varepsilon F\rho)=-\frac{\mathscr{H}_*L}{U}, \tag{6.8.2}$$

其中

$$\mathscr{H}_*=-\frac{\kappa\nabla^2\rho_*}{\rho_S}+\frac{\alpha\rho_0}{C_p}Q.$$

在海洋中，密度场在整个大洋深度范围内的变化只有千分之几。所以，如(6.4.14)式所示，

$$\frac{D}{\rho_S}\frac{\partial\rho_S}{\partial z_*}=\frac{1}{\rho_S}\frac{\partial\rho_S}{\partial z}=O(10^{-3})=O(F)=O(\varepsilon).$$

因此，对于 ε 展式的最低阶，(6.8.2)式变为

$$-\frac{d_0\rho_0}{dt}+w_1S=\mathscr{H}, \tag{6.8.3}$$

其中，

$$\mathscr{H}=\frac{\mathscr{H}_*}{(U^2/gD)f_0} \tag{6.8.4}$$

和

$$S=\frac{N_S^2D^2}{f_0^2L^2}=O(1).$$

在这种情况下，布伦特-维赛拉频率由(6.4.12)式给出，即

$$N_S=\left\{-\frac{g}{\rho_S}\frac{\partial\rho_S}{\partial z_*}\right\}^{1/2}. \tag{6.8.5}$$

(6.8.3)式与(6.5.12)式的相似性是非常明显的。由于$(1/\rho_S)\partial\rho_S/\partial z$是小量，所以流体静力近似(6.3.6c)式变为

$$\rho_0=-\frac{\partial p_0}{\partial z}, \tag{6.8.6}$$

它相当于大气中的(6.5.8)式。热成风方程变为

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_0}{\partial z}&=\frac{\partial\rho_0}{\partial y},\\ \frac{\partial v_0}{\partial z}&=-\frac{\partial\rho_0}{\partial x},\end{aligned} \tag{6.8.7}$$

若以$-\rho_0$代替θ_0，则它与(6.5.17)式完全相同。如果用(6.8.3)和(6.8.7)式来计算(6.3.17)式中的涡管伸长项，再次利用$(1/\rho_S)\partial\rho_S/\partial z$为小量之特性，则我们得到

$$\frac{d_0}{dt}\left\{\zeta_0+\beta y-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho_0}{S}\right)\right\}=\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\mathscr{H}}{S}\right]. \tag{6.8.8}$$

在无加热作用时，(6.8.8)式变为守恒律：

$$\frac{d_0}{dt}\left\{\zeta_0+\beta y-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho_0}{S}\right)\right\}=0, \tag{6.8.9}$$

利用地转近似和静力近似，它可以完全用地转流函数

$$\psi=p_0 \tag{6.8.10}$$

来表示，即

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right]\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{S}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)+\beta y\right]=0. \tag{6.8.11}$$

比较(6.8.11)与(6.5.21)式可以看出，海洋天气尺度运动的控制运动方程，与大气天气尺度运动的控制运动方程完全相同，只不过作了一个进一步的简化，即基本密度场除了它对静力稳定度参数S有贡献的情况外，可以取为常数。大气和海洋中天气尺度运动的控制运动方程之间的显著相似，为描述和理解大气和海洋这两种流体的天气尺度运动，提供了一个统一的地球物理流体力学的基本框架。在这两种流体中，动力学过程由位涡守恒来确定，其中水平速度和热力学变量一致地用地转近似和静力近似来估计，并且，科氏参数除了引起对总位涡有贡献的行星涡度线性变化以外可取为常数。在该二系统中，层结效应用S来计量，S可写为

$$S=\left(\frac{L_D}{L}\right)^2,$$

其中

$$L_D=\frac{N_S D}{f_0},$$

而 L 是运动的空间尺度．对于大气的天气尺度运动，$L_D=O(10^3$公里)，而对于海洋，$L_D=O(100$公里)。在这两种流体中，$\beta=O(1)$ 的条件要求，L 在大气中为 $O(1,000$公里)，而在海洋中为 $O(100$公里)。因此，对于大气和海洋的天气尺度运动，L 为 $O(L_D)$。这意味着可变的行星涡度、相对涡度和由热力场引起的位势涡度，都具有相同的量级。事实上，把相对涡度动力学与热力学连接起来的条件，恰好为 $S=O(1)$ 的条件。然而必须记住，$\beta=O(1)$ 和 $S=O(1)$ 都是观测事实，而不是预先要求的。大气和海洋中的天气尺度运动，原则上都可具有 $\beta=O(1)$ 和或大或小的 S，或者，$S=O(1)$ 和不为 $O(1)$ 的 β。有利于这些尺度运动的基本机制尚未讨论过。我们在此要说明的是，不管海洋和大气中产生天气尺度运动的机制如何，都可以用同一个理论框架来描述它们的动力学特征。

最后应当注意，虽然位涡方程是一个完全的三维偏微分方程（即 ψ 是整个三维空间的函数），但方程(6.5.21)和(6.8.11)仍具有强烈的二维特性。由于 w 为小量，所以方程中只显含水平速度的地转位涡平流。

6.9 位涡方程的边界条件：海洋

与大气中的情况一样，(6.6.9) 和 (6.6.10)式也适用于海洋的下边界。上边界处的边界条件当然不同，因为海洋的高度是有限的，而海洋与其上大气之间非常显著的密度差异，对于机械能向上输送是一个非常有效的障碍。正如 6.6 节中所看到的，容易证明艾克曼层不受层结影响。我们考虑在 $z_*=h_*=O(D)$ 处的上界面情况。用无量纲单位，上边界条件为 (4.10.18)式，即

$$w(x,y,h_*/D)=\frac{d}{dt}\left(\frac{h_*}{D}\right)+\frac{\tau_0}{\rho_S f_0 U D}\boldsymbol{k}\cdot\text{curl}\boldsymbol{\tau},\tag{6.9.1}$$

其中，上边界处的外加应力为

$$\boldsymbol{\tau}_*=\tau_0\boldsymbol{\tau}.\tag{6.9.2}$$

在上边界处，海洋的压力必须与由大气施加的外压力 p_{*a} 匹配，即在 $z=\frac{h_*}{D}$ 处，

$$p_*=p_S(z)+\rho_S U f_0 L p=p_{*a}(x,y,t),\tag{6.9.3}$$

我们把 h_* 写成

$$h_*=D(1+\mu\eta),\tag{6.9.4}$$

其中 $\eta(x,y,t)$ 是上界面的无量纲偏差，而 μ 是一个（至今）尚未确定的、尺度分析得出的常数。但是，我们希望 μ 将是小量．因此，上边界位于 $z=1+\mu\eta(x,y,t)$ 处。利用泰勒级数展开式，即在运动中仅保留线性的一阶项，则在 $z=1$ 处(6.9.3)式可以改写为

$$p_*\left(x,y,\frac{h_*}{D}\right)=p_S(1)+\frac{\partial p_S}{\partial z}\mu\eta+\cdots+\rho_S U f_0 L p(x,y,1)+\cdots=p_{*a}.\tag{6.9.5}$$

但由于

$$\frac{1}{D}\frac{\partial p_S}{\partial z}=-\rho_S g,\tag{6.9.6}$$

得出在 $z=1$ 处，

$$\mu\eta=\frac{Uf_0L}{gD}p(x,y,1)-\frac{p_{*a}-p_S(1)}{\rho_S gD}. \quad (6.9.7)$$

因此，对于μ的相应选择为

$$\mu=\frac{Uf_0L}{gD}=\varepsilon F. \quad (6.9.8)$$

于是自由面由下式表示，

$$h_*=D(1+\varepsilon F\eta), \quad (6.9.9)$$

其中

$$\eta=p(x,y,1,t)+\frac{p_S(1)-p_{*a}}{\rho_S f_0 UL}. \quad (6.9.10)$$

所以，精确到ε的最低阶时，上边界条件变为

$$w(x,y,1,t)=\varepsilon w_1(x,y,1,t)=\varepsilon F\frac{d_0}{dt}p_0(x,y,1,t)$$

$$+\frac{\tau_0}{\rho_S f_0 UD}\mathbf{k}\cdot\mathrm{curl}\,\tau+\frac{1}{gD\rho_S}\frac{d_0}{dt}[p_S(1)-p_{*a}], \quad (6.9.11)$$

或

$$w_1(x,y,1,t)=F\frac{d_0\psi}{dt}+\frac{\tau_0}{\varepsilon\rho_S f_0 UD}\mathbf{k}\cdot\mathrm{curl}\,\tau-\frac{1}{gD\varepsilon}\frac{d_0}{dt}\frac{p_{*a}}{\rho_S}. \quad (6.9.12)$$

现在，我们根据前面对大气的分析可以估计

$$p_{*a}=O(\rho_{*a}U_a f_0 L_a),$$

其中下标a指大气的尺度。并且，变量p_{*a}的水平尺度是$L_a=O(1,000$公里)，而不是$L=O(100$公里)，所以，

$$\frac{1}{gD\varepsilon}\frac{d_0 p_{*a}}{dt}=O\left(\frac{\rho_{*a}U_a}{\rho_S U}\right)\frac{f_0^2L^2}{gD}=O(10^{-3}). \quad (6.9.13)$$

大气与海洋的单位体积动量之比为$O(1)$，这是因为空气的密度较小，但它的速度较大。因此，(6.9.12)式右端最后一项为$O(F)$，象第一项那样可以略去。考虑到这样一个事实，即τ象p_{*a}一样，在较大的尺度L_a上变化，而不是在L上变化，所以，包含风应力旋度的项为$O(\tau_0/\rho_S f_0 UD)L/L_a$。若取$\tau_0=1$达因/厘米^2，$D=4$公里，$U=5$厘米/秒，$L/L_a=10^{-1}$，则参数

$$\frac{\tau_0}{\varepsilon\rho_S f_0 UD}\frac{L}{L_a}=10^{-1}.$$

它虽小但不是在任何情况下都可略去的。事实上，在较强的大气风暴过境时，它可为$O(1)$。因此，天气尺度的风应力虽然对于w_1(因而对于位涡平衡)一般只有小的贡献，但为了普遍性而保留它是合理的。所以在$z=1$处，(6.8.11)式的边界条件变为

$$\boxed{w_1=-S^{-1}\left(\frac{d_0}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)_{z=1}=\left[\frac{\tau_0 L^2}{\rho_S U^2 DL_a}\right]\mathbf{k}\cdot\mathrm{curl}\,\tau}. \quad (6.9.14)$$

必须注意，自由面的运动$Fd_0\psi/dt$在天气尺度动力学中不起作用，即就准地转动力学

所涉及的内容来说，可以把自由面取为刚性的。这样作的理由是 F 为小量，而 S 为 $O(1)$，这意味着

$$L_D=O(L)\ll R=\frac{(gD)^{1/2}}{f_0}. \tag{6.9.15}$$

运动的长度尺度具有内变形半径的量级，并远小于自由面的变形半径 R。如第三章中所指出的，无论什么时候，只要 $L\ll R$，就可把自由面看作一个刚体。海洋内部的等密度面比自由面更易变形，因为与前一种垂直位移相联系的位能较小，所以，若 $L\ll R$，则由于涡管伸缩而引起天气尺度运动涡度变化的是等密度面的变形，而不是自由面的变形。

在侧向包围海洋的垂直边界上，$O(1)$ 地转运动一定为零，即

$$\mathbf{n}\times\nabla\psi=0, \tag{6.9.16}$$

其中 $\mathbf{n}$ 是垂直于海洋域侧边界的水平单位矢量。

用类似于推导方程(3.25.7)的方式，也可得出，积分条件

$$\frac{\partial}{\partial t}\oint_C(\nabla\psi\cdot\mathbf{n})dl=0 \tag{6.9.17}$$

必须在包围流体的每一刚性闭边界 C 上得到满足，以使侧边界上 $O(\varepsilon)$ 水平法向速度也可为零。对于边界上的任意 z 都必须满足方程(6.9.16)和(6.9.17)。

6.10 地转能量方程和有效位能

准地转位涡方程(6.5.21)或(6.8.11)与相应的边界条件和初始条件一起，形成了完整的计算运动场的动力学根据。其他涉及能量的数学表达式可直接从位涡方程导出。但是，为了对所得结果作令人满意的解释，需要考虑动力学方程和热力学方程。本节推导天气尺度大气运动的能量方程；对于海洋的相应方程，只要重新定义某些项，并利用 ρ_S 变化很小的固有特性作简化，就很容易得出。

如果用 $-\rho_S\psi$ 乘以(6.5.21)，则得

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho_s}{2}\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{S}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\right\}+\nabla\cdot\mathbf{S}=0, \tag{6.10.1}$$

其中 $\mathbf{S}$ 为矢量，

$$\mathbf{S}=\mathbf{i}\left\{-\rho_S\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t}-\frac{\rho_S\beta\psi^2}{2}-\rho_S u_0\psi\Pi_0\right\}$$

$$+\mathbf{j}\left\{-\rho_S\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial t}-\rho_S v_0\psi\Pi_0\right\}+\mathbf{k}\left\{-\frac{\rho_S\psi}{S}\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial t}\right\}. \tag{6.10.2}$$

这里的 u_0、v_0 和 Π_0 为

$$u_0=-\frac{\partial\psi}{\partial y}, \tag{6.10.3a}$$

$$v_0=\frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{6.10.3b}$$

$$\Pi_0=\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{1}{\rho_S}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\rho_S}{S}\frac{\partial\psi}{\partial z}. \tag{6.10.3c}$$

考虑运动发生在一区域 R 中，该区域在 $z=0$ 处被满足(6.6.10)式的刚性边界所围。由于我们在推导(6.10.1)式时已假定了 $\mathscr{H}=0$（很容易推广到一般情况），所以，(6.6.10)式在乘以 $\rho_S\psi$ 后变为

$$
\frac{\rho_S\psi}{S}\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}\left\{\rho_S u_0\left[S^{-1}\frac{\partial\psi}{\partial z}+\eta_B\right]\right\}-\frac{\partial}{\partial y}\left\{\rho_S v_0\left[S^{-1}\frac{\partial\psi}{\partial z}+\eta_B\right]\right\}
$$

$$
-\frac{E_V{}^{1/2}}{2\varepsilon}\rho_S\psi\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right]. \tag{6.10.4}
$$

R 的周界可由闭合的或不闭合的垂直边界组成。如果边界是不闭合的，那末场在边界上一般是不确定的。在海洋的情况下，(6.8.16) 和 (6.8.17) 式一定适用。对于大气，我们通常考虑一个纬度带，即 x 的一个开区间，其上的场是周期性的，随空间变化的周期等于 $2\pi(\cos\theta_0)r_0/L$ 的距离，它是在中心纬度 θ_0 处绕地球一周的无量纲距离。但是，该区域在 y 方向必须有界，这是因为 β 平面近似对 y 的范围是有限制的，而在纬度带 $y_1\leqslant y\leqslant y_2$ 的边界上，场的给定有些人为。β 平面概念隐含地假定，在 θ_0 附近的区域中出现的动力学过程，基本上可以与该区域之外的较远区域的流体隔离开来加以讨论，这个隐含的概念由边界条件的数学表达式给出，

$$
v_1=v_0=0,\qquad \text{在 } y=y_1 \text{ 和 } y=y_2 \text{ 处}. \tag{6.10.5}
$$

它使纬度带上的流体在能量上与其周围的流体相隔离，并等价于应用 (6.9.16) 和 (6.9.17) 式。

如果把(6.10.1)式对体积 R 积分，并在 R 的边界上应用(6.9.16)、(6.9.17) 和 (6.10.4)式，则得

$$
\frac{\partial}{\partial t}\iiint_R\frac{\rho_S}{2}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{S}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\right]dx\,dy\,dz
$$

$$
=+\iint_A dx\,dy\frac{\rho_S\psi}{S}\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial t}\bigg|_{z=z_T}
$$

$$
-\frac{E_V{}^{1/2}}{2\varepsilon}\iint_A dx\,dy\frac{\rho_S}{2}\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right\}\bigg|_{z=0}, \tag{6.10.6}
$$

其中 z_T 是区域的上边界，A 是 R 在 xy 平面上所占的面积。

(6.10.6)式左端积分的被积函数是个正定标量，

$$
E=\frac{\rho_S}{2}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{S}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\right]=\frac{\rho_S}{2}\left[u_0^2+v_0^2+\frac{\theta_0^2}{S}\right]. \tag{6.10.7}
$$

$\rho_S(u_0^2+v_0^2)/2$ 项显然是单位体积流体的动能。垂直速度对动能的贡献为 $O(\delta^2\varepsilon^2)$，因此完全可略。剩下的项$\rho_S\theta_0^2/2S$ 叫做有效位能，它具有下述含义。考虑等密度面和等压面绝对水平的静止大气（或海洋）。这个平衡状态（其中不存在 p、ρ和θ 的水平变化）的位能，可规定为位能的基态，因为在该状态下，显然没有任何位能可以自动释放而产生动能。现在考虑一个用与平衡态的偏差来表征的大气或海洋的扰动状态。这个状态可以通过流体元垂直移动 δz_* 距离的过程来达到，这里 δz_* 是 x_*、y_* 和 z_* 的函数。于是根据(6.4.7)式，流体元受到的单位体积的恢复力为

$$
F_z=\rho_S\frac{g}{\theta_S}\frac{\partial\theta}{\partial z_*}\delta z_*, \tag{6.10.8}
$$

它对 δz_* 是线性的，因此流体元所增加的位能为

$$\mathscr{A}_*=\rho_S\frac{g}{\theta_S}\frac{\partial\theta_S}{\partial z_*}\frac{\delta z_*^2}{2}. \tag{6.10.9}$$

但是，由于垂直位移 δz_* 直接与 θ_* 离 θ_S 的偏差有关，

$$\delta\theta_*=+\frac{\partial\theta_S}{\partial z_*}\delta z_*+O(\varepsilon^2), \tag{6.10.10}$$

因此

$$\mathscr{A}_*=\frac{\rho_S}{2}g\frac{\theta_S}{\partial\theta_S/\partial z_*}\left(\frac{\delta\theta_*}{\theta_S}\right)^2, \tag{6.10.11}$$

故对于 ε 的最低阶，利用关系式

$$\frac{\delta\theta_*}{\theta_S}=\varepsilon F\theta_0, \tag{6.10.12}$$

我们得

$$\mathscr{A}_*=\frac{\rho_S U^2\theta_0^2}{2S}\equiv U^2\mathscr{A}. \tag{6.10.13}$$

所以有效位能与等 θ 面距其平衡的水平面之偏差成正比，并且是该偏差的二次正定函数。总位能中只有这一部分对于转换成动能才是有效的。因此，地转近似中的总能量是水平运动的动能与有效位能之和。用有量纲单位表示，

$$E_*=\frac{\rho_S}{2}\left(u_*^2+v_*^2+\frac{g}{N_S^2}\left(\frac{\delta\theta_*}{\theta_S}\right)^2\right), \tag{6.10.14}$$

或用无量纲单位，

$$E\equiv\frac{E_*}{U^2}=\frac{\rho_S}{2}\left(u_0^2+v_0^2+\frac{\theta_0^2}{S}\right). \tag{6.10.15}$$

因此，能量方程 (6.10.6) 说 明，在一闭合区域 R 中，动能与有效位能之和的变化率，只能由右端两项来改变。第二项 $O(E_V{}^{1/2}/\varepsilon)$ 表示表面埃克曼层的能量耗散，并且是一个负定函数。第一项为

$$\iint_A dxdy\left(\frac{\rho_S\psi}{S}\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial t}\right)_{z=z_T}=-\iint_A dxdy(\rho_S p_0 w_1)_{z=z_T}. \tag{6.10.16}$$

如果对 A 积分时，上表面的 p_0w_1 具有正的平均值，那末，R 中的流体通过施加在 z_T 面上的压力而作功，在该情况下，R 中的能量将相应地减小。用有量纲单位来表示(6.10.16)式时，能量方程变为

$$\frac{\partial}{\partial t_*}\iiint_R E_* dx_* dy_* dz_*=-\iint_A dx_* dy_*(\delta p_* w_*)_{z=z_T}$$

$$-\frac{\delta_E f_0}{2}\iint_A dx_* dy_*\left(\frac{u_*^2+v_*^2}{2}\right)_{z=0}, \tag{6.10.17}$$

其中，

$$\delta p_*=p_*-p_S=\rho_S f_0 U L p_0,$$

$$\delta_E=DE_V{}^{1/2}. \tag{6.10.18}$$

因此，在无粘性耗散或流体在上表面不作功（或大气对流体不作功）时，动能与有效位能之

和是守恒的。如果 w_1 在 z_T 处为零，或在 $z_T\to\infty$ 的情况下，若 $z\to\infty$ 时乘积 $\rho_S p_0 w_1$ 为零，则 z_T 上的压力作功将为零。

能量平衡的另一种表达为(6.10.1)式，用能通量矢量 S 表示。这另一种表达可以改写为物理意义比较清楚的形式，只要利用以下的恒等式：

$$\rho_S u_0 \psi \frac{\partial \Pi_0}{\partial x}+\rho_S v_0 \psi \frac{\partial \Pi_0}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}(\rho_S u_0 \psi \Pi_0)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho_S v_0 \psi \Pi_0)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left\{u_0 \psi \rho_S \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+v_0 \psi \rho_S \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}\right\}+\frac{\partial}{\partial y}\left\{u_0 \psi \rho_S \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}+v_0 \psi \rho_S \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right\}$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{u_0 \psi \rho_S}{S} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x}+\frac{v_0 \psi \rho_S}{S} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial y}\right\}-\frac{\partial}{\partial x}(u_0 E)-\frac{\partial}{\partial y}(v_0 E). \qquad (6.10.19)$$

因此，

$$\mathbf{S}=\mathbf{i}\left[u_0 E-\rho_S \psi \frac{d_0 v_0}{dt}-\rho_S \frac{\beta \psi^2}{2}\right]$$

$$+\mathbf{j}\left[v_0 E+\rho_S \psi \frac{d_0 u_0}{dt}\right]+\mathbf{k}\left[-\frac{\rho_S \psi}{S} \frac{d_0 \theta_0}{dt}\right]. \qquad (6.10.20)$$

如果利用 $O(\varepsilon)$ 动量方程(6.3.13a,b)，S 可进一步改写为

$$\mathbf{S}=\mathbf{i}\left[u_0 E+\rho_S \psi\left(u_1+u_0 \frac{L}{r_0 \varepsilon} y \cot \theta_0+\frac{\partial p_1}{\partial y}\right)-\rho_S \beta \frac{\psi^2}{2}\right]$$

$$+\mathbf{j}\left[v_0 E+\rho_S \psi\left(v_1+v_0 \frac{L}{r_0 \varepsilon} y \cot \theta_0-\frac{\partial p_1}{\partial x}\right)-\frac{\psi L y}{\varepsilon r_0} \tan \theta_0 \frac{\partial p_0}{\partial x}\right]$$

$$+\mathbf{k}[\rho_S \psi w_1], \qquad (6.10.21)$$

其中已用热力学方程来计算 S 的垂直分量。因矢量

$$\mathbf{i}\left\{\rho_S \frac{\partial}{\partial y} p_1 \psi+\rho_S \psi \frac{u_0 L}{r_0 \varepsilon} y \cot \theta_0-\rho_S \frac{\beta \psi^2}{2}-\rho_S p_0 \frac{u_0}{\varepsilon}\right\}$$

$$+\mathbf{j}\left\{-\rho_S \frac{\partial}{\partial x} p_1 \psi+\rho_S \psi \frac{v_0 L}{r_0 \varepsilon} y \cot \theta_0-\rho_S p_0 \frac{v_0}{\varepsilon}\right\}$$

是明显无辐散的，故

$$\nabla \cdot \mathbf{S}=\nabla \cdot \mathbf{J}, \qquad (6.10.22)$$

其中

$$\mathbf{J}=\mathbf{i}\left\{u_0 E+\rho_S\left[\psi u_1-p_1 \frac{\partial \psi}{\partial y}\right]+\rho_S p_0 \frac{u_0}{\varepsilon}\right\}$$

$$+\mathbf{j}\left\{v_0 E+\rho_S\left[\psi v_1+p_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x}-\frac{L y}{\varepsilon r_0} \tan \theta_0 \psi v_0\right]+\rho_S p_0 v_0\right\}$$

$$+\mathbf{k}\{\rho_S \psi w_1\},$$

或最后为

$$\mathbf{J}=\mathbf{i}\left\{u_0 E+\rho_S\left[\frac{(p_0+\varepsilon p_1)(u_0+\varepsilon u_1)}{\varepsilon}+O(\varepsilon)\right]\right\}$$

$$+\mathbf{j}\left[v_0E+\rho_S(p_0+\varepsilon p_1)(v_0+\varepsilon v_1)\frac{\cos\theta}{\varepsilon}+O(\varepsilon)\right]$$

$$+\mathbf{k}\left[\rho_S p_0\frac{w}{\varepsilon}\right], \tag{6.10.23}$$

其中已利用了(6.2.28b)式。因此，精确到 $O(\varepsilon)$ 时，能通量矢量 $\mathbf{J}$ 为运动本身水平携带的能通量与流体元对其周围流体所作的压力功率之和，并且

$$\boxed{\frac{\partial E}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{J}=0}. \tag{6.10.24}$$

对于 $\mathbf{J}$ 的形式有几点要注意的地方。把能通量矢量写成(6.10.23)式的好处是，用物质能通量和压力功来对它作解释是最直观的。但是，占优势的压力功项 $p_0u_0\mathbf{i}+p_0v_0\mathbf{j}$ 明显地无辐散，因而对任何流体元不作净功。正是由于这个事实，所以在正确确定对各流体元所作的净压力功时，气压和速度场的 $O(\varepsilon)$ 修正值是关键性的量。然而，位涡方程的解只给出 $O(1)$ 场，并且不能直接得到 p_1、u_1 和 v_1（不过原则上它们可计算出）。因此，对于能通量辐散的实际计算，由(6.10.20)式所给出的 $\mathbf{S}$ 显然是更可取的。必须注意，$\mathbf{S}$ 和 $\mathbf{J}$ 是不相等的。它们相差一个无辐散矢量，在保持有物理意义的表达式(6.10.24)式不变时，附加的矢量必然使能量的定义可以有两种解释，这是由于能通量总可以在不影响任何可观测的变量或其变化率的情况下改变一个无辐散的矢量。从以下两个进一步的理由看，$\mathbf{S}$ 也是更可取的一种能通量定义。第一，在只涉及运动的控制方程，即位涡方程时，（我们已注意到，只有它本身就足够了。）自然出现矢量 $\mathbf{S}$。第二，$\mathbf{S}$ 显然是3.21节的能通量矢量对于层结流体非线性准地转运动之推广，并且可以看到，在小振幅运动范围内，$\mathbf{S}$ 具有简洁的形式，即它化成能量与群速度之乘积。为使该性质保守，正如(6.10.20)式所定义的，$\mathbf{S}$ 必须用作能通量矢量，并且从(6.10.20)式显而易见，非线性项的一个作用是，使群速度随着物质速度 $\mathbf{i}u_0+\mathbf{j}v_0$ 一起增大。

最后，我们注意到有效位能

$$\mathscr{A}=\frac{\rho_S}{2}\frac{\theta_0^2}{S} \tag{6.10.25}$$

与动能

$$K=\frac{\rho_S}{2}(u_0^2+v_0^2) \tag{6.10.26}$$

之比为

$$\frac{\mathscr{A}}{K}=\frac{\theta_0^2}{(u_0^2+v_0^2)S}=O\left(\frac{L}{L_D}\right)^2. \tag{6.10.27}$$

因此，罗斯贝变形半径 L_D 的另一种解释是，当运动的尺度 L 具有变形半径之量级时，有效位能与动能的量级相同。如果 $L\ll L_D$，则 $K\gg\mathscr{A}$；而当 $L\gg L_D$ 时，$\mathscr{A}\gg K$。

在讨论 $\beta\gg1$ 的另一种情况以前，我们将在下几节中先讨论 $\beta=O(1)$ 情况下的准地转理论的几种应用。对 $\beta\ll1$ 的极限情况（即运动的空间尺度与 $(U/\beta_0)^{1/2}$ 相比为小量的情况），只须令(6.5.21)和(6.8.11)式中 $\beta=0$ 就可得到。所得的方程就是 f 平面方程，其中除科氏参数规定为适当的常数值 f_0 外，地球的几何形状在动力学上不起作用。

6.11 层结流体中的罗斯贝波

在第三章中曾证明，当行星涡度梯度存在时，均质流体维持了一种令人感兴趣的波状运动，即罗斯贝波。在本节中，我们将把罗斯贝波理论推广到层结流体中。

首先考虑无界介质中波动解的存在性问题。这仅适合于水平边界远离波扰区的情况。这是一个严格的假定，但它在我们的初步讨论中很有用。此外，为使分析简单，假设 S（即 N^2）为常数（在波动的尺度上），并且

$$\frac{-1}{\rho_S}\frac{\partial\rho_S}{\partial z}=H^{-1} \tag{6.11.1}$$

是常数（当然大于零）。无量纲数 H 是除以 D 的密度标高。对于海洋的情况，H 非常大。对于大气的情况，H 为 $O(1)$，并通过理想气体定律 (6.2.6) 和流体静力方程 (6.2.15)，与静止状态的温度相联系。因此，用无量纲单位表示，有

$$H^{-1}=\frac{1}{T_S}\frac{dT_S}{dz}+\frac{gD}{RT_S}, \tag{6.11.2}$$

并且，对于等温大气，或对于其中有

$$T_S=T_0+\mathscr{T}_0\frac{e^z}{H} \tag{6.11.3}$$

的大气（T_0 和 $\mathscr{T}_0$ 为任意常数），H 将严格地为一常数；于是，H^{-1} 为 gD/RT_0。虽然对流层中的温度实际上是随 z 线性减小的函数，但是对于我们的目的，H 为常数的假定在此是足够的。所以，位涡方程(6.5.21)变为

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right\}\left\{S^{-1}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}-(SH)^{-1}\frac{\partial\psi}{\partial z}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right\}+\beta\frac{\partial\psi}{\partial x}=0. \tag{6.11.4}$$

平面波解的形式为

$$\psi=Ae^{z/2H}\cos(kx+ly+mz-\sigma t), \tag{6.11.5}$$

当

$$\sigma=\frac{-\beta k}{k^2+l^2+S^{-1}(m^2+1/4H^2)} \tag{6.11.6}$$

时，(6.11.5)式是(6.11.4)式的准确解，这是由于

$$S^{-1}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}-(SH)^{-1}\frac{\partial\psi}{\partial z}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=-\left(k^2+l^2+\frac{m^2}{S}+\frac{1}{4H^2S}\right)\psi, \tag{6.11.7}$$

故位涡和 ψ 的雅可比行列式恒为零。若把频数关系(6.11.6)式与均质流体中罗斯贝波的频散关系(3.15.11)式相比较，立即可看出，如果(3.15.11)式中的因子 F 与 (6.11.6) 式中修正的垂直波数因子 $S^{-1}(m^2+1/4H^2)$ 视为相同时，则它们的频率关系是一样的。事实上，由于我们已隐含地假定了波的垂直尺度远小于 D（因而远小于H），(6.11.6)式中的因子$(4H^2)^{-1}$可以略去，所以

$$\sigma=-\frac{\beta k}{(k^2+l^2+m^2S^{-1})}. \tag{6.11.8}$$

如果我们忆及

$$F=\frac{L}{R},$$

关其中 $R=(gD)^{1/2}/f_0$ 是均质流体自由面的变形半径，那末(3.5.11)和(6.11.8)式之间的系更显然，而

$$\frac{m^2}{S}=m^2\left(\frac{L}{L_D}\right)^2=\frac{L^2}{(L_D/m)^2}, \tag{6.11.9}$$

其中 L_D 是等密度面的变形半径，结果有

$$\frac{L_D}{m}=\frac{N_S(D/m)}{f_0}. \tag{6.11.10}$$

由于 m 是垂直波数，D/m 是两个波节之间的垂直距离，所以因子 m^2/S 等价于约化重力为 $(g/\theta_S)\partial\theta_S/\partial z$ 〔或对于海洋，为 $g(-1/\rho_S)\partial\rho_S/\partial z$)〕、而垂直距离为 $d=D/m$（而不是D）时的 F，罗斯贝波的垂直速度由(6.5.15)式给出，即

$$w_1=-\frac{m}{S}e^{z/2H}\cos(kx+ly+mz-\sigma t), \tag{6.11.11}$$

其中已再次略去 $O((mH)^{-1})$ 的因子。波动中的涡管伸长就是

$$\frac{\partial w_1}{\partial z}=+\frac{m^2}{S}\frac{d\psi}{dt}, \tag{6.11.12}$$

所以涡度方程(6.3.17)式简化为

$$\frac{d}{dt}\left\{\zeta_0-\frac{m^2}{S}\psi+\beta y\right\}=0, \tag{6.11.13}$$

应把它与(3.12.24)相比较。注意，当 $m=0$ 时波的位相与 z 无关，暂且不考虑因子 $e^{z/2H}$，则波是正压的。这可由下面的事实得出：在 $m=0$ 时，根据(6.11.11)式，垂直速度为零，因此，波状运动不干扰平衡的密度面。流体元的轨迹是水平的，并且，流体不受任何浮力作用。

在 x、y 和 z方向的群速度分量分别为

$$C_{gx}=\frac{\beta[k^2-(l^2+m^2/S)]}{(k^2+l^2+m^2/S)^2},$$

$$C_{gy}=\frac{2\beta kl}{(k^2+l^2+m^2/S)^2}, \tag{6.11.14}$$

$$C_{gz}=\frac{2\beta km/S}{(k^2+l^2+m^2/S)^2},$$

应把它与(3.19.13)式相比较。注意

$$\frac{\sigma/m}{C_{gz}}=-\frac{(k^2+l^2+m^2/S)^2}{2m^2/S}<0, \tag{6.11.15}$$

所以，垂直方向的群速度与相速度方向相反。如果等位相线向上（向下）传播，那末波能量就向下（向上）传播。

在一个波动周期内，波的平均动能为

$$\langle k\rangle=\frac{\sigma}{2\pi}\int_0^{2\pi/\sigma}\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right\}\rho_S dt=(k^2+l^2)\rho_S A^2/4, \tag{6.11.16}$$

平均有效位能为

$$\langle \mathscr{A} \rangle = \frac{\sigma}{2\pi}\int_0^{2\pi/\sigma} \frac{\rho_S}{2S}\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2 dt = \rho_S \frac{m^2}{S} A^2/4, \tag{6.11.17}$$

所以，总的波动能量为

$$\langle E \rangle = \rho_S\left(k^2 + l^2 + \frac{m^2}{S}\right)\frac{A^2}{4}, \tag{6.11.18}$$

其中又忽略了 $O((mH)^{-1})$ 的因子。

利用(6.11.5)和(6.11.14)式，可以计算由(6.10.2)定义的能通量 **S**：

$$\mathbf{S} = \mathbf{i}\{(u_0 + C_{gx})\langle E\rangle 2\cos^2\phi\} + \mathbf{j}\{(v_0 + C_{gy})\langle E\rangle 2\cos^2\phi\} + \mathbf{k}C_{gz}\langle E\rangle 2\cos^2\phi, \tag{6.11.19}$$

其中 ϕ 是位相，

$$\phi = kx + ly + mz - \sigma t, \tag{6.11.20}$$

而 u_0 和 v_0 是流体的水平速度，即

$$u_0 = -\frac{\partial \psi}{\partial y} Al\sin\phi,$$
$$v_0 = \frac{\partial \psi}{\partial x} = -Ak\sin\phi. \tag{6.11.21}$$

能通量表达式 (6.11.19) 说明，由群速度输送的能通量因波本身的非线性能量平流而增加。但是，如果 **S** 在一个波动周期内作平均，则非线性项恒为零，结果有

$$\boxed{\langle \mathbf{S} \rangle = \mathbf{C}_g \langle E \rangle}, \tag{6.11.22}$$

其中

$$\mathbf{C}_g = \mathbf{i}C_{gx} + \mathbf{j}C_{gy} + \mathbf{k}C_{gz}. \tag{6.11.23}$$

把这些结果与第三章关于均质流体中罗斯贝波的结果相比较，容易看出，与简单的均质情况中罗斯贝波相应的概念，可以直接用于物理上比较复杂的层结流体的情况。

6.12 罗斯贝波标准模态：垂直结构方程

虽然前一节的平面波解对于说明 β 平面上层结流体的涡度动力学是个有用的例子，但是略去水平边界是个严重的限制。本节将去掉这个限制。此外，我们只考虑线性的小振幅运动，因为正如我们在第三章中所看到的，尽管单个的平面波是一个非线性解，但波包却不是非线性解，而后者却更真实地描述了波动场。(6.5.21)式的线性化形式是

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{1}{\rho_S}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho_S}{S}\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)\right\} + \beta\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0. \tag{6.12.1}$$

只要令 ρ_S 为常数便可得到海洋中的情况。现在来考虑侧向无界而在垂直方向限于区间

$$0 \leqslant z \leqslant z_T \tag{6.12.2}$$

的区域中可能出现的罗斯贝波。对于海洋情况，我们可以取 $z_T = 1$，而对于无上界的大气，$z_T \to \infty$。在 $z=0$ 处的边条件为

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial z} = 0, \qquad 当\ z = 0, \tag{6.12.3}$$

其中我们已忽略了耗散和底边界坡度。在上界面处，(6.9.14)式适用于海洋情况，在没有应

力时，(6.9.14)式的线性化形式变为

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial z}=0, \qquad \text{当 } z=1. \tag{6.12.4}$$

在大气的情况下，上界面在无穷远处，我们必须要求当 $z\to\infty$ 时能量是有限的，或等价地有

$$\rho_S \psi^2 \text{ 保持有限}, \qquad \text{当 } z\to\infty. \tag{6.12.5}$$

在这一步还不清楚(6.12.5)式是否能足以确定运动。这肯定是必须弄清的，我们将把关于这个问题的进一步讨论留到以后去作。

先考察是否有可能存在形如

$$\psi=R_e\, e^{i(kx+ly-\sigma t)}\Phi(z) \tag{6.12.6}$$

的可分离解，其中 Φ 是垂直结构函数，它必须满足

$$\frac{1}{\rho_S}\frac{d}{dz}\frac{\rho_S}{S}\frac{d\Phi}{dz}=-\lambda\Phi. \tag{6.12.7a}$$

式中的 λ 根据(6.12.1)式为

$$\lambda=-\left\{\frac{\beta k}{\sigma}+k^2+l^2\right\}. \tag{6.12.7b}$$

Φ 的边条件由(6.12.3)和(6.12.4)或(6.12.5)式来确定：

$$\frac{d\Phi}{dz}=0, \qquad \text{当 } z=0, \tag{6.12.8a}$$

和对于海洋有

$$\frac{d\Phi}{dz}=0, \qquad \text{当 } z=1, \tag{6.12.8b}$$

或，对于大气有

$$\rho_S|\Phi|^2 \text{ 有限}, \text{ 当 } z\to\infty. \tag{6.12.8c}$$

我们先考虑海洋情况。此时，(6.12.7a,b) 和 (6.12.8a,b) 式构成对于本征值 λ 的本征值问题。由于在区间 (0, 1) 内 ρ_S 和 S 总是确定的正值，所以我们确信存在无穷个解 $\Phi_n(z)$，$(n=1,2,3,\cdots)$ 每个解都对应于一个离散的实本征值 λ_n，$(n=1,2,3,\cdots)$。并且，在分部积分后容易看出，

$$\lambda=\frac{\int_0^1 \frac{\rho_S}{S}\left|\frac{d\Phi}{dz}\right|^2 dz}{\int_0^1 \rho_S|\Phi|^2 dz}, \tag{6.12.9}$$

由此得所有非零的 λ 为正。由于

$$\lambda=0, \qquad \Phi=1 \tag{6.12.10a}$$

满足(6.12.7)、(6.12.8a)和(6.12.8b)式，所以我们还得知 $\lambda=0$ 是任意 $\rho_S(z)$ 和 $S(z)$ 的一个本征值。这个模态是正压模态。它的 ψ 场（因而水平速度）与深度无关，并且它的垂直速度和密度扰动恒为零。对于这个 $\lambda=0$ 的模态有

$$\sigma=\sigma_0=-\frac{\beta k}{k^2+l^2}, \tag{6.12.10b}$$

它与具有刚性盖（即 $F=0$）的均质流体罗斯贝波频率是一致的。必须着重指出，不论 ρ_S 和 S 的具体结构如何，该正压模态都有可能存在。因此，先前推导的有关正压罗斯贝波的所有

结果，可应用于层结流体的正压模态。

对于 $\lambda\neq0$ 的情况，把(6.12.7a)式从 $z=0$ 到$z=1$ 积分，在端点应用边条件后得

$$\int_0^1 \rho_S \Phi(z) dz = 0, \qquad 当\ \lambda\neq0, \tag{6.12.11}$$

它和(6.12.6)式一起意味着，对应于非零 λ 的全部解具有垂直积分为零的水平质量通量，即对于这些模态有

$$\int_0^1 \rho_S u_0\, dz = \int_0^1 \rho_S v_0 dz = 0. \tag{6.12.12}$$

这些模态称为斜压模态，这是由于它们使密度面变形面具有非零的垂直速度，并且它们的存在取决于基本层结的存在。作为一个例子，我们考虑 ρ_S 和 S 都为常数的简单情况。于是有

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2} = -\lambda S\Phi, \tag{6.12.13}$$

它满足(6.12.8a)的解是

$$\Phi = \cos(\lambda S)^{1/2} z, \tag{6.12.14}$$

边条件(6.12.8b)给出本征值关系：

$$\sin(\lambda S)^{1/2} = 0, \tag{6.12.15}$$

或

$$\lambda = \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{S}, \qquad n=0,1,2,\cdots. \tag{6.12.16}$$

$n=0$ 的模态就是前面讨论过的正压模态。$n>0$ 的解族为

$$\Phi_n(z) = \cos n\pi z, \qquad n=1,2,\cdots, \tag{6.12.17}$$

其中每个解对应于(6.12.16)给出的本征值 λ_n。容易验证(6.12.11)式和该本征值问题的下述一般特点。如果把 λ_n 排列成一个递增序列，

$$\lambda_0 = 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots < \lambda_{n-1} < \lambda_n < \lambda_{n+1} < \cdots, \tag{6.12.18}$$

那末，对于任何 $n>0$，在区间 (0, 1) 上，Φ_n 比 Φ_{n-1} 多一个零点。较高模态在 z 方向比较"摆动"。如果 $S(z)$ 是 z 的比较复杂的函数，则 λ_n 的数值和斜压模态的结构 Φ_n 将改变。但它们的一般特征将保持不变。图6.12.1给出了前四个模态（即正压模态和前三个斜压模态）的垂直模态结构，这是 Kundu、Allen 和 Smith (1975)用俄勒冈沿岸区域中实测的 $N^2(z)$ 分布计算的结果。虽然这些模态结构在量上与 N 为常数的情况非常不同，但垂直结构函数 Φ_n 的定性性质是类似的。

对于根据(6.12.7)和(6.12.9)、(6.12.10)所计算出的每个 λ_n，都存在一个相应的罗斯贝波频率：

$$\boxed{\sigma_n = -\frac{\beta k}{k^2+l^2+\lambda_n}}, \qquad n=0,1,2,\cdots. \tag{6.1219}$$

若把(6.12.19)与(3.15.11)相比较，则立即可看出，每个罗斯贝模态，不论是正压的还是斜压的，其频率关系式都等价于具有

$$F = F^{(n)} = \lambda_n \tag{6.12.20}$$

的均质流体频散关系式。尤其是，在第三章中对均质模式导出的关于水平能量传播、反射和

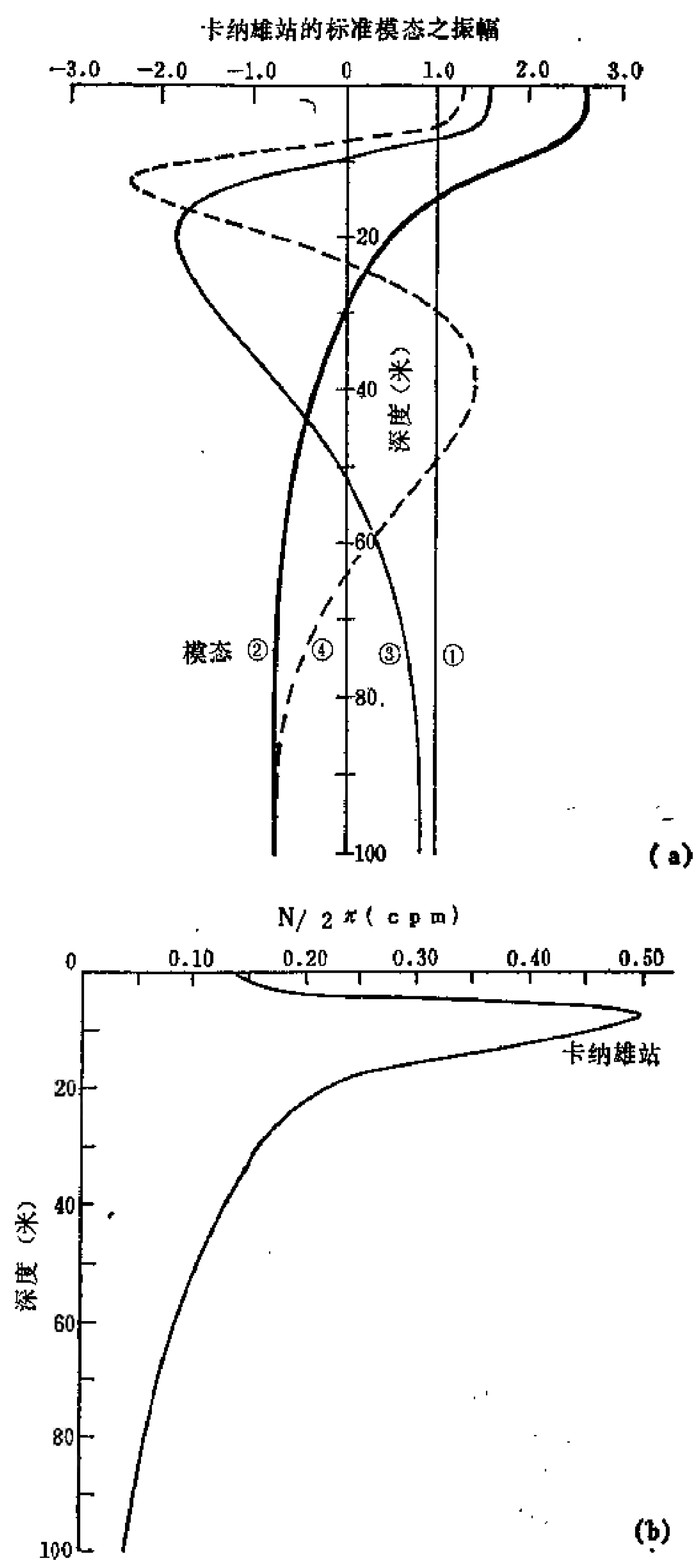


图6.12.1

(a)　Kundu、Allen 和 Smith (1975) 计算的正压模态和前三个斜压模态；

(b)　用于(a)的 N 之分布 (俄勒冈近海 Carnation 海洋站的观测值)。

频散的所有性质，都可直接转为层结流体中 F 等于 λ_n（如(6.12.20)式所给出）的各模态的性质，例如，第 n 个模态在 x 方向的群速度就是

$$C_{gx}=\frac{\beta[k^2-(l^2+\lambda_n^2)]}{(k^2+l^2+\lambda_n)^2}. \tag{6.12.21}$$

由于 λ_n 构成一个递增序列，所以较高的斜压模态将有利于能量向西传播。另一方面，群速度是 λ_n 的递减函数，所以较高的斜压模态将比正压模态或较低的斜压模态传播能量慢。事实上，均质模式和斜压模式之间的联系是很紧密的，以至由于历史原因，本征值 λ_n 有时用一个量 h_n 来表示，它们的关系为

$$\lambda_n=\frac{f_0^2L^2}{gh_n}, \tag{6.12.22}$$

其中 h_n 称为相当深度[1]。注意，h_n 由本征值问题来确定，而不是简单地由自然的垂直尺度给出。本节得出的结果可用这种形式重述如下。层结流体中第 n 个罗斯贝波模态的传播性质完全由深度等于相当深度 h_n 的均质流体层中罗斯贝波的性质给出。对于 N 为常数的流体层，

$$h_n=\frac{N_S^2D^2}{gn^2\pi^2}. \tag{6.12.23}$$

注意，正压模态的相当深度为无穷大。

由于大气顶部无盖，西而使大气中罗斯贝标准模态问题相当复杂。当然，正如前面所提到的，对于任意 $\rho_S(z)$ 和 $S(z)$，正压模态 $\lambda=0$ 仍是可能的。为考察非平凡斜压模态的可能性，把(6.12.7a)式化成标准型是有益的，这要利用变换

$$\Phi=\left(\frac{S}{\rho_S}\right)^{1/2}Z(z), \tag{6.12.24}$$

其中 Z 满足

$$\frac{d^2}{dz^2}Z+\left[\lambda S-\left(\frac{S}{\rho_S}\right)^{1/2}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{\rho_S}{S}\right)^{1/2}\right]Z=0 \tag{6.12.25a}$$

和

$$\frac{1}{Z}\frac{dZ}{dz}+\left(\frac{\rho_S}{S}\right)^{1/2}\frac{d}{dz}\left(\frac{S}{\rho_S}\right)^{1/2}=0, \quad 当\ z=0. \tag{6.12.25b}$$

如果在无穷远处 S 有界且不为零，那末当 $z\to\infty$ 时，(6.12.8c)只要求 Z 有界。问题的基本性质可用等温大气的例子来说明。若 $T_S(z)$ 为常数，则根据(6.4.8)、(6.4.11)和(6.5.13)式，N_S 和 S 也为常数，而

$$\rho_S(z)=\rho_S(0)e^{-z/H}, \tag{6.12.26}$$

其中根据(6.11.2)式有

$$H=\frac{RT_S}{gD}, \tag{6.12.27}$$

所以(6.12.25a)变为

$$\frac{d^2Z}{dz^2}+q^2Z=0, \tag{6.12.28}$$

（1） 在此定义的 h_n 是有量纲的。

其中

$$q^2=\lambda S-\frac{1}{4H^2}, \tag{6.12.29}$$

而(6.12.25b)为

$$\frac{dZ}{dz}+\frac{1}{2H}Z=0, \quad 当\ z=0. \tag{6.12.30}$$

如果 $q^2<0$，即若 $\lambda<(4H^2S)^{-1}$，那末对于在无穷远处 Z 保持有界的唯一解是

$$Z=Z_0 e^{-|q|z}, \tag{6.12.31}$$

仅当

$$|q|^2=\frac{1}{4H^2}-\lambda S=\frac{1}{4H^2} \tag{6.12.32}$$

成立，上述解将满足(6.12.30)式。这意味着 $\lambda=0$，它就是前面描述过的正压模态。另一方面，如果 $q^2>0$，那末(6.12.28)的两个齐次解在无穷远处有界，即

$$Z=Ae^{iqz}+Be^{-iqz}. \tag{6.12.33}$$

与 A 成比例的第一个解，通过(6.12.6)式对应于一个波：

$$\psi=R_e\left(\frac{\rho_S}{S}\right)^{1/2}A_e{}^{i(kx+ly+qz-\sigma t)}, \tag{6.12.34}$$

其中根据(6.12.8)式有

$$\sigma=\frac{-\beta k}{k^2+l^2+q^2+1/4H^2}. \tag{6.12.35}$$

若 $k>0$，则 $\sigma<0$，并且(6.12.34)式给出的波有一个在 z 方向为负的相速。类似地，振幅为 B 的波有在 z 方向为正的相速。由于 z 方向的群速和相速方向相反［见(6.11.15)式］，所以"A"波有向上的能通量，而"B"波有向下的能通量。如果在无穷远处没有波能源，那末我们必须设置辐射条件，即认为所有的波具有向外的能通量。该辐射条件意味着 B 必须为零，于是象前面一样得出，由于 $B=0$，所以仅当 $\lambda=0$ 时，(6.12.33)式才满足(6.12.30)式。因此，对于无界的等温大气，只可能存在正压自由模态。当然，大气并不是等温的，所以(6.12.25a.b)的问题一般非常复杂。Chapman 和 Lindzen (1970) 已对此作过详细计算，并表明对于实际的标准大气，不可能有斜压模态[1]。这并不是说斜压模态在原则上就是不可能的。如果地球具有另一种热力结构，那末对于非零的正 λ，原则上就可能得出(6.12.25)式的非平凡解。

但是在大气的情况下，静止大气中纯罗斯贝波的重要性还有问题。平均风的位涡梯度为 $O(\beta_0)$，即 $\beta=O(1)$，因此可以预料，自由大气波的垂直结构和频散关系将受（其上有波动的）平均风存在的强烈影响。这个问题将在第七章中讨论。

在大洋的许多地方，平均流的相对涡度梯度为小量（即 $\beta\gg1$）。事实上，这构成了第五章中讨论过的平均流的斯维尔德鲁普理论之基础。在这种情况下我们可以预斜，本节的结果适用于罗斯贝波传播。但是，水平密度梯度造成的对环境位涡梯度之贡献不可以忽略。我们从(6.8.9)式看出，忽略平均流的相对涡度梯度时，y 方向的环境位涡梯度为

(1) 它们的最小本征值 λ_0 为 $O(F)$，根据这里提出的理论，它是一个非常接近于零的小参数。

$$\beta - \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{S}\frac{\partial \rho_0}{\partial y} = \beta - \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{S}\frac{\partial u_0}{\partial z}. \tag{6.12.36}$$

(6.12.36)式中第二项与第一项之比为

$$\frac{\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{S}\frac{\partial u_0}{\partial z}}{\beta} = O\left(\frac{\partial^2 u_*/\partial z_*^2}{\beta_0 N_S^2/f_0^2}\right) = O\left(\frac{\Delta u_*}{\beta_0 N_S^2 d_*^2/f_0^2}\right), \tag{6.12.37}$$

其中 Δu_* 是在该深度范围内速度变化的特征大小，d_* 是 u_* 变化的垂直尺度。在中纬度，$\beta_0 \sim 10^{-13}$/厘米·秒，$N_S^2 \sim 5\times10^{-5}$/秒^2，$f_0^2 \sim 10^{-8}$/秒^2，$d_* \sim 10^5$厘米，除了$\Delta u_*$ 大于或等于5厘米/秒外，(6.12.37)式给出的比将小于1，因此，在平均流远小于该值的大洋区，可直接应用本节推导的罗斯贝波理论。对于 Δu_* 较大的区域，如同大气中的情况一样，在讨论波动动力学时必须考虑平均流的作用。

因为对于第一个斜压模态 $\lambda_1 = O(S^{-1})$，x 方向的最大相速为

$$C_{1x}\max = \lim_{\substack{k\to0\\ l\to0}} \frac{\sigma_1}{k} = -\frac{\beta}{\lambda_1} = O(\beta S) = \frac{\beta_0 N_S^2 D^2/f_0^2}{U}, \tag{6.12.38}$$

所以，在斜压罗斯贝波传播理论中，能略去平均流位涡梯度的条件可等价地写成

$$\Delta u_* < C_{1x*}, \tag{6.12.39}$$

即平均流的热成风远小于第一个斜压模态的相速度。由于较高斜压模态具有较低的相速度，所以，平均流作用对于较高模态将变得越来越关键。

6.13 大气中的强迫驻波

在一平坦面上，静止流体中自由运动的垂直结构仅取决于(6.12.7)式的解，因而仅取决于 $\rho_S(z)$ 和 $S(z)$。但是，强迫运动的垂直结构与强迫作用的结构有比较密切的关系，而且它具有响应运动的完整的位涡动力学性质。一个很重要的例子是大气对它下边界处或边界附近的加热及地形强迫作用之响应。我们将讨论最简单的情况。

在没有海陆温度差异、大气加热和经度方向的地形变化时，大气对从赤道至极地的经向加热梯度之响应，至少在原则上可引起纬向对称运动（即与经度无关的流）。这种运动是否真实，是第七章要讨论的另一个问题。除了这个问题之外，海陆热力性质之差异及山脉之存在，显然会严重干扰纬向对称的状态。为进一步了解这个问题，我们来研究如下的模式。

考虑与经度无关的纬向流

$$u = u_0(y, z), \tag{6.13.1}$$

与其相应的流函数为

$$\psi = \psi_0(y, z) = -\int_0^y u_0(y', z)dy'. \tag{6.13.2}$$

其次考虑由于存在小的地形变化

$$\eta_B = \eta_B(x, y), \tag{6.13.3}$$

和大气加热作用

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}(x, y) \tag{6.13.4}$$

而受到扰动的流场性质。

设新的流函数为

$$\psi=\psi_0(y,z)+\phi(x,y,z), \tag{6.13.5}$$

其中 $\phi(x,y,z)$ 是加热作用和地形引起的小扰动。如果把(6.13.5)式代入(6.5.18)式，并且只保留 ϕ 的线性项，我们就发现对于定常运动，ϕ 满足

$$u_0\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{\rho_S}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\rho_S}{S}\frac{\partial\phi}{\partial z}+\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right\}$$

$$+\left\{\beta-\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}-\frac{1}{\rho_S}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\rho_S}{S}\frac{\partial u_0}{\partial z}\right\}\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{1}{\rho_S}\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\rho_S\mathscr{H}}{S}\right\}. \tag{6.13.6}$$

而在 $z=0$ 处，把(6.6.10)线性化后得

$$S^{-1}\left\{u_0\frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial x}-\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial u_0}{\partial z}\right\}=-u_0\frac{\partial\eta_B}{\partial x}+S^{-1}\mathscr{H}(x,y,0), \tag{6.13.7}$$

其中已忽略摩擦作用。$O(\phi^2,\phi\eta_B)$的项也已作为小量而略去。从(6.13.6)和(6.13.7)的形式看出，η_B 和 $\mathscr{H}$ 将对 ϕ 产生一个定常的强迫响应。一个简单而有启发性的例子是，在$|y|\leqslant 1$ 的纬度带内，u_0 为常数，并且 η_B 和 $\mathscr{H}$ 的形式为

$$\eta_B=\eta_0\cos kx\sin\pi y, \tag{6.13.8a}$$

$$\mathscr{H}=\mathscr{H}_0 e^{-az}\cos(kx+\theta_H)\sin\pi y, \tag{6.13.8b}$$

的情况。加热作用相对于地形的位相为一固定的 θ_H。加热作用在地面最大，随高度减小。地形和加热作用在经度方向是周期性的，这可以认为是，当中纬西风带的风绕地球运行时重现强迫作用的粗略模式。

可以寻找如下形式[1]的ϕ的解：

$$\phi=R_e\Phi(z)e^{ikx}\sin\pi y. \tag{6.13.9}$$

其中 $\Phi(z)$ 满足

$$\frac{1}{\rho_S}\frac{d}{dz}\frac{\rho_S}{S}\frac{d\Phi}{dz}+\left\{\frac{\beta}{u_0}-K^2\right\}\Phi=\frac{1}{\rho_S}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\rho_S\mathscr{H}_0e^{-az}e^{i\theta_H}}{iku_0}, \tag{6.13.10}$$

和

$$S^{-1}\frac{d\Phi}{dz}=-\eta_0+S^{-1}\frac{\mathscr{H}_0e^{i\theta_H}}{iku_0},\qquad 当\ z=0, \tag{6.13.11}$$

这里，

$$K^2=k^2+\pi^2. \tag{6.13.12}$$

当 z 很大时(6.12.5)式适用，所以 $z\to\infty$ 时，

$$\rho_S|\Phi|^2\quad 保持有界。 \tag{6.13.13}$$

条件 (6.13.13) 式也许有必要用辐射条件来补充，即在 $z\to\infty$ 处能通量指向外，也就是根据(6.10.20) (由于 $z\to\infty$ 时 $\mathscr{H}$ 为零)，有

$$\overline{\rho_S p_0 w_1}^{x,y}=-\rho_S\overline{\frac{\psi}{S}\frac{d}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial z}}^{x,y}\geqslant 0, \tag{6.13.14}$$

其中，横杠 $\overline{\quad}^{x,y}$ 在任一表达式上面表示平均算子：

$$\overline{(\quad)}^{x,y}\equiv\frac{k}{4\pi}\int_0^{2\pi/k}dx\int_{-1}^{1}dy(\quad). \tag{6.13.15}$$

---

(1) 这留给读者来验证。在该情况下，$\psi_0+\phi$ 是完整的非线性位涡方程的解。

利用 Φ，辐射条件变为

$$\overline{\rho_S p_0 w_1}^{x,y}=\frac{ik\rho_S u_0}{8S}\left\{\Phi\frac{d\Phi^*}{dz}-\Phi^*\frac{d\Phi}{dz}\right\}\geqslant 0, \tag{6.13.16}$$

其中 Φ^* 是 Φ 的复共轭。

为使分析进一步简单，假定 S 为常数，而且无量纲密度标高

$$H=-\left(\frac{1}{\rho_S}\frac{\partial\rho_S}{\partial z}\right)^{-1} \tag{6.13.17}$$

也为常数，所以(6.13.10)可写为

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2}-\frac{1}{H}\frac{d\Phi}{dz}+\left\{\frac{\beta}{u_0}-K^2\right\}S\Phi=-\frac{[1+(\alpha H)^{-1}]\alpha\mathscr{H}_0 Ze^{-\alpha z+i\theta_H}}{iku_0}. \tag{6.13.18}$$

容易找到(6.13.18)式的一个特解，它为

$$\Phi=\Phi_p(z)=-\frac{\alpha\mathscr{H}_0[1+(\alpha H)^{-1}]}{iku_0}\frac{e^{-\alpha z}e^{i\theta_H}}{\{(\beta/u_0-K^2)S+\alpha^2[1+(\alpha H)^{-1}]\}}. \tag{6.13.19}$$

但是，单有这个解并不满足(6.13.11)，所以，$\Phi_p(z)$必须加上(6.13.18)式的齐次解。齐次解的形式为

$$\Phi_H(z)=e^{z/2H}\{Ae^{imz}+Be^{-imz}\}, \tag{6.13.20a}$$

其中

$$m=\left\{\left(\frac{\beta}{u_0}-K^2\right)S-\frac{1}{4H^2}\right\}^{1/2}. \tag{6.13.20b}$$

有两种重要而性质截然不同的情况。如果

$$\frac{\beta}{u_0}>K^2+(4H^2S)^{-1}, \tag{6.13.21}$$

则 m^2 为正，而且解(6.13.20)在 z 方向是振荡的。如果(6.13.21)式中的不等号反向，则 m^2 为负，而且其解是一对无振荡的指数增长和衰减的解，其形式为

$$\Phi_H=e^{z/2H}\{Ce^{-qz}+De^{qz}\}, \tag{6.13.22}$$

其中

$$q=S^{1/2}\left\{K^2+(4H^2S)^{-1}-\frac{\beta}{u_0}\right\}^{1/2}. \tag{6.13.23}$$

注意，振荡解之存在要求

$$0>-u_0k>-\frac{\beta k}{k^2+(4H^2S)^{-1}}, \tag{6.13.24}$$

利用6.11节的罗斯贝波，它有如下意义。对 $k>0$ 的情况，罗斯贝波频率为负，并且，作为垂直波数的函数，它在 $m^2=0$ 时达到代数极小值[1]，在这种情况下，处于静止状态的介质中的频率为

$$\sigma_0=-\frac{\beta k}{K^2+(4H^2S)^{-1}}. \tag{6.13.25}$$

在我们这个例子中，波在固定于地面的坐标系中是定常的。如果我们移到以均匀速度 u_0 运

(1) 但在绝对数值上是极大值。

动的坐标系中，那末平均流就为零，我们观测到波的频率为

$$\sigma = -u_0 k. \tag{6.13.26}$$

因此，条件 (6.13.24) 就是 u_0 小到足以使强迫频率 $-u_0 k$ 位于垂直传播的罗斯贝波的频率范围内的条件。否则，$m^2<0$，在 z 方向不可能有振荡，并且，运动在地面附近是被拦截的。

由于

$$\rho_S(z)=\rho_S(0)e^{-z/H}, \tag{6.13.27}$$

所以，条件(6.13.13)式意味着

$$\lim_{z\to\infty} e^{-z/2H}\Phi(z) \quad \text{一定有界。} \tag{6.13.28}$$

如果 $m^2<0$，则 (6.13.20a) 式中的第二个解必须舍去，所以 $B=0$。另一方面，如果 $m^2>0$，则 (6.13.20a) 中的两个解将满足 (6.13.28) 式，即在无穷远处，两个解的能通量有限。根据(6.13.14)式，第一个解在 z 方向的能通量为

$$\rho_S \overline{p_0 w_1}^{x,y} = \frac{|A|^2 km \rho_S(0)}{4S}, \tag{6.13.29}$$

而对于与 B 成比例的第二个解，

$$\rho_S \overline{p_0 w_1}^{x,y} = \frac{-|B|^2 km \rho_S(0)}{4S}. \tag{6.13.30}$$

因此，第一个解表示能通量向上的波，而第二个解表示能通量指向地面的波。为满足辐射条件，无穷远处的波扰动能通量必须背离能源方向，这就要求只选第一个解。所以我们选 $B=0$。

与 (6.11.14) 式之比较表明，该条件恰好等价于选择一个垂直群速度为正的波，该群速度与 x 和 z 方向的波数乘积成正比。因此，对于 m^2 大于或小于零的情况，齐次解均可写为

$$\Phi_H = Ae^{z/2H}e^{imz}, \tag{6.13.31}$$

按照约定，(6.13.20b)式中的平方根 m 被表为

$$im = i\left\{(K_S^2-K^2)S-\frac{1}{4H^2}\right\}^{1/2}, \quad \text{当 } m^2>0, \tag{6.13.32a}$$

$$im = -\left\{\frac{1}{4H^2}+(K^2-K_S^2)S\right\}^{1/2}, \quad \text{当 } m^2<0, \tag{6.13.32b}$$

其中，在各情况下都选正的平方根，并且

$$K_S^2=\frac{\beta}{u_0} \tag{6.13.33}$$

是正压罗斯贝波(3.18.10)的罗斯贝驻波数。按照这个约定，整个解为

$$\Phi=\Phi_p+\Phi_H, \tag{6.13.34}$$

其中 Φ_p 和 Φ_H 由 (6.13.19) 和 (6.13.31) 式给出。常数 A 由 (6.13.34) 式代入下边界条件 (6.13.11) 来确定它为

$$A=-\frac{\eta_0(1/2H-im)}{K_S^2-K^2}-\frac{\mathscr{H}_0 e^{i\theta_H}}{iku_0}\frac{1/2H-im}{(K_S^2-K^2)S+\alpha^2(1+\mu)},$$

其中

$$\mu=(\alpha H)^{-1}. \tag{6.13.35}$$

于是当 $m^2<0$ 时 ϕ 解可写为

$$\phi=-\frac{\mathscr{H}_0}{ku_0}\left[\alpha(1+\mu)e^{-\alpha z}-\left(\frac{1}{2H}+q\right)e^{(1/2H-q)z}\right]$$

$$\times\frac{\sin(kx+\theta_H)\sin\pi y}{(K_S^2-K^2)S+\alpha^2(1+\mu)}-\frac{\eta_0(1/2H+q)}{K_S^2-K^2}e^{z(1/2H-q)}\cos kx\sin\pi y, \qquad (6.13.36)$$

而当 $m^2>0$ 时，

$$\phi=\frac{\sin\pi y\mathscr{H}_0}{ku_0}\left[-\sin(kx+\theta_H)e^{-\alpha z}\alpha(1+\mu)+\frac{1}{2H}\sin(kx+mz+\theta_H)e^{z/2H}\right.$$

$$\left.-m\cos(kx+mz+\theta_H)e^{z/2H}\right]\times[(K_S^2-K^2)S+\alpha^2(1+\mu)]^{-1}$$

$$-\frac{\sin\pi y\eta_0e^{z/2H}}{K_S^2-K^2}\left[\frac{1}{2H}\cos(kx+mz)+m\sin(kx+mz)\right], \qquad (6.13.37)$$

其中 q 和 m 分别由(6.13.23)和(6.13.20b) 式给出。如果 $m^2<0$，则大气的总响应是在地面附近被拦截；而如果 $m^2>0$，则由加热作用和地形共同引起的扰动将向高空传播。这种起源于对流层下部的上传波，一般被认为（如 Holton，1975）在平流层动力学中起着重要的作用。按照(6.13.21)式，当平流层中存在弱西风时有利于这种波向上传播，而弱西风主要出现在春秋季。从(6.13.36)式也可看出，当 $K^2\to K_S^2$（此时 $m^2=-1/4H^2$，且 $q=1/2H$）时，它对于地形诱生波发生共振。在这特定的波长上，强迫作用与6.12节的正压罗斯贝模态发生共振，当 $K^2=K_S^2+(\alpha^2/S)(1+\mu)$ 时，对于由加热作用引起的拦截运动将发生类似的共振。

如果假定大气的加热作用出现在近地面的一个薄层内，其中有凝结和蒸发作用，那么，(6.13.36)和(6.13.37)式中的α将远大于1，并且正如该二式所表明的，这时大气之响应(尤其是在 z 很大的地方）与地形响应相比趋于小量，为此，余下的讨论将限于地形波，它为

$$\phi=\phi_T=\frac{-\eta_0(q+1/2H)e^{z(1/2H-q)}}{K_S^2-K^2}\cos kx\sin\pi y, \quad m^2<0,$$

$$=\frac{-\eta_0e^{z/2H}}{K_S^2-K^2}\left[\frac{1}{2H}\cos(kx+mz)+m\sin(kx+mz)\right]\sin\pi y, m^2>0. \qquad (6.13.38)$$

与这个扰动流函数相联系的是扰动动力场，在 $m^2>0$ 的情况下为

$$\tilde{\theta}_0=\frac{\partial\phi_T}{\partial z}=-\eta Se^{z/2H}\cos(kx+mz)\sin\pi y, \qquad (6.13.39a)$$

$$\tilde{v}_0=\frac{\partial\phi_T}{\partial x}=\frac{\eta_0e^{z/2H}}{K_S^2-K^2}\left[\frac{k}{2H}\sin(kx+mz)-mk\cos(kx+mz)\right]\sin\pi y, \qquad (6.13.39b)$$

$$\tilde{u}_0=-\frac{\partial\phi_T}{\partial y}=\frac{\eta_0e^{z/2H}}{(K_S^2-K^2)}\pi\left[\frac{1}{2H}\cos(kx+mz)+m\sin(kx+mz)\right]\cos\pi y, \qquad (6.13.29c)$$

$$\tilde{w}_1=-\frac{u_0}{S}\frac{\partial^2\phi_T}{\partial x\partial z}=-u_0\eta_0ke^{z/2H}\sin(kx+mz)\sin\pi y, \qquad (6.13.39d)$$

其中符号“～”表示扰动动力场。

注意，位温扰动与地形变化相差180°的位相，因为当 $\eta_B(x,y)$为正时，具有低位温值的

流体元上升。由地形坡度产生的垂直速度 $\tilde{w}_1$ 引起涡管伸长，它又给出 $\tilde{v}_0$ 的一个简单表达式，即

$$\tilde{v}_0=\frac{1}{\beta-u_0K^2}\frac{1}{\rho_S}\frac{\partial}{\partial z}\rho_S\tilde{w}_1, \tag{6.13.40}$$

它可以根据(6.13.39b,d)来验证。向北的速度与位温起伏的相关关系如下，当流越过 η_B 的脊时，如前所述，总位温是降低的。所产生的涡管压缩由于行星涡度梯度之影响而引起向南的流动。因此平均说来，负的 $\tilde{\theta}_0$ 与向南流动相联系，等价地，正的 $\tilde{\theta}_0$ 与向北流动相关，故

$$\rho_S\overline{\tilde{\theta}_0\tilde{v}_0}^{x,y}=\frac{\eta_0^2S}{K_S^2-K^2}\frac{km}{4}. \tag{6.13.41}$$

因此，若 $K_S^2>K^2$，地形强迫波是上传的，则与上传的地形诱生驻波相联系的位温通量向北。平均向东通量 $\overline{\tilde{\theta}_0\tilde{v}_0}^{x,y}$ 恒为零。垂直波动能通量

$$\rho_S\overline{p_0w_1}^{x,y}=u_0\frac{\eta_0^2}{K_S^2-K^2}\frac{km}{4} \tag{6.13.42}$$

与向北热通量成正比。有向上的能量传播，意味着存在平均流时地形产生向上携带能量的波动。这就是说，与地形有动量和能量的交换。尤其是，地形作用于流体的波曳力为

$$p_0\overline{\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)_{z=0}}^{x,y}=\frac{\eta_0^2}{K_S^2-K^2}\frac{km}{4}, \tag{6.13.43}$$

而波曳力对流体作功的功率 $u_0\times$ 曳力，恰好等于向高空辐射的能通量。

当 $m^2<0$ 时，不可能有垂直传播的波，就象向北热通量 $\overline{\tilde{v}_0\tilde{\theta}_0}^{x,y}$ 和地形作用于流体的波曳力一样，垂直传播的能量也恒为零。这道理很简单，留给读者自己证明。因此，上传波是重要的，这不仅因为它向平流层输送能量，而且因为它对低空大气的扰动热通量及动量平衡也有贡献。对于任意 $u_0(z)$，关系式

$$\overline{\tilde{p}_0\tilde{w}_1}^{x,y}=\frac{u_0}{S}\overline{\tilde{\theta}_0\tilde{v}_0}^{x,y} \tag{6.13.44}$$

成立，并且在定常运动中，直接考虑无加热作用的线性化位涡方程(6.5.12)便可证明，即根据(6.5.12)式有

$$u_0\frac{\partial}{\partial x}\tilde{\theta}_0-\frac{\partial u_0}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial x}=-\tilde{w}_1S. \tag{6.13.45}$$

用 $p_0=\phi$ 乘以(6.13.45)式，再对 x 和 y 积分，立即得(6.13.44)式。

6.14 波动-纬向流相互作用定理

我们从上一节中看到，由加热作用和（或）地形产生的波，一般有非零的纬向平均的向北热通量和垂直能通量。如果由波产生的这些调整通量随 y 和 z 变化，那末这些通量的辐合有可能同时改变纬向速度场和纬向平均温度场。Charney 和 Drazin (1961) 建立的一个著名的准地转运动定理，阐明了在什么情况下波通量不能改变纬向流。事实上，在许多重要的情况下，纬向流是造成波动存在的有利因素，而基本上不受波场的影响。

我们把各变量（如 u_0）在无穷 x 区间上分成纬向平均量，

$$\overline{u_0}^x=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x}u_0dx, \tag{6.14.1}$$

和相对于平均值的经度方向的扰动量 u'_0，其中

$$u'_0 = u_0 - \bar{u}_0^x, \tag{6.14.2}$$

因此，

$$\overline{u'_0}^x \equiv 0. \tag{6.14.3}$$

由于 u_0 和 v_0 处于地转平衡，所以有

$$\bar{v}_0^x = 0. \tag{6.14.4}$$

各变量可写成

$$\begin{aligned} u_0 &= \bar{u}_0^x + u'_0, \\ \theta_0 &= \bar{\theta}_0^x + \theta'_0, \\ v_0 &= v'_0, \\ v_1 &= \bar{v}_1^x + v'_1, \\ w_1 &= \bar{w}_1^x + w'_1. \end{aligned} \tag{6.14.5}$$

注意，平均值为零的各项的二次乘积项之平均值可以不为零，如

$$\overline{u_0 v_0}^x = \overline{u'_0 v'_0}^x \neq 0. \tag{6.14.6}$$

如果把(6.14.5)所给出的分解式代入(6.3.13a)中，并对所得结果使用平均算子(6.14.1)，则得平均纬向速度变化率之方程：

$$\boxed{\frac{\partial \bar{u}_0^x}{\partial t} = \bar{v}_1^x - \frac{\partial}{\partial y}(\overline{u'_0 v'_0}^x)}, \tag{6.14.7}$$

而在无加热作用时(6.5.12)式之平均得

$$\boxed{\frac{\partial \bar{\theta}_0^x}{\partial t} = -S\bar{w}_1^x - \frac{\partial}{\partial y}(\overline{\theta'_0 v'_0}^x)}. \tag{6.14.8}$$

质量守恒方程(6.3.14)之平均得

$$\boxed{\frac{1}{\rho_S}\frac{\partial}{\partial z}\rho_S \bar{w}_1^x + \frac{\partial \bar{v}_1^x}{\partial y} = 0}. \tag{6.14.9}$$

有意思的是，虽然 $O(\varepsilon)$ 动量方程和质量方程一般包含 β 平面模式中所没有的曲率项，但 $O(\varepsilon)$ 的纬向平均运动方程却与 β 平面模式得到的平均运动方程完全一样。

纬向动量方程(6.14.7)表明，有两种截然不同的物理过程可以改变平均速度 $\bar{u}_0^x$。第一种是小的平均径向速度 $\bar{v}_1^x$。有地球旋转作用时，作用在向北运动流体元上的向右的科氏力将使运动产生平均纬向加速度。必须注意，非零 $\bar{v}_1^x$ 之存在完全取决于非地转运动之存在。(6.14.7)式中的第二项是雷诺应力梯度。如果乘积 $\overline{u'_0 v'_0}^x$ 大于零，则扰动（我们可以理解为波动场）将向北输送正的纬向动量。因此，如果在波动中 v'_0 与 u'_0 有正相关，则产生向北的纬向动量通量。若该通量是辐散的，即若 $(\partial/\partial y)(\overline{u'_0 v'_0}^x) > 0$，则平均说来，离开该区域的纬向动量要比进入该区域的多，因此平均纬向动量减少，这就是(6.14.7)式的物理意义。类似地，(6.14.8)式与平均位温的变化有关。当位温较低的流体垂直运动时，在有总体静力稳定度 S 的情况下，向上的缓慢平均运动 $\bar{w}_1^x$ 将有助于局部 $\bar{\theta}_0^x$ 降低。同时，波场的向北运动与位温扰动 θ'_0 之间的相关将产生向北的调整热通量 $\overline{v'_0\theta'_0}^x$，该热通量的辐散导致局部冷却，

因此按照(6.14.8)式，它将使 $\bar{\theta}_0^x$ 的局部值降低。如果把热成风关系(6.5.17)式应用于平均场，则有

$$\frac{\partial \bar{u}_0^x}{\partial z}=-\frac{\partial \bar{\theta}_0^x}{\partial y}. \tag{6.14.10}$$

无加热作用时，平均运动的位涡方程可以直接对(6.5.18)式作平均得到，或者可从(6.14.7)和(6.14.8)式中消去 $\bar{v}_1^x$ 和 $\bar{w}_1^x$ 来得到，它为

$$\frac{\partial \overline{\Pi}_0^x}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial y}\overline{v_0'\Pi_0'}^x, \tag{6.14.11}$$

其中

$$\overline{\Pi}_0^x=-\frac{\partial \bar{u}_0^x}{\partial y}+\frac{1}{\rho_S}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho_S\bar{\theta}_0^x}{S}\right), \tag{6.14.12}$$

$$\Pi_0'=\frac{\partial v_0'}{\partial x}-\frac{\partial u_0'}{\partial y}+\frac{1}{\rho_S}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho_S\theta_0'}{S}\right). \tag{6.14.13}$$

由于

$$u_0'=-\frac{\partial \psi_0'}{\partial y},$$

$$v_0'=\frac{\partial \psi_0'}{\partial x},$$

$$\theta_0'=\frac{\partial \psi_0}{\partial z},$$

结果有

$$\overline{v_0'\Pi_0'}^x=-\frac{\partial}{\partial y}\overline{v_0'u_0'}^x+\frac{1}{\rho_S}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho_S}{S}\overline{v_0'\theta_0'}^x\right). \tag{6.14.14}$$

因此，扰动引起的调整位涡通量直接与波动雷诺应力的 y 方向辐合和波动调整热通量之垂直变化有关。另一方面，由 $\bar{v}_1^x$ 和 $\bar{w}_1^x$ 给出的 $O(\varepsilon)$ 平均经圈环流，事实上也与这些通量项有关。如果利用(6.14.10)式在(6.14.7)和(6.14.8)式之间消去时间导数项，那末由于

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial u_0}{\partial z}+\frac{\partial \theta_0}{\partial y}\right\}=0, \tag{6.14.15}$$

所以有

$$-S\frac{\partial \bar{w}_1^x}{\partial y}+\frac{\partial \bar{v}_1^x}{\partial z}=+\frac{\partial^2}{\partial z\partial y}(\overline{u_0'v_0'})^x+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\overline{\theta_0'v_0'})^x. \tag{6.14.16}$$

如果对于经圈环流引入流函数 χ，即如果我们写成如下关系：

$$\rho_S\bar{w}_1^x=-\frac{\partial \chi}{\partial y},$$
$$\rho_S\bar{v}_1^x=\frac{\partial \chi}{\partial z}, \tag{6.14.17}$$

那末连续方程(6.14.9)总是成立的。引入流函数 χ 之后，满足了(6.14.9)式，同时，χ 可以通过把(6.14.17)式代入(6.14.16)式得到的波通量来确定：

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}+\frac{\rho_S}{S}\frac{\partial}{\partial z}\rho_S^{-1}\frac{\partial \chi}{\partial z}=\frac{\rho_S}{S}\frac{\partial^2}{\partial z\partial y}\overline{u_0'v_0'}^x+\frac{\rho_S}{S}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\overline{\theta_0'v_0'}^x. \tag{6.14.18}$$

因此，虽然平均经圈环流改变纬向流的物理机制与波通量改变纬向流的物理机制截然不同，但二者通过(6.14.18)式直接联系起来了。

现在来讨论小振幅波动方程。波动将满足位涡方程(6.5.21)的线性化形式，即在无摩擦和加热作用时，围绕纬向平均场的波动满足

$$\frac{\partial \Pi'}{\partial t}+\bar{u}_0^x\frac{\partial \Pi'}{\partial x}+v_0'\frac{\partial \overline{\Pi}_0^x}{\partial y}=0. \tag{6.14.19}$$

用振幅 a' 表征的(6.14.19)的解，将按照(6.14.18)式产生 $O(a'^2)$ 经圈环流[1]，按照(6.14.7)和(6.14.8)式可能引起$O(a'^2)$的$\bar{\theta}_0^x$和$\bar{u}_0^x$的变化。下面考虑的这些情况是，波场或者局部定常，或者在非定常时，具有与时间无关的 x 方向平均能量和位涡拟能，即

$$\overline{\psi_0'\frac{\partial}{\partial t}\Pi_0'}^x=\frac{\partial}{\partial t}\overline{(\Pi_0')^2}^x=0. \tag{6.14.20}$$

6.13节的定常波是这类波场的一个例子，但是任何满足

$$\frac{\partial \Pi'}{\partial t}=-C\frac{\partial \Pi'}{\partial x} \tag{6.14.21}$$

的均匀波动场，只要 C 是实常数，就会具有(6.14.20)式的性质。

如果满足(6.14.20)式，那末就可得到一个简单的位涡通量($\overline{v_0'\Pi_0'}^x$)方程。用$A\Pi_0'-B\psi$乘以(6.14.19)式，其中 A 和 B 是 y 和 z 的任意函数。如果把所得方程对 x 作平均，那末作分部积分后就得到

$$\boxed{\left\{A\frac{\partial \overline{\Pi}_0^x}{\partial y}+B\bar{u}_0^x\right\}\overline{v_0'\Pi_0'}^x=0}\ . \tag{6.14.22}$$

除非在 yz 平面的同一点上 $\bar{u}_0^x$ 和 $\partial\overline{\Pi}_0^x/\partial y$ 都为零，否则，波动的位涡通量必须恒为零，即

$$\overline{v_0'\Pi_0'}^x=0.$$

第七章中将讨论平均位涡梯度为零的特殊情况，在那里说明，$\partial\overline{\Pi}_0^x/\partial y$ 为零与平均流的不稳定性是有关系的。于是平均流的变化可以自动发生，这与本节所讨论的强迫波变化是根本不同的。

位涡通量为零有深刻的涵义。从(6.14.14)式立即可得

$$\frac{\partial}{\partial y}\overline{v_0'u_0'}^x=\frac{1}{\rho_S}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho_S}{S}\overline{v_0'\theta_0'}^x\right). \tag{6.14.23}$$

因此，(6.14.18)式的右端现在完全可用调整热通量来写：

$$\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}+S^{-1}\frac{\partial}{\partial z}\rho_s^{-1}\frac{\partial \chi}{\partial z}=\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\rho_s}{S}\overline{v_0'\theta_0'}^x\right)$$

$$+S^{-1}\frac{\partial}{\partial z}\rho_s^{-1}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho_s}{S}\overline{v_0'\theta_0'}^x\right), \tag{6.14.24}$$

(1) 实际上，$\bar{w}_1^x$和$\bar{v}_1^x$为$O(a'^2)$；$\bar{w}^x$和$\bar{v}^x$为$O(\varepsilon a'^2)$。

或简单地为

$$\mathscr{L}\chi=\mathscr{L}\left(\frac{\rho_s}{S}\overline{v_0'\theta_0'}^x\right), \tag{6.14.25}$$

其中 $\mathscr{L}$ 是线性椭圆微分算子：

$$\mathscr{L}=\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{1}{S}\frac{\partial}{\partial z}\rho_s^{-1}\frac{\partial}{\partial z}. \tag{6.14.26}$$

(6.14.25)对 χ 的一个特解显然为

$$\chi_p=\frac{\rho_s}{S}\overline{v_0'\theta_0'}^x , \tag{6.14.27}$$

所以我们可写

$$\chi=\chi_h+\chi_p, \tag{6.14.28}$$

其中 χ_h 满足

$$\boxed{\mathscr{L}\chi_h=0}. \tag{6.14.29}$$

如果我们假定在纬度 y_1 和 y_2 处 v 等于零，那末，由于在纬度 y_1 和 y_2 上 v_0' 和 $\partial v_0'/\partial z$ 一定也为零，所以有

$$\overline{v_1}^x=0=\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial\chi_h}{\partial z}+\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\rho_s}{S}\overline{v_0'\theta_0'}^x$$

$$=\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial\chi_h}{\partial z},\qquad 在\ y_1, y_2\ 上. \tag{6.14.30}$$

在 $z=0$ 处无加热作用和摩擦时，从(6.6.9)式的 x 平均得

$$w_1^x=-\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial\chi}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\overline{v_0\eta_B}^x. \tag{6.14.31}$$

另一方面，根据 (6.6.10) 式，扰动在下边界处的线性化边条件为

$$S^{-1}\left\{\frac{\partial\theta_0'}{\partial t}+\bar{u}_0^x\frac{\partial\theta_0'}{\partial x}+v_0'\frac{\partial\overline{\theta}_0'^x}{\partial y}\right\}=-v_0'\frac{\partial\overline{\eta}_B^x}{\partial y}-\bar{u}_0^x\frac{\partial\eta_B}{\partial x}, \tag{6.14.32}$$

用它乘以 ψ_0' 并作平均，然后再分部积分，便得

$$\bar{u}_0^x\ \overline{v_0'\theta_0'}^x=-\bar{u}_0^x\ \overline{v_0'\eta_B^x}. \tag{6.14.33}$$

如果 $\bar{u}_0^x$ 在地面不为零（否则地形就不产生波动），则有

$$\overline{v_0'\theta_0'}^x=-\overline{v_0'\eta_B}^x, \tag{6.14.34}$$

因此根据(6.14.31)式得

$$-\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial\chi_h}{\partial y}=0,\quad 在\ z=0\ 处. \tag{6.14.35}$$

如果高空的 χ_h 不受强迫作用，即当 $z\to\infty$ 时 $\chi_h\to 0$，那末满足条件(6.14.35)和(6.14.30)式的(6.14.29)式之解为

$$\chi_h=常数, \tag{6.14.36}$$

由此得出

$$\bar{v}_1^* = \frac{1}{\rho_s}\frac{\partial \chi_p}{\partial z} = \frac{1}{\rho_s}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho_s}{S}\overline{v_0'\theta_0'}^x\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{v_0'u_0'}^x\right), \tag{6.14.37}$$

和

$$\overline{W}_1^x = -\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial \chi_p}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\rho_s}{S}\overline{v_0'\theta_0'}^x\right) = -\frac{1}{S}\frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{v_0'\theta_0'}^x\right). \tag{6.14.38}$$

利用(6.14.7)和(6.14 8)式，上述关系式又意味着

$$\frac{\partial \bar{u}_0^x}{\partial t} = 0, \tag{6.14.39a}$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}_0^x}{\partial t} = 0. \tag{6.14.39b}$$

因此，在统计上的定常波场不受加热和摩擦作用时，热量和动量的调整通量所产生的平均经圈环流，正好抵消这些通量改变平均状态的趋势。位涡通量为零是联系动量通量与热通量的基本约束条件，而后者产生与雷诺应力梯度相抵消的 $\bar{v}_1^x$。平均状态不受波通量的影响，只是有助于波动场之存在。

当然，所有实际的波动场都会同时受到摩擦和加热作用产生的少量耗散。把摩擦和热源项加到波动位涡方程中可直接重复上述计算，这作为一个练习留给读者去做。此外，如果波场的振幅随时间有缓慢变化，例如，若 $(\partial/\partial t)\,\overline{\Pi'^2}^x$ 不为零，那末平均场将会改变。如果扰动量的纬向平均值随时间周期性地变化，那末平均纬向速度也会有相应的变化。

最后可以预料，耗散和加热作用在两个区域中变得特别重要。首先，在下边界埃克曼层中耗散变成重要因子，它将给出量级为 $(E_v^{1/2}/\varepsilon)^{-1}$ 的平均场变化的时间尺度，即旋转加强时间尺度。此外，$(\bar{u}_0^x - C)$ 为零的那些点特别重要，这是由于 ψ_0' 的微分方程，即

$$(\bar{u}_0^x - C)\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2\psi_0'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi_0'}{\partial y^2} + \frac{1}{\rho_s}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\rho_s}{S}\frac{\partial\psi_0'}{\partial z}\right] + \frac{\partial \overline{\Pi}_0^x}{\partial y}\frac{\partial\psi_0'}{\partial x} = 0 \tag{6.14.40}$$

在波的相速与局部纬向速度一致的那些点上变为奇异的。可以预料，ψ_0' 在这些点附近有剧烈的空间变化，而且，在其他地方可以忽略的摩擦和非线性作用，在 $\bar{u}_0^x - C$ 为小量的区域却可以起重要作用。如果摩擦和热力耗散在临界点附近（即在临界层内）确实重要，那么可以有非零的通量辐合及与它相联系的平均运动之变化。但是，如果在临界层动力学中考虑非线性，那末这种情况就有些难解了。Benney 和 Bergeron(1969)所作的分析（超出本书讨论范围）指出，如果在临界层内耗散与非线性效应相比可以忽略的话，那么，尽管波动场的动力学是局部非线性的，但平均运动仍保持不变。线性临界层分析将在 7.8 节的稳定性问题中进行讨论。

6.15 层结海洋中的地形波

在均质流体中，与倾斜底面有关的位涡梯度，在动力学上等价于行星涡度梯度。两种效应的动力相似，关键取决于泰勒-普劳德曼定理，即在小罗斯贝数的均质流体中，水平速度必定与深度无关。这又意味着，斜坡上的运动在下边界产生的涡管伸缩，将影响整个流体层，因此，相对涡度的变化与行星涡度梯度场中由运动引起的变化是不可区分的。显然可以预料，抑制垂直运动、且使水平速度与深度有关的层结之存在，将使底面坡度和 β 效应之间的动力

关系有很大改变。同时，引进一个有坡度的底面，将改变6.12节的本征值问题，并且严格地说，已不能把波动分解为正压模态与质量输送为零的斜压内模态之和。一般说来，引进值斜底面，将使所有模态均产生一个强迫垂直运动，从而改变其斜压结构。为了了解存在β效应和底面坡度时的运动性质，我们仿照 Rhines(1970) 的思路来研究如下的问题。考虑S为常数（即布伦特-维赛拉频率N_s为常数）的层结流体层在y方向倾斜的底面上的运动，底面之倾斜使得

$$\eta_B=\alpha y. \tag{9.15.1}$$

坡度参数α与实际底面坡度的关系由(3.12.18)式给出，即用有量纲单位表示为

$$\alpha=\left(\frac{f_0L^2}{UD}\right)\frac{\partial h_B}{\partial y_*}. \tag{6.15.2}$$

此外，假定密度标高远大于流体深度，所以ρ_s可取为常数。因此，该模式直接适用于海洋情况，但也可定性用于大气。

静止流体中的小振荡，必满足线性化的位涡方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{S^{-1}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right\}+\beta\frac{\partial\psi}{\partial x}=0, \tag{6.15.3}$$

并满足

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial z}=0,\qquad 在z=1处 \tag{6.15.4}$$

和

$$S^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial z}=-\alpha\frac{\partial\psi}{\partial x},\qquad 在z=0处, \tag{6.15.5}$$

这是使用(6.6.10)和(6.9.14)式的线性化形式得出的。从(6.15.5)式中注意到，若$\alpha\neq 0$，那末除非$z=0$处$\partial\psi/\partial x$为零，否则不可能存在垂直变化为零的非平凡解。若$z=0$处α为零，并且ψ与z无关，则(6.15.3)式表明，不可能有非平凡波动。在这种情况下，只允许有沿y等值线运动的定常地转流。

欲找形式为

$$\psi=R_e\Phi(z)e^{i(kx+ly-\sigma t)} \tag{6.15.6}$$

的平面波解，则要求能找到$\Phi(z)$的非平凡解，而$\Phi(z)$满足

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2}+m^2\Phi=0, \tag{6.15.7}$$

$$\frac{d\Phi}{dz}=0,\qquad z=1, \tag{6.15.8a}$$

$$\frac{d\Phi}{dz}=\frac{\alpha k}{\sigma}S\Phi,\quad z=0, \tag{6.15.8b}$$

其中

$$m^2=-S\left\{\frac{\beta k}{\sigma}+K^2\right\}, \tag{6.15.9a}$$

$$K^2=k^2+l^2. \tag{6.15.9b}$$

(6.15.7)和(6.15.8a,b) 是关于 m（即关于 σ）的本征值问题。如果 β 为零，即如果水平波长小到足以忽略地球球状的程度，那么 m 与 σ 无关，然而满足(6.15.8a,b)也就确定了 $\sigma(k,z)$。我们首先来考虑这种情况。

若 $\beta=0$，则

$$m^2=-\mu^2=-SK^2<0\,. \tag{6.15.10}$$

满足(6.15.8a)式的 Φ 的解为

$$\Phi=\frac{A\cosh S^{1/2}K(z-1)}{\cosh S^{1/2}K}. \tag{6.15.11}$$

在这种情况下，$\beta=0$ 的位涡方程化为

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(S^{-1}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)=0\,, \tag{6.15.12}$$

它仅确定了垂直尺度与水平尺度之间的关系。(6.15.11)式这个解在 $z=0$ 处最大，离开下边界后衰减。这就是底面拦截，它的 e 折迭垂直尺度是

$$d=\frac{1}{S^{1/2}K}=\frac{\lambda}{2\pi S^{1/2}}, \tag{6.15.13}$$

其中 λ 是水平波长，

$$\lambda=\frac{2\pi}{(k^2+l^2)^{1/2}}. \tag{6.15.14}$$

用有量纲单位表示则为

$$d_*=Dd=\frac{\lambda_*}{2\pi}\frac{f_0}{N_s}. \tag{6.15.15}$$

层结使拦截作用增强，而旋转使 d_* 增大。当然，在 $N_s\to0$ 且流体变为均质时，$d_*\to\infty$，因为这正是泰勒-普劳德曼定理的内容。如果把(6.15.11)式代入(6.15.8b)式，则得关于 σ 的本征值关系：

$$\sigma=-\frac{\alpha S^{1/2}k}{K\tanh KS^{1/2}}\,. \tag{6.15.16}$$

对于每个波数都存在单个振荡模态，它的频率由(6.15.16)式给出。在 $S\to0$ 的极限情况下，

$$\sigma\sim-\alpha\frac{k}{K^2}, \tag{6.15.17}$$

或用有量纲单位：

$$\sigma_*=-\frac{f_0}{D}\frac{\partial h_B}{\partial y_*}\frac{k_*}{k_*^2+l_*^2},$$

它给出有刚体上界面($F=0$)的均质流体中的罗斯贝波。在该极限情况下，$\Phi(z)$ 变得与 z 无关。事实上只要 $KS^{1/2}\to0$，即只要水平波长远远超过罗斯贝内变形半径时，总可找到均质流体中的极限情况。因此，即使，$S=O(1)$，充分长的波也会呈现为正压的，并且地形将产生一个与罗斯贝 β 波相似的振荡。另一方面，如图 6.15.1 所示，当 $KS^{1/2}$ 大于 1 时出现一种重要的变化。当 $KS^{1/2}$ 很大时，层结对波动的影响加大，并且底面的拦截作用也加大。在 $KS^{1/2}$ 很大的极限情况下，

$$\sigma \sim -\frac{aS^{1/2}k}{K},$$

$$\Phi \sim Ae^{-KS^{1/2}z}, \qquad KS^{1/2} \to \infty. \tag{6.15.18}$$

注意，在这个极限情况下，频率与波长无关，而只取决于波矢量的方向。有量纲频率为

$$\sigma_* = \frac{U}{L}\sigma = -\frac{\partial h_B}{\partial y_*}N_s\left(\frac{k_*}{K_*}\right), \tag{6.15.19}$$

并与旋转无关。解的指数结构却取决于 f_0。事实上在该极限下，这种波使人联想到 3.9 节的凯尔文波，其频率也与 f_0 无关，但其空间结构同样也取决于 f_0。在这两种情况下，垂直尺度与水平尺度之间的关系都由扰动位涡为零的条件来确定。注意，对于地形波，当 $\partial h_B/\partial y > 0$ 时，$\sigma/k < 0$.

β 的存在使问题变得更复杂一些。(6.15.9a)中的参数 m^2 现在取决于本征值 σ。于是，(6.15.7) 式的解分为两种类型。如果 $m^2 > 0$ ，那么满足(6.15.8a)的(6.15.7)式的解是

$$\Phi(z) = A\cos m(z-1), \tag{6.15.20}$$

利用(6.15.8b)式得本征值关系：

$$m\tan m = \frac{akS}{\sigma}. \tag{6.15.21}$$

由于根据(6.15.9a)式有

$$\sigma = -\frac{\beta k}{K^2 + m^2/S}, \tag{6.15.22}$$

所以(6.15.21)式可写成

$$\boxed{\tan m = -\frac{a}{\beta}\left\{ m + \frac{SK^2}{m} \right\}}. \tag{6.15.23}$$

另一方面，若 $m^2 = -\mu^2 < 0$ ，则有

$$\Phi(z) = A\cosh\mu(z-1), \tag{6.15.24}$$

并且从(6.15.8b)式得

$$\mu\tanh\mu = -\frac{ak}{\sigma}S, \tag{6.15.25a}$$

和

$$\boxed{\tanh\mu = -\frac{a}{\beta}\left\{ \mu - \frac{SK^2}{\mu} \right\}}, \tag{6.15.25b}$$

该式也可以用 $m = i\mu$ 代入(6.15.23)式而直接得到。本征值方程(6.15.23)和(6.15.25)式仅取决于波矢量（即取决于波长）的大小，而不取决于波矢量的方向。m(或μ)一经确定，由(6.15.22)式给出的频率就取决于波矢量的方向。

我们先来考虑关系式(6.15.25)。不失一般性，可认为μ是正的，并且只有唯一的 $\mu > 0$ 可以使(6.15.25)式成立，如图 6.15.2 所示，这可以分别画出方程的左端和右端来验证。因为

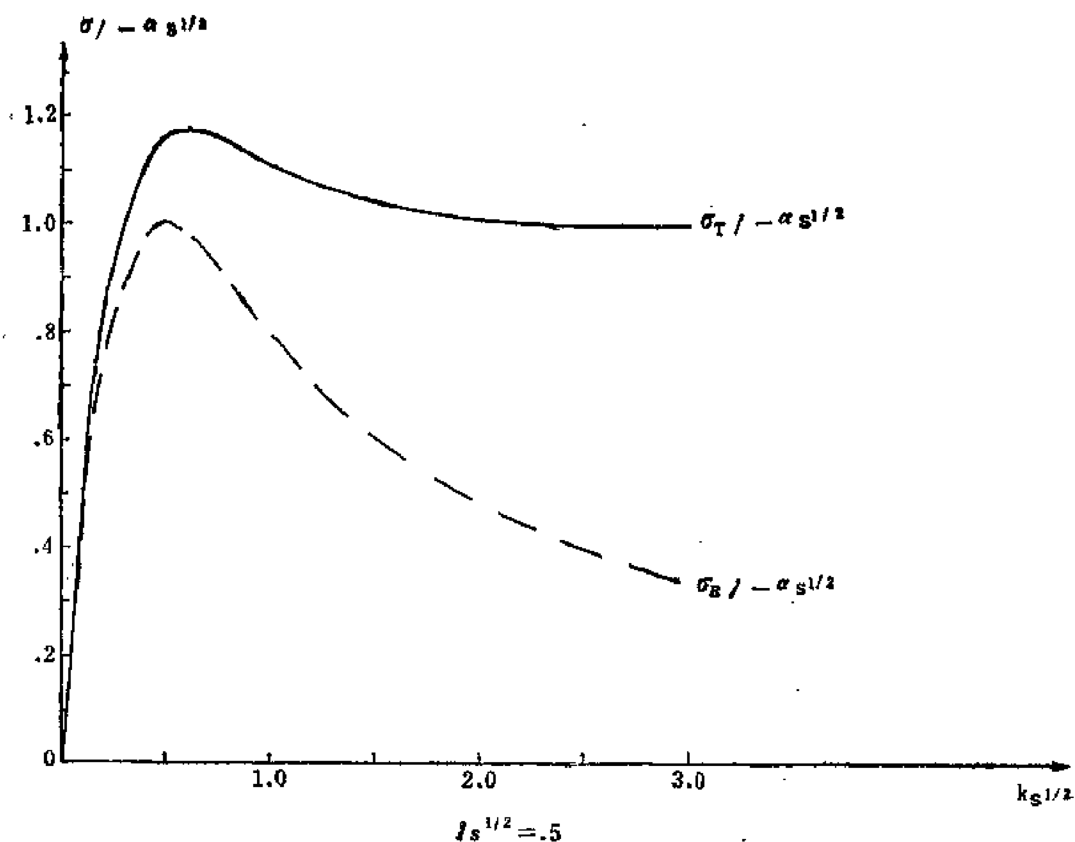


图6.15.1 层结流体中准地转地形罗斯贝波之频散关系。参数$KS^{1/2}$与除以波长λ_*的变形半径成正比，即$KS^{1/2}=2\pi L_D/\lambda_*$

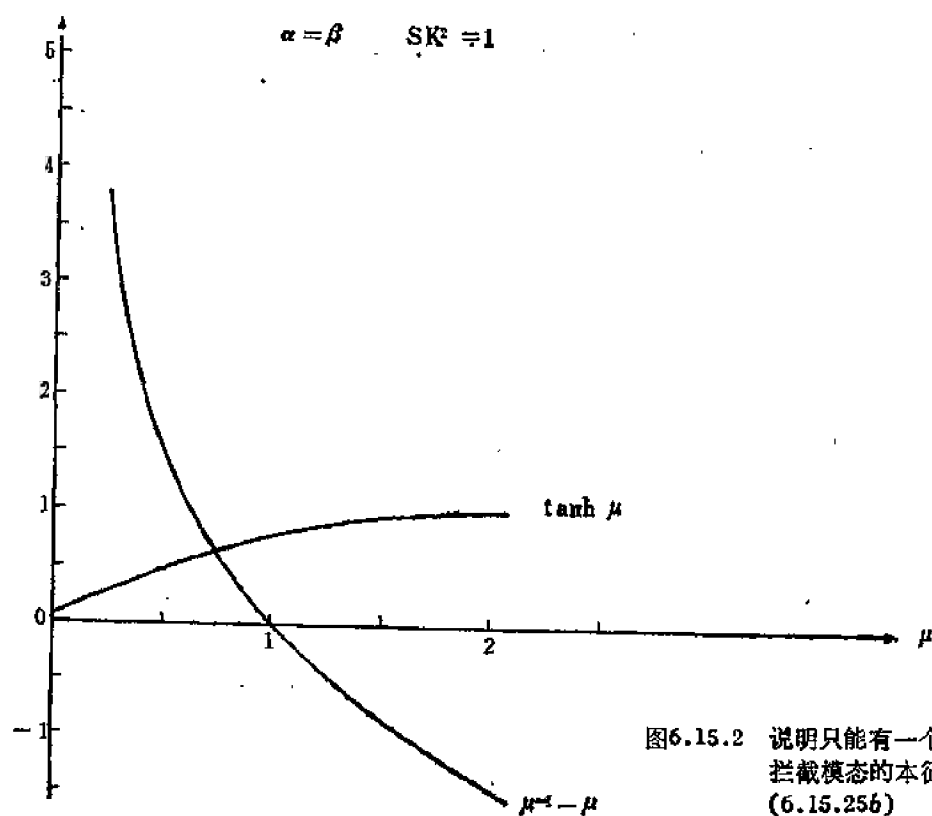


图6.15.2 说明只能有一个解的底面拦截模态的本征值关系(6.15.25b)

$$\mu^2 = S\left(K^2 + \frac{k\beta}{\sigma}\right),\tag{6.15.26}$$

S 小意味着 $\mu \ll 1$，所以(6.15.25)式可写成

$$\mu \tanh \mu \simeq \mu^2 = S\left(K^2 + \frac{\beta k}{\sigma}\right) = -\frac{\alpha}{\beta}\{\mu^2 - K^2 S\} = -\frac{\alpha k S}{\sigma},\tag{6.15.27}$$

或

$$\sigma = -\frac{(\alpha+\beta)k}{K^2},\tag{6.15.28}$$

相应地有

$$\mu = K\left(\frac{\alpha S}{\alpha+\beta}\right)^{1/2}.\tag{6.15.29}$$

因此，在 $S \to 0$ 的极限情况下，频散关系恰好变成罗斯贝波频率关系，并且行星涡度梯度和底面坡度的位涡梯度以 3.17 节所描述的方式合并成总位涡梯度的形式。对于均质流体，这两种效应是不可区分的。当层结增强时，或α/β增大时，(6.15.25)式的单极近似为$\mu = KS^{1/2}$，根据(6.15.25a)式有

$$\sigma \to -\frac{\alpha k S^{1/2}}{K \tan hKS^{1/2}},\tag{6.15.30}$$

它是 $\beta = 0$ 时的频散关系。由 $\Phi(z)$ 表示的模态结构受底面拦截的影响越来越大。因此，对于小的 S（近于均质流体），在正压振荡的情况下，地形和 β 效应线性地合并。对于大的 S（或大的 α 和/或大的K），(6.15.25b)式给出的模态在垂直范围内变得非常有限，以致 β 的影响与底面坡度的影响相比可以忽略。后者的影响毕竟可用

$$\frac{f_0}{D}\frac{dh_B}{dy_*}$$

来计量，其中 D 是运动的垂直尺度。当模态变为受底面拦截时，它的垂直尺度减小，所以底面位涡梯度变为主要的了。

如图 6.15.3 所示，由于 $\tan m$ 有周期性，故本征值关系(6.15,23)具有无穷多个解。但是要注意，$-(m+1/m)$不可能与 $\tan m$的第一支相交。这个“失去”的模态就是前面讨论过的底面拦截模态。当 $S \to 0$ 时，或者$m \to 0$（这时解变为正压模态），或者根据(6.15.22)式，对于 $m = O(1)$，σ 变为 $O(S)$。除非 K^2 也为 $O(S^{-1})$，否则在此极限情况下，波动变为非频散波。因此，对于小面非零的 S，存在着形式为

$$\Phi(z) = \cos m_0(z-1)\tag{6.15.31}$$

的斜压模态，其中 m_0 是方程

$$\tan m_0 = -\frac{\alpha}{\beta} m_0,\tag{6.15.32}$$

的解，而

$$\sigma = -\frac{\beta S k}{m_0^2}.\tag{6.15.33}$$

对于 $S = O(1)$、但 α 为小量（即底面坡度可忽略）的情况，(6.15.23)式的解是

$$m_j = j\pi, \qquad j = 0,1,2,\tag{6.15.34}$$

相应的频率为

$$\sigma_j = -\frac{\beta k}{K^2 + j^2\pi^2/S}, \qquad j = 0,1,2,\tag{6.15.35}$$

这是6.12节曾讨论过的罗斯贝标准模态（包括正压模态）.另一方面，对于大a或大S的情况，满足(6.15.23)式的m值为

$$m_j=\left(j+\frac{1}{2}\right)\pi, \quad j=0,1,2. \tag{6.15.36}$$

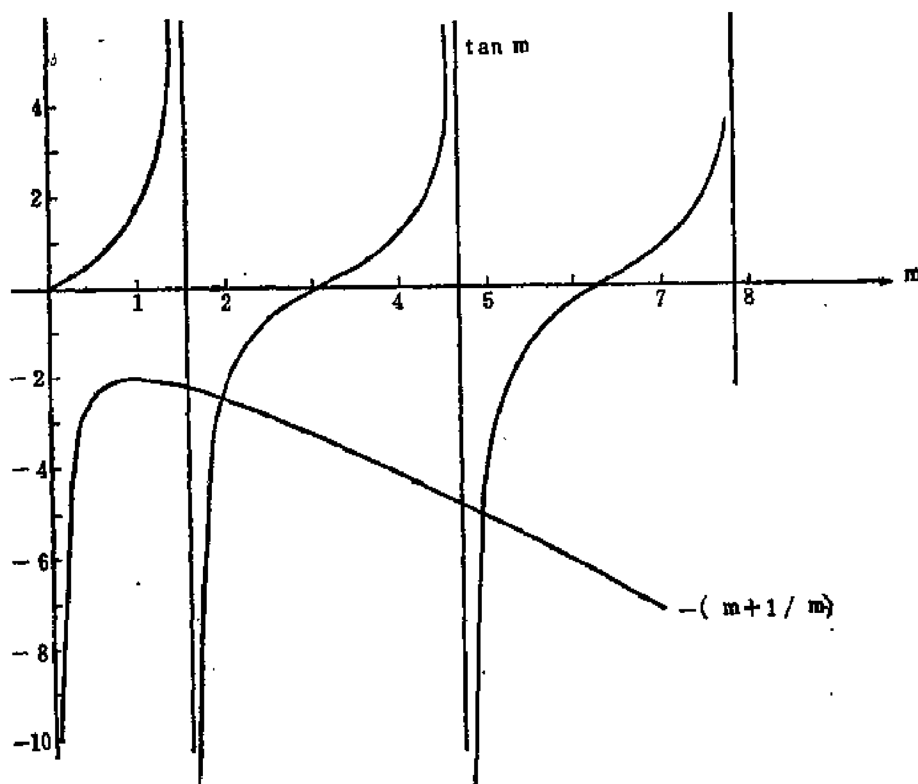


图6.15.3 本征值关系(6.15.23)说明解的多重性，每个解对应于不同的垂直模态结构

这些模态中没有一个是正压的。正压罗斯贝波已变为底面拦截的地形波（6.15.30）。其余的斜压罗斯贝波，每个都已向底面移动了一个$\Phi(z)$的节点（零点），即

$$\Phi_j(z)=A\cos\left[\left(j+\frac{1}{2}\right)\pi\,(z-1)\right]=(-1)^j A\sin j\pi z. \tag{6.15.37}$$

在这种情况下，

$$\sigma_j=-\frac{\beta k}{K^2+\left(j+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2/S}. \tag{6.15.38}$$

由于这些模态在$z=0$处的水平速度恒为零，所以，$\Phi_j(z)$在底面为零的事实，有效地把这种运动从其他底面坡度效应占优势的运动中分离出来。当(6.15.38)式中的σ_j与a没有明显依赖关系时，这是很显然的。在Φ结构的随后变化及垂直波数从$j\pi$到$\left(j+\frac{1}{2}\right)\pi$的变化中，隐含地反映出大$a$或大S的作用。

层结之存在从本质上改变了由下边界地形造成的运动之结构，然而甚至在层结流体中，也可以认为地形产生的自由振荡与第三章的罗斯贝地形波在动力学上是相似的。

6.16 多层模式

准地转近似虽然使大尺度运动的动力学分析大为简化，但是位涡方程(6.5.21)或(6.8.11)式仍是四个独立变量 x、y、z 和 t 的非线性偏微分方程。由有限个密度均匀、但彼此不同的均质流体层所组成的多层模式，提供了一个介于第三章单层正压模式和本章连续层结斜压模式之间的有用的中间系统。通常可用多层模式十分简单地模拟斜压效应。当然，这个简单性是以减小模式对运动的垂直结构之分辨能力作代价的，因此，在解释有限层系统时需要谨慎和经验。

考虑如图 6.16.1 所示的流体系统的运动：流体由N层组成，每一层由密度 $\rho_n(n=1,2,\cdots,N)$ 为常数的均质流体组成，其中

$$\rho_N>\rho_{N-1}>\cdots>\rho_{n+1}>\rho_n>\rho_{n-1}>\cdots>\rho_1.$$

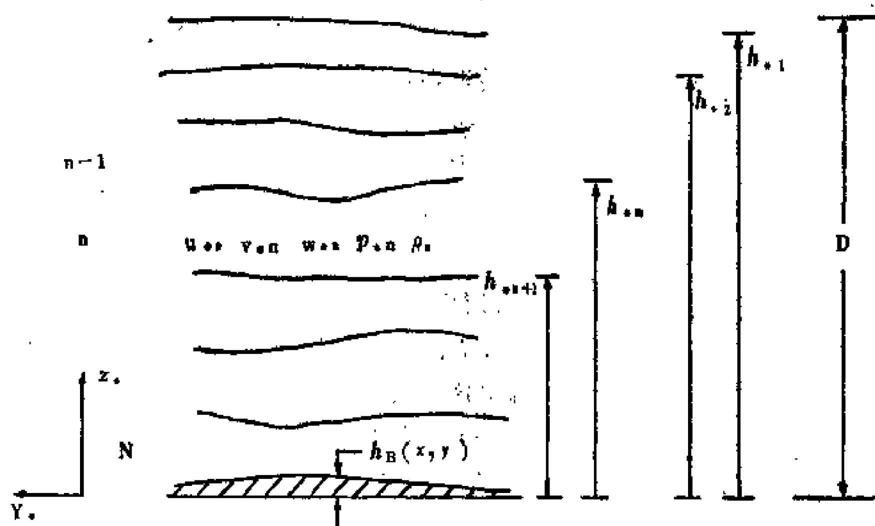


图6.16.1 N层模式

令 D 为流体高度的总体垂直尺度，而$h_{*n}(n=1,2,\cdots,N)$表示第n层上界面在参考高度 $z_*=0$ 以上的瞬时高度。象 6.12 节那样，我们设 U、L、D 和 UD/L 分别为运动的水平速度、水平长度、垂直长度和垂直速度的特征尺度。并且，我们还假设

$$\varepsilon=\frac{U}{f_0L}=O\left(\frac{L}{r_0}\right)\ll 1, \tag{6.16.1}$$

$$\delta=\frac{D}{L}\ll 1,$$

其中 r_0 是地球半径。与(6.2.18)式类似，该式表明各层中的压力可以写为

$$p_{*n}=\sum_{k=1}^{n-1}\rho_k gD_k+\rho_n g(H_n-z_*)+\rho^* f_0 UL p_n(x,y,z,t), \tag{6.16.2}$$

其中，常数 D_k 是无运动时第 k 层的有量纲厚度，H_n 也是在无运动时，第 n 层上界面的固定的有量纲高度。因此，$\rho_n f_0 UL p_n$ 表示压力场与无运动时流体静压力值之偏差。由于有(6.16.1)式，所以流体静力近似在各层内均成立，这意味着

$$\frac{\partial p_{*n}}{\partial z_*}=-\rho_n g, \tag{6.16.3}$$

或

$$\frac{\partial p_n}{\partial z}=0. \tag{6.16.4}$$

因此，压力偏差在各层内与Z无关。这对于模式有重要的后果，其原因如下。由于ε为小量，各变量可以象(6.3.5)式中的那样，展开
为ε的渐近级数，即

$$\begin{aligned} u_n&=u_n^{(0)}+\varepsilon u_n^{(1)}+\cdots,\\ v_n&=v_n^{(0)}+\varepsilon v_n^{(1)}+\cdots,\\ w_n&=\varepsilon w_n^{(1)}+\cdots,\\ p_n&=p_n^{(0)}+\varepsilon q_n^{(1)}+\cdots, \end{aligned} \tag{6.16.5}$$

其中，上标表示ε展式中的阶数，而下标表示变量所属的层数。注意，在w展式中没有$O(1)$项，这是由6.3节的结果得出的。$O(1)$地转近似是依次用于各层的(6.3.6a,b)式，即

$$\begin{aligned} v_n^{(0)}&=\frac{\partial p_n^{(0)}}{\partial x},\\ u_n^{(0)}&=-\frac{\partial p_n^{(0)}}{\partial y}, \end{aligned} \tag{6.16.6}$$

它们与(6.16.4)式一起，表示$u_n^{(0)}$和$v_n^{(0)}$在各层内与z无关。但是，不同层次中的水平速度可以是不同的。泰勒-普劳德曼定理在各层内均成立，但在各分界面处，剧烈的密度跃变使水平速度从一层到另一层也伴随出现跃变。为确定这个跃变，先考虑第n个分界面，其高度可写成

$$h_{*n}=Dh_n(x,y,t)=H_n+R_n\eta_n(x,y,t), \tag{6.16.7}$$

其中R_n是尚未给定的尺度分析常数，而η_n是第n个而离其未受扰动之值的$O(1)$无量纲偏差。R_n和η_n都用各分界面处压力必须连续的条件来确定。例如，在$z_*=h_{*n}$处，

$$p_{*n-1}=p_{*n}, \tag{6.16.8}$$

或者，利用(6.16.2)式和$D_{K-1}=H_{K-1}-H_K$有

$$\begin{aligned} &\sum_{K=1}^{n-1}\rho_K gD_K+\rho_{n-1}g\{H_{n-1}-H_n-R_n\eta_n\}+\rho_{n-1}f_0ULp_{n-1}(x,y,t)\\ &=\sum_{K=1}^{n-1}\rho_K gD_K+\rho_n g\{H_n-H_n-R_n\eta_n\}+\rho_n f_0ULp_n(x,y,t). \end{aligned} \tag{6.16.9}$$

由此得到

$$R_n g(\rho_n-\rho_{n-1})\eta_n=\rho_n f_0ULp_n-\rho_{n-1}f_0ULp_{n-1}. \tag{6.16.10}$$

为了保证η_n为$O(1)$的无量纲变量，把R_n选为

$$R_n=\frac{\rho_0 f_0 UL}{g\{\rho_n-\rho_{n-1}\}}=\varepsilon FD\,\frac{\rho_0}{\rho_n-\rho_{n-1}}, \tag{6.16.11}$$

其中ρ_0是流体密度的特征值（常数），并且与以前一样有

$$F\equiv\frac{f_0^2L^2}{gD}. \tag{6.16.12}$$

因此(6.16.7)式变为

$$h_n=\frac{H_n}{D}+\frac{\varepsilon F\eta_n(x,y,t)}{(\rho_n-\rho_{n-1})/\rho_0}. \tag{6.16.13}$$

与(6.5.13)式类似，我们假定

$$\frac{F\rho_0}{\rho_n-\rho_{n-1}}=O(1), \tag{6.16.14}$$

而

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_0}=\frac{\rho_n-\rho_{n-1}}{\rho_0}\ll 1 \tag{6.16.15}$$

与(6.4.13)和(6.4.14)类似,但是条件(6.16.15)对于多层模式是不必要的，它是一个容易放宽的假设。然而，对于我们的目的,要求满足(6.16.15)式比较方便．于是精确到 $O(\Delta\rho/\rho)$ 时，(6.16.10)式变为

$$\boxed{\eta_n=p_n-p_{n-1}}. \tag{6.16.16}$$

所以，分界面之变化直接同压力偏差在相邻两层之间的差值有关．尤其是(6.16.6)与(6.16.16)式一起意味着

$$u_n^{(0)}-u_{n-1}^{(0)}=-\frac{\partial\eta_n^{(0)}}{\partial y},$$
$$v_n^{(0)}-v_{n-1}^{(0)}=\frac{\partial\eta_n^{(0)}}{\partial x}. \tag{6.16.17}$$

因此就象图6.16.2所示，相邻两层间的速度差直接取决于该两层之间界面的坡度．水平密度梯度局限于密度变化不连续的分界面处。显然，根据热成风平衡限制，它导致 u 和 v 的不连续变化．倾斜的分界面起着连续模式中倾斜等密度面或等位温面的作用．从(6.16.13)式中看到，给定的两层间的速度差要求，分界面变形与两层间密度差成反比关系．留给读者来证明

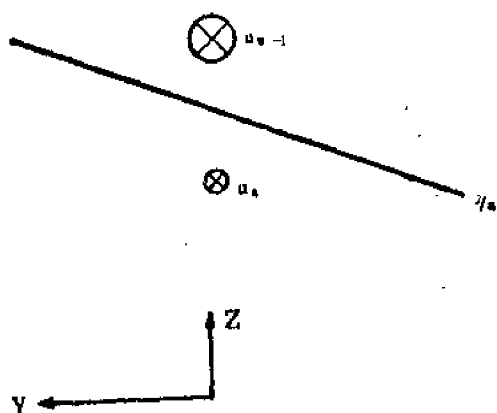


图6.16.2 在每个水平位置上，分界面坡度直接与相邻两层之间的速度差成正比。这里是 $U_{n-1}^{(0)}>U_n^{(0)}$ 的情况

$$\eta_1=p_1,\quad R_1=\varepsilon FD, \tag{6.16.18}$$

所以，由于第一层与其上密度基本为零的区域之间的 $O(1)$ 密度跃变，上自由面的变形比其他分界面的变形相应地小 $O(\Delta\rho/\rho)$ 倍．在各分界面上，垂直速度必须满足：

$$w_{*n}=\frac{D}{L}Uw_n=\frac{D}{L}U\varepsilon w_n^{(1)}+\cdots$$
$$=\frac{d}{dt_*}h_{*n}=\frac{U}{L}R_n\frac{d}{dt}\eta_n^{(0)}+\cdots, \tag{6.16.19}$$

或

$$w_n^{(1)}=\begin{cases}\dfrac{F}{(\rho_n-\rho_{n-1})/\rho_0}\dfrac{d\eta_n^{(0)}}{dt}, & \text{在 } z=h_n \text{ 处，} n>1, \quad (6.16.20a)\\[2ex] F\dfrac{d\eta_1^{(0)}}{dt}, & \text{在 } z=h_1 \text{ 处。} \quad (6.16.20b)\end{cases}$$

各层的 $O(1)$ 涡度平衡由(6.3.17)式表示。由于密度在各层内为常值，所以，(6.3.17)式在目前的讨论中可写为

$$\frac{d_0}{dt}\{\zeta_n^{(0)}+\beta y\}=\frac{\partial}{\partial z}w_n^{(1)}, \tag{6.16.21}$$

其中

$$\zeta_n^{(0)}=\frac{\partial v_n^{(0)}}{\partial x}-\frac{\partial u_n^{(0)}}{\partial y}=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)p_n^{(0)}, \tag{6.16.22}$$

和

$$\frac{d_0}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u_n^{(0)}\frac{\partial}{\partial x}+v_n^{(0)}\frac{\partial}{\partial y}. \tag{6.16.23}$$

由于$u_n^{(0)}$、$v_n^{(0)}$和由它们得到的$\zeta_n^{(0)}$在各层内与z无关，所以可把(6.16.21)式在第n层的深度内积分，得

$$\left\{\frac{D_n}{D}+\frac{O(\varepsilon F)}{\Delta\rho/\rho_0}\right\}\frac{d_0}{dt}\{\zeta_n^{(0)}+\beta y\}=w_n^{(1)}(x,y,h_n)-w_{n+1}^{(1)}(x,y,h_{n+1}). \tag{6.16.24}$$

对于除 $n=1$和 $n=N$外的所有n，(6.16.24)式右端可利用(6.16.20a)来计算，我们得到

$$\frac{d_0}{dt}[\zeta_n^{(0)}+\beta y]=\rho_0\frac{DF}{D_n}\frac{d_0}{dt}\left[\frac{\eta_n^{(0)}}{\rho_n-\rho_{n-1}}-\frac{\eta_{n+1}^{(0)}}{\rho_{n+1}-\rho_n}\right], \tag{6.16.25a}$$

或利用(6.16.16)式，对于$n\neq 1$、N有

$$\frac{d_0}{dt}\left\{\zeta_n^{(0)}+\beta y-\frac{DF}{D_n}\left[\frac{p_n^{(0)}-p_{n-1}^{(0)}}{(\rho_n-\rho_{n-1})/\rho_0}-\frac{p_{n+1}^{(0)}-p_n^{(0)}}{(\rho_{n+1}-\rho_n)/\rho_0}\right]\right\}=0. \tag{6.16.25b}$$

如果每个密度跃变都相等，那末对于 $n\neq 1$、N，(6.16.25b)式化为

$$\boxed{\frac{d_0}{dt}\left\{\zeta_n^{(0)}+\beta y-\frac{DF}{D_n\Delta\rho/\rho_0}[2p_n^{(0)}-p_{n+1}^{(0)}-p_{n-1}^{(0)}]\right\}=0}, \tag{6.16.26}$$

其中，

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_0}=\frac{\rho_n-\rho_{n-1}}{\rho_0}=\frac{\rho_{n+1}-\rho_n}{\rho_0}.$$

下层必须作特殊处理。在其下边界，即在$z_*=h_{*B}$处，由(6.6.9)式给出垂直速度：

$$w_N^{(1)}(x,y,h_{*B})=\frac{E_V^{1/2}}{2\varepsilon}\zeta_N^{(0)}(x,y,t)+\mathbf{u}_N^{(0)}\cdot\nabla\eta_B\frac{D_N}{D}, \tag{6.16.27}$$

其中

$$\eta_B=\frac{h_{*B}}{\varepsilon D_N}. \tag{6.16.28}$$

把涡度方程在最下层积分可得

$$\boxed{\frac{d_0}{dt}\left\{\zeta_N^{(0)}+\beta y-\frac{DF}{D_N}\left[\frac{p_N^{(0)}-p_{N-1}^{(0)}}{(\rho_N-\rho_{N-1})/\rho_0}\right]+\eta_B(x,y)\right\}=-\frac{E_V^{1/2}}{2\varepsilon}\frac{D}{D_N}\zeta_N^{(0)}}, \quad (6.16.29)$$

其中，

$$E_V=\frac{2A_V}{f_0D^2}.$$

同样可得最上层的方程。如果上表面是自由的，那末（6.16.20b）式就适用。于是，精确到 $\Delta\rho/\rho$ 量级时，上表面的运动与分界面 h_2 的运动相比可以忽略，并且在所涉及的垂直速度范围内，上表面（精确到 $O(\Delta\rho/\rho)$）似乎是刚体。因此，对于 $n=1$，容易得到

$$\boxed{\frac{d_1}{dt}\left\{\zeta_1^{(0)}+\beta y-\frac{DF}{D_1}\left[\frac{p_1^{(0)}-p_2^{(0)}}{(\rho_2-\rho_1)/\rho_0}\right]\right\}=0}. \quad (6.16.30)$$

有时用到上表面为真实刚体的模式，所以（4.5.50）式成立。于是容易证明，（6.16.30）式变为

$$\frac{d_0}{dt}\left\{\zeta_1^{(0)}+\beta y-\frac{DF}{D_1}\left[\frac{p_1^{(0)}-p_2^{(0)}}{(\rho_2-\rho_1)/\rho_0}\right]\right\}=\frac{E_V^{1/2}}{2\varepsilon}\frac{D}{D_1}\{\zeta_T-\zeta_1^{(0)}\}. \quad (6.16.31)$$

其中ζ_T是刚性上边界的外加涡度。

保留斜压特征的最简单模式是两层模式，即$N=2$。如果我们定义

$$\begin{aligned}\psi_1&=p_1^{(0)},\\ \psi_2&=p_2^{(0)},\end{aligned} \quad (6.16.32)$$

和

$$\begin{aligned}F_1&=\frac{f_0^2L^2}{g(\Delta\rho/\rho)D_1},\\ F_2&=\frac{f_0^2L^2}{g(\Delta\rho/\rho)D_2},\\ \frac{\Delta\rho}{\rho}&=\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_0},\end{aligned} \quad (6.16.33)$$

那末，（6.16.29）和（6.16.30）式就变为

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right]\left[\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi_1}{\partial y^2}-F_1(\psi_1-\psi_2)+\beta y\right]=0, \quad (6.16.34a)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial\psi_2}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right]\left[\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi_2}{\partial y^2}-F_2(\psi_2-\psi_1)+\beta y+\eta_B\right]$$
$$=-\frac{r_2}{2}\left[\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi_2}{\partial y^2}\right], \quad (6.16.34b)$$

其中

$$r_2=\frac{(A_Vf_0)^{1/2}}{U}\frac{L}{D_2}. \quad (6.16.35)$$

方程组（6.16.34a,b）显然是单层准地转位涡方程（3.15.1）式之推广。（6.16.34a,b）中

两层的斜压运动依靠分界面

$$h_2=\frac{H_2}{D}+\varepsilon\frac{D_2}{D}F_2(\psi_2-\psi_1) \tag{6.16.36}$$

的运动来耦合，这个运动引起一层中的涡管压缩和另一层中的涡管伸长。该斜压系统是对连续模式的很大简化。对于这两个联立方程，现在只有三个独立变量（x,y,t）。

用$-\psi_1D_1/D$和$-\psi_2D_2/D$分别乘以（6.16.34a,b），然后相加，就可得到能量方程：

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{2}\sum_{K=1}^{2}\left[\left(\frac{\partial\psi_K}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi_K}{\partial y}\right)^2\right]\frac{D_K}{D}+\frac{1}{2}\left(\frac{F_1D_1+F_2D_2}{D}\right)(\psi_1-\psi_2)^2\right\}$$

$$+\nabla\cdot\mathbf{S}=-\frac{r_2}{2}\left[\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial y}\right)^2\right]\frac{D_2}{D}, \tag{6.16.37}$$

其中，

$$\mathbf{S}=\mathbf{i}\left\{\sum_{K=1}^{2}\left[-\psi_K\frac{\partial^2\psi_K}{\partial x\partial t}-u_K^{(0)}\psi_K\Pi_K^{(0)}\right]\frac{D_K}{D}-\beta\frac{\psi_K^2}{2}\frac{D_K}{D}-\frac{r_2}{2}\psi_2\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\frac{D_2}{D}\right\}$$

$$+\mathbf{j}\left\{\sum_{K=1}^{2}\left[-\psi_K\frac{\partial^2\psi_K}{\partial y\partial t}-v_K^{(0)}\psi_K\Pi_K^{(0)}\right]\frac{D_K}{D}-\frac{r_2}{2}\psi_2\frac{\partial\psi_2}{\partial y}\frac{D_2}{D}\right\}, \tag{6.16.38}$$

这里，

$$\Pi_K^{(0)}=\frac{\partial^2\psi_K}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi_K}{\partial y^2}+(-1)^KF_K(\psi_1-\psi_2). \tag{6.16.39}$$

这个守恒表达式说明，在无耗散（$r_2=0$）的情况下，如果在流体区域侧边界上$\mathbf{S}$为零，那末动能与有效位能之和守恒，对于两层模式，其有效位能即为

$$\mathscr{A}=\frac{1}{2}\frac{F_1D_1+F_2D_2}{D}(\psi_1-\psi_2)^2. \tag{6.16.40}$$

用类似于6.10节的论证方法容易证明，$\mathbf{S}$的法向分量沿闭合的刚性边界之积分确实为零。

6.17 两层模式中的罗斯贝波

本节讨论线性罗斯贝波之动力学特征，作为用两层模式来描述动力学现象的一个例子。如果不计耗散作用和底面坡度，那末根据（6.16.34a,b）式，静止状态附近之小振幅运动的两层模式方程为

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi_1}{\partial y^2}-F_1(\psi_1-\psi_2)\right]+\beta\frac{\partial\psi_1}{\partial x}=0, \tag{6.17.1a}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi_2}{\partial y^2}-F_2(\psi_2-\psi_1)\right]+\beta\frac{\partial\psi_2}{\partial x}=0. \tag{6.17.1b}$$

在无限的xy平面上，可以寻找如下形式的平面波解：

$$\psi_1=R_eA_1e^{i(kx+ly-\sigma t)},$$

$$\psi_2=R_eA_2e^{i(kx+ly-\sigma t)}, \tag{6.17.2}$$

其中A_1和A_2是复常数，它们的模和相角给出各层运动的大小和相对位相。如果把（6.17.2）式代入（6.17.1a，b）式，则得两个关于A_1和A_2的齐次联立代数方程：

$$A_1[\sigma(K^2+F_1)+\beta k]+[-\sigma F_1]A_2=0, \tag{6.17.3a}$$

$$A_1[-\sigma F_2]+[\sigma(K^2+F_2)+\beta k]A_2=0, \qquad (6.17.3b)$$

其中

$$K^2=k^2+l^2.$$

仅当它们的系数行列式为零，即仅当σ是二次方程

$$\sigma^2K^2(K^2+F_1+F_2)+\sigma\beta k(2K^2+F_1+F_2)+\beta^2k^2=0 \qquad (6.17.4)$$

的一个根时，A_1和A_2才可能有非零解，而（6.17.4）的两个根为

$$\sigma_1=-\frac{\beta k}{K^2}, \qquad (6.17.5a)$$

$$\sigma_2=-\frac{\beta K}{K^2+F_1+F_2}. \qquad (6.17.5b)$$

对应于每一个根，用（6.17.3a）或（6.17.3b）式可以得到垂直结构比A_1/A_2。因此

$$A_1=A_2, \quad 当\ \sigma=\sigma_1\ 时 \qquad (6.17.6)$$

而

$$A_1F_2=-A_2F_1 \quad 当\sigma=\sigma_2时,$$

它也可写为

$$A_1D_1=-A_2D_2, \quad 当\sigma=\sigma_2\ 时. \qquad (6.17.7)$$

把（6.17.5a）式与连续模式的同样结果（6.12.10）加以比较可知，第一个根对应于正压模态。由于在该模态中$A_1=A_2$，两层的运动是相同的，速度与深度无关，并且由（6.16.36）式看出，分界面的位移恒为零。这正肯定了前面得出的结论，即有正压模态时，它与层结的具体特性无关。另一方面，σ_2对于参数F_1和F_2的依赖关系（6.17.5b）说明，第二模态取决于两层之间的密度差。更确切地说，σ_2取决于长度尺度（可以认为它是波长）与两个变形半径之比，即

$$F_n=\frac{L^2}{R_n^2}, \qquad n=1,2, \qquad (6.17.8a)$$

其中，

$$R_n=\frac{1}{f_0}\left(g\frac{\Delta\rho}{\rho}D_n\right)^{1/2}, \quad n=1,2. \qquad (6.17.8b)$$

正如（6.17.1）式所表示的，第二模态中总的瞬时水平输送恒为零。分界面变形为

$$h_2=\frac{H_2}{D_1}-\varepsilon F_2R_eA_1e^{i(kx+ly-\sigma t)}, \quad \sigma=\sigma_2, \qquad (6.17.9)$$

因此，第二模态的性质对应于6.12节的斜压模态，根据（6.12.11）式，后者也满足输送为零的条件。此外，如图6.17.1所示，把该二模态的结构与连续模式的前两个模态的模式结构相比可知，两层模式可以看作连续模式的正压模态和第一个斜压模态（具有单个内节点的模态）的表示。

两层模式不能描述较高模态的结构和动力学特征。一般说来，一个N层模式只能模拟连续模式的前N个模态。

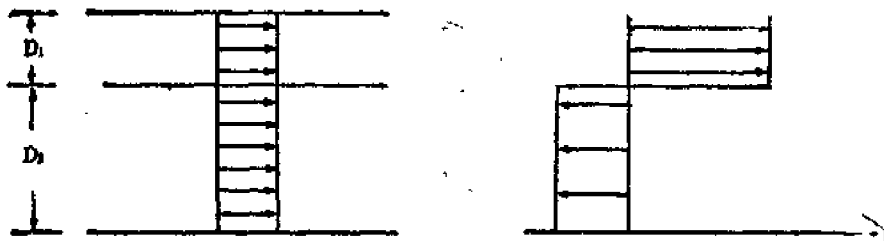


图6.17.1 两层模式中正压模态和斜压模态之结构。

6.18 多层模式与多层差分模式的关系

从我们所作的分析看来，多层模式比较简单，这是一个非常有吸引力的特点。其次，根据6.16节的讨论，该模式至少在准地转范围内精确描述了一个理想化的、但又有实际物理意义的流体系统的动力学特征。因此，在地转近似有效的范围内，我们相信可以把多层模式的结果应用于真实的物理系统，这使一些简单的、但在数学和物理上提得恰当的、又有地球物理意义的问题可用公式来表示。但是也要看到，多层模式虽然有其本身的物理意义，但它们是作为连续模式的近似而引进的。事实上，在前一节中根据罗斯贝波的专门计算结果可看出，多层模式中的运动与连续模式中可能出现的运动的一个子集近乎相等。本节要探讨多层模式（它们是非常简单的、理想化系统的精确模式）与多层差分模式（它们是对连续层结流体位涡方程的有限差分近似）之间的关系。

我们考虑如图6.18.1所示的连续层结流体。在固定的高度Z_n上，涡度方程(6.13.17)可写为

$$\frac{d_0}{dt}\{\zeta_0(x,y,Z_n,t)+\beta y\}=\frac{1}{\rho_s(Z_n)}\left(\frac{\partial}{\partial z}\rho_s w_1\right)_{z=Z_n}. \qquad (6.18.1)$$

(6.18.1) 式中的导数可用有限差分形式

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\rho_s w_1\right)_{z=Z_n}=\frac{\rho_s(h_n)w_1(h_n)-\rho_s(h_{n+1})w(h_{n+1})}{d_n}+O(d_n) \qquad (6.18.2)$$

逼近，其中h_n是Z_n与Z_{n-1}之间的中间层（然而不必是等距的），并且$d_n\equiv h_n-h_{n+1}$.

在无加热作用时，(6.5.15) 式给出

$$w_1(h_n)=-\frac{1}{S(h_n)}\left[\frac{d_0}{dt}\theta_0(h_n)\right], \qquad (6.18.3)$$

其中，

$$S(h_n)=\frac{F^{-1}}{\theta_s(h_n)}\frac{\partial\theta_s(h_n)}{\partial z}, \qquad (6.18.4)$$

$$\theta_0(h_n)=\frac{\partial p_0}{\partial z}(h_n), \qquad (6.18.5)$$

分别由 (6.5.13) 和 (6.5.8) 式得出。再利用有限差分近似得

$$\theta_0(h_n)\approx\frac{p_0(Z_{n-1})-p_0(Z_n)}{Z_{n-1}-Z_n}, \qquad (6.18.6a)$$

和

$$S(h_n)\approx\frac{F^{-1}}{\theta_s(h_n)}\frac{\theta_s(Z_{n-1})-\theta_s(Z_n)}{Z_{n-1}-Z_n},\tag{6.18.6b}$$

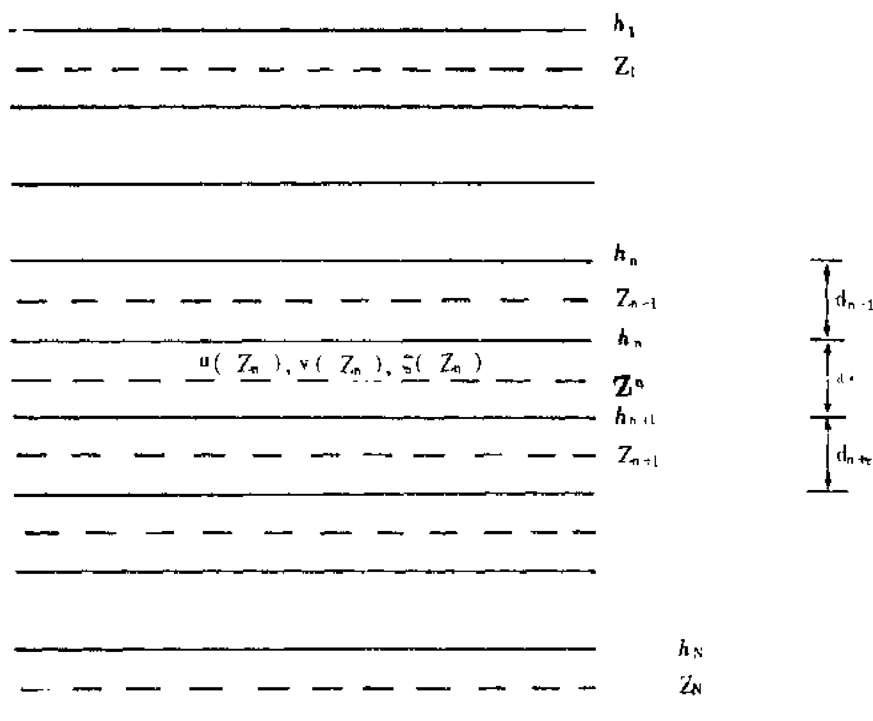


图6.18.1　在连续层结流体中，位涡方程应用于Z_n层上，而热力学变量和垂直速度在中间层h_n上求值

或

$$\frac{\theta_0(h_n)}{S(h_n)}\approx\frac{F\theta_s(h_n)}{\theta_s(Z_{n-1})-\theta_s(Z_n)}[p_0(Z_{n-1})-p_0(Z_n)].\tag{6.18.7}$$

把这些结果重新应用于h_{n+1}层上，使（6.18.1）式改写为

$$\frac{d_0}{dt}\left\{\zeta_0(Z_n)+\beta y-\frac{F\theta_s(h_n)}{d_n\rho_s(Z_n)}\left[\frac{p_0(Z_n)-p_0(Z_{n-1})}{[\theta_s(Z_{n-1})-\theta_s(Z_n)]/\rho_s(h_n)}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{p_0(Z_{n+1})-p_0(Z_n)}{[\theta_s(Z_n)-\theta_s(Z_{n+1})]/\rho_s(h_{n+1})}\right]\right\}=0,\tag{6.18.8}$$

其中已利用$(1/\theta_s)\partial\theta_s/\partial z$为小量的性质，用$\theta_s(h_n)$代替了$\theta_s(h_{n+1})$.

当我们在$z=Z_N$处计算（6.18.1）式时，边界条件（6.6.9）必须用以下形式：

$$w(h_{N+1})=\mathbf{u}_0(Z_N)\cdot\nabla\eta_B+\frac{E_V^{1/2}}{2\varepsilon}\zeta_0(x,y,Z_N),\tag{6.18.9}$$

所以，在差分的最低层上，(6.18.1) 变为

$$\frac{d_0}{dt}\left\{\zeta_0(Z_N)+\beta y-\frac{F\theta_s(h_n)}{d_N\rho_s(Z_N)}\left[\frac{p_0(Z_N)-p_0(Z_{N-1})}{[\theta_s(Z_{N-1})-\theta_s(Z_N)]/\rho_s(h_n)}\right]+\eta_B\right\}$$

$$=-\frac{E_V^{1/2}}{2\varepsilon d_N}\zeta_0(Z_N).\tag{6.18.10}$$

在 $z=Z_1$ 处，利用 $\rho_s(h_1)=0$，涡度方程可写为：

$$\frac{d_0}{dt}\left\{\zeta_0(Z_1)+\beta y-\frac{F\theta_s(h_1)}{d_1\rho_s(Z_1)}\left[\frac{p_0(Z_1)-p_0(Z_2)}{[\theta_s(Z_1)-\theta_s(Z_2)]/\rho_s(h_2)}\right]\right\}=0. \quad (6.18.11)$$

如果把 (6.18.8)、(6.18.10)、(6.18.11) 式分别与 (6.16.25)、(6.16.29) 和 (6.16.30)式作比较，则可以看出，N层模式的方程相当于连续层结模式的N层有限差分近似，后者的动力场u、v和 p 是在垂直方向上N个固定点上作计算的。这两组方程之间的等价性要求证明：

（多层差分模式）　　　　（多层模式）

$$\frac{\theta_s(h_n)\rho_s(h_n)/\rho_s(Z_n)}{d_n[\theta_s(Z_{n-1})-\theta_s(Z_n)]}\longleftrightarrow\frac{1}{\rho_n-\rho_{n-1}}\frac{\rho_0}{D_n/D},$$

$$\frac{\theta_s(h_n)\rho_s(h_{n+1})/\rho_s(Z_n)}{d_n[\theta_s(Z_n)-\theta_s(Z_{n+1})]}\longleftrightarrow\frac{1}{\rho_{n+1}-\rho_n}\frac{\rho_0}{D_n/D}. \quad (6.18.12)$$

在海洋情况下 (6.8.11) 式成立，等价性要求的条件相当简单，因为当(6.18.12)式中$\theta_s(Z_n)\to\rho_S^{-1}(Z_n)$时，$\rho_s(h_n)/\rho_s(Z_n)$等于 1 。所以最简单的多层差分模式还是两层差分模式。于是，我们借助 (6.5.20) 式得到

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial\psi(Z_1)}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial\psi(Z_1)}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right]\left\{\frac{\partial^2\psi(Z_1)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi(Z_1)}{\partial y^2}\right.$$

$$\left.-\widetilde{F}_1[\psi(Z_1)-\psi(Z_2)]+\beta y\right\}=0, \quad (6.18.13a)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial\psi(Z_2)}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial\psi(Z_2)}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right]\left\{\frac{\partial^2\psi(Z_2)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi(Z_2)}{\partial y^2}\right.$$

$$\left.-\widetilde{F}_2[\psi(Z_2)-\psi(Z_1)]+\beta y+\eta_B\right\}$$

$$=-\frac{\tilde{r}_2}{2}\left[\frac{\partial^2\psi(Z_2)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi(Z_2)}{\partial y^2}\right], \quad (6.18.13b)$$

其中，

$$\widetilde{F}_1=\frac{f_0^2L^2}{gDd_1}\frac{\rho_s(h_2)}{\rho_s(Z_1)}\frac{\theta_s(h_2)}{\theta_s(Z_1)-\theta_s(Z_2)},$$

$$\widetilde{F}_2=\frac{f_0^2L^2}{gDd_2}\frac{\rho_s(h_2)}{\rho_s(Z_2)}\frac{\theta_s(h_2)}{\theta_s(Z_1)-\theta_s(Z_2)}, \quad (6.18.14)$$

$$\tilde{r}_2=\frac{(2A_Vf_0)^{1/2}}{U}\frac{L}{Dd_2}.$$

如果把$\widetilde{F}_n$等同于 (6.16.34a,b) 中的F_n，那末 (6.18.13a, b) 与 (6.16.34a, b) 是完全等价的。若 (6.8.11) 式成立，则方程 (6.18.13a,b) 不变，而

$$F_n=\frac{f_0^2L^2}{gDd_n}\frac{\rho_0}{[\rho(Z_2)-\rho(Z_1)]}. \quad (6.18.15)$$

因此，具有固定密度的不可压缩流体之两层模式（流体层在其中是不能混合的），与大气(其中位涡守恒，并定义了变形半径）和海洋（其中密度守恒）的连续模式之最简有限差分近似

有着值得注意的一一对应关系。有限层差分模式对于真实物理系统的精确描写是个粗略的数学近似，而多层模式与此相反，它对于比较复杂的真实地球物理系统之粗略物理描述是个精确的数学表达。因此，用多层（尤其是层数少的）差分模式来建立代表真实物理系统（虽作了简化）动力学特征的最粗略的有限差分近似的基本方程，是有益而可靠的。

在大气情况下，若流体静力方程

$$\frac{\partial p_s}{\partial z}=-\rho_s gD$$

用有限差分形式表示，即

$$\begin{aligned}[p_s(h_2)-p_s(0)]&=-\rho_s(Z_2)gDd_2,\\ [p_s(h_1)-p_s(h_2)]&=-\rho_s(Z_1)gDd_1,\\ [p_s(Z_1)-p_s(Z_2)]&=-\rho_s(h_2)gD(Z_1-Z_2),\end{aligned}\tag{6.18.16}$$

其中 $p_s(0)$ 是基本状态的表面压力，则（6.18.14）式中 $\tilde{F}_n$ 的表达式可以大大简化。如果选择两层差分，使 h_2 把流体分成质量相等的两个区域，那末流体静力方程意味着

$$\begin{aligned}p_s(h_2)&=\frac{p_s(0)}{2},\\ p_s(Z_1)-p_s(Z_2)&=-\frac{p_s(0)}{2},\\ p_s(h_1)&=0.\end{aligned}\tag{6.18.17}$$

于是，

$$\tilde{F}_1=\frac{f_0^2L^2}{(\Delta\theta_s/\theta_s)g(Z_1-Z_2)}=\tilde{F}_2\tag{6.18.18}$$

其中，

$$\frac{\Delta\theta_s}{\theta_s}=\frac{\theta_s(Z_1)-\theta_s(Z_2)}{\theta_s(h_1)}.\tag{6.18.19}$$

这与 $D_1=D_2$ 情况下的（6.16.33）式完全一致。

在以后各章中，尤其是在第七章的关于稳定性理论的讨论中，多层（或多层差分）模式为讨论复杂的物理现象提供了一个特别有用的简化方法。

6.19 地转近似 $\varepsilon\ll L/r_0\ll1$；斯维尔德鲁普关系

在前几节中，我们讨论了 $\beta=\beta_0L^2/U=O(1)$ 的情况下，即运动尺度具有罗斯贝驻波波长 $(U/\beta_0)^{1/2}$ 量级的情况下的地转运动，对于这种运动，$\varepsilon\ll1$。如果 β 为小量，那末所产生的地转动力学特征可以从（6.5.21）或（6.8.11）式令 $\beta=0$ 而直接得出。所得的方程与以角速度 $f_0/2$ 旋转的平面地球（把地球视为平面）适用的方程相一致。

当相对涡度梯度与行星涡度梯度相比为小量时，β 值为一大量，并且，所产生的动力学性质要求进一步仔细考虑三个参数，即

$$\beta S=\frac{\beta_0L_D^2}{U},\tag{6.19.1a}$$

$$\beta\varepsilon=\frac{\beta_0 L}{f_0}=O\left(\frac{L}{r_0}\right), \tag{6.19.1b}$$

$$\frac{S}{\varepsilon}=(\beta S)\frac{f_0}{\beta_0 L}=O\left(\beta S\frac{r_0}{L}\right). \tag{6.19.1c}$$

$\beta\gg1$ 的情况对于大尺度海洋运动具有特殊重要性，因为在海洋中 $(U/\beta_0)^{1/2}$ 仅为 O(100公里)。

β 远大于 1 的运动之动力学性质依赖于这些附加的参数，其依赖关系大致如下。如果 β 为大量，并且 βS（它与 L 无关）具有 1 的量级（即变形半径 L_D 具有与罗斯贝驻波波长相当的量级），那末，行星涡度梯度的涡度平流仅被涡管伸缩作用所平衡，根据（6.3.17）式，这意味着用无量纲单位时，

$$\beta v_0=O\left(\frac{\partial w_1}{\partial z}\right)=O\left(\varepsilon^{-1}\frac{\partial w}{\partial z}\right),\text{当}\beta\gg1. \tag{6.19.2}$$

因此，对于 $\beta\gg1, \beta S=O(1)$；以及 $L/r_0\ll1$（因而这里所用的 β 平面近似有效）的情况，有

$$w=O(\beta\varepsilon)=O\left(\frac{L}{r_0}\right)=O\left(\beta_0\frac{L}{f_0}\right). \tag{6.19.3}$$

这说明对于 $\beta S=O(1)$ 和 $\beta\varepsilon\ll1$ 的情况，w 的尺度分析应当为

$$w_*=\frac{UD}{L}w=\frac{UD}{L}\left\{\beta_0\frac{L}{f_0}w_1+\cdots\right\}, \tag{6.19.4}$$

而不是（6.3.12）式给出的尺度分析。如果 u、v、p 和 ρ 象（6.2.13）、（6.2.18）和（6.2.21）式中的那样用尺度来表示，那末精确到 L/r_0 的最低阶，涡度方程变为

$$\frac{\partial w_1}{\partial z}=v_0, \tag{6.19.5}$$

其中已假定 $\rho_s(z)$ 在运动的垂直尺度上基本不变。因此，仅在被涡管伸长所平衡的情况下才可能有向北运动。

密度方程（6.2.7）现在变为

$$\frac{\partial\rho_0}{\partial t}+u_0\frac{\partial\rho_0}{\partial x}+v_0\frac{\partial\rho_0}{\partial y}+\frac{\beta_0 L w_1}{\varepsilon r_0 F}\left\{\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial\rho_s}{\partial z}+\varepsilon F\frac{\partial\rho_0}{\partial z}\right\}=-\mathscr{H}, \tag{6.19.6}$$

其中 $\mathscr{H}$ 由（6.8.3）和（6.8.4）式定义。注意

$$\frac{\beta_0 L}{r_0\varepsilon F}\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial\rho_s}{\partial z}=-\beta S=O(1), \tag{6.19.7a}$$

而

$$\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial\rho_s/\partial z}{\varepsilon F}=\frac{S}{\varepsilon}=O\left(\beta S\frac{r_0}{L}\right)\gg1. \tag{6.19.7b}$$

所以在无加热作用时，最低阶的密度方程变为

$$\frac{d_0}{dt}\rho_0-\beta S w_1=0. \tag{6.19.8}$$

利用从地转平衡和静力平衡直接得出的

$$v_0=\frac{\partial\psi}{\partial x},$$
$$\rho_0=-\frac{\partial\psi}{\partial z},\tag{6.19.9}$$

可把（6.19.5）和（6.19.8）式合并成

$$\frac{d_0}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{S\beta}\frac{\partial\psi}{\partial z}+y\right]=0.\tag{6.19.10}$$

当$\beta S=O(1)$时，上式完全是（6.8.11）式在β很大时的极限形式。因此只要L/r_0为小量，天气尺度运动的方程（6.5.2）和（6.8.11）对于$\beta\gg1$的情况仍然成立。

把（6.19.5）式在地转运动区域的深度上作垂直积分得

$$M_S^{(y)}=\int_0^1 v_0dz=w_1(x,y,1)-w_1(x,y,0).\tag{6.19.11}$$

在受到风应力作用的海洋上表面处（5.2.8）式成立，即

$$w_*(x,y,1)=U\frac{D}{L}\frac{\beta_0L}{f_0}w_1=\mathbf{k}\cdot\text{curl}\frac{\boldsymbol{\tau}_*}{\rho_0 f}$$
$$=\frac{\tau_0}{\rho_0Lf_0}\text{curl}\tau+O(L/r_0),\tag{6.19.12}$$

或

$$w_1(x,y,1)=\left\{\frac{\tau_0}{\rho_0UD\beta_0L}\right\}\text{curl}\tau,\tag{6.19.13}$$

其中 curlτ 由（5.12.14）式定义。在下边界处（4.3.36）式适用，故下边界上的w_1直接取决于下边界水平速度和涡度的大小。如果洋底处的水平速度和涡度可略，则有

$$M_S^{(y)}=\int_0^1 v_0dz=w_1(x,y,1)$$
$$=\frac{\tau_0}{\rho_0UD\beta_0L}\text{curl}\tau,\tag{6.19.14}$$

或者假如象（5.2.19）所给出的，特征速度U选为$\tau_0/\rho_0D\beta_0L$，那末

$$\boxed{M_S^{(y)}=\int_0^1 v_0dz=\text{curl}\tau},\tag{6.19.15}$$

它与第五章中对风生大洋环流均质模式导出的斯维尔德鲁普关系是一样的。这里的推导类似于斯维尔德鲁普的原始论证(1947)，实际上关键依赖于流体的斜压性质，而允许忽略流体与下边界的相互作用。当然，事实上所得到的结果（6.19.15）式显然与基本层结的具体性质无关。斜压大洋中风生输送的斯维尔德鲁普关系与大洋环流均质模式一样，对于应力旋度都满足相同的关系，这个事实正是为什么认为均质模式给出了关于垂直积分输送场之有用信息的一个基本原因。

$\beta\gg1$、$\beta S=O(1)$ 的运动之垂直结构用（6.19.10）式来描述。如上面指出的，该方程只是天气尺度位涡方程的一个极限形式。尤其是只要$L/r_0\ll1$且$\beta S=O(1)$，(6.19.7b)式就表明，在平均密度场$\rho_s(z)$中由流体运动引起的密度垂直平流仍是主要的。因此，$L_D\sim(U/\beta)^{1/2}$

的运动，具有一个重要的性质，即密度场相对其平均值的线性化成立的范围，与β平面近似成立的范围相同。对于尺度非常大（如$L/r_0\sim1$）的运动，β平面近似和实用的密度场区分都失去了它们的合理性。这个极限情况在海洋学中具有重要的意义，我们将在下一节中对它进行讨论。

6.20 地转近似 $\varepsilon\ll1, L/\gamma_0=O(1)$

当运动的水平长度尺度变得很大，如$L/r_0=O(1)$时，准地转动力学方程中出现几种基本的变化。最明显的是，把球面简化为平面的几何形状不再是一种合理的近似。同等重要的是给定关键参数的观测值，如给定海洋中的罗斯贝变形半径L_D($L_D\sim50$公里$\ll r_0$)时，基本密度场的水平变化不再可以忽略。因为这时由（6.19.7b)式知道，基本状态的垂直密度梯度不大于与大尺度运动场引起的密度变化有关的垂直密度梯度。为了合理地描述这些尺度运动的动力学特征，有必要回顾6.2节中基本的运动方程，并重新考虑适当的尺度分析关系。我们将对海洋情况进行论证，对于这种情况可应用（6.2.7）式，并且可以认为海洋中的密度标高比运动的垂直尺度大得多。

我们把以星号标记的有量纲变量用没有下标的无量纲变量来表示：

$$
\begin{aligned}
r_* &= r_0\left(1+\frac{D}{r_0}z\right),\\
u_* &= Uu,\\
v_* &= Uv,\\
w_* &= U\frac{D}{r_0}w = Ww,\\
t_* &= \frac{r_0}{U}t,\\
p_* &= -\rho_0 gDz+\rho_0 2\Omega U r_0 p,\\
\rho_* &= \rho_0+\frac{\rho_0 2\Omega U r_0}{gD}\rho.
\end{aligned}
\tag{6.20.1}
$$

其中r_0是地球半径，D是运动的垂直尺度，U是水平速度尺度，$w=UD/r_0$是垂直速度尺度。由于运动的水平尺度假定为$O(r_0)$，所以用r_0来表征水平长度。用平流时间尺度r_0/U来使时间无量纲比。密度已分为一个常值ρ_0和一个余值$[\rho_0 2\Omega U r_0/gD]\rho$，后者描述了密度场在空间（和时间）上的全部变化。用于密度场尺度分析的特征量象6.2节的那样，根据下述事实来选择，即对于小罗斯贝数，水平压力梯度与科氏加速度同量级。这使压力尺度如（6.20.1）式中的那样，而可以预料，浮力将具有与垂直压力梯度相同的量级，这个关系确定了（6.20.1）式中的密度尺度。如果利用（6.20.1）式来重写运动方程（6.2.1）、(6.2.3 a,b,c）和（6.2.7）式，则经过一些显然的运算后得

$$
\varepsilon F\frac{d\rho}{dt}+[1+\varepsilon F\rho]\left[\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{2D}{r_*}w+\left(\frac{r_0}{r_*}\right)\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial(v\cos\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial u}{\partial\phi}\right]=0,
\tag{6.20.2a}
$$

$$\varepsilon\left[\frac{du}{dt}+uw\frac{D}{r_*}-uv\frac{r_0}{r_*}\tan\theta\right]-\sin\theta v+\cos\theta\left(\frac{D}{r_0}\right)w$$

$$=-\frac{1}{1+\varepsilon F\rho}\frac{r_0}{r_*\cos\theta}\frac{\partial p}{\partial\phi}+\frac{\mathscr{F}_{*\phi}}{\rho_* U2\Omega},\tag{6.20.2b}$$

$$\varepsilon\left[\frac{dv}{dt}+vw\frac{D}{r_*}+u^2\frac{r_0}{r_*}\tan\theta\right]+\sin\theta u$$

$$=-\frac{1}{1+\varepsilon F\rho}\frac{r_0}{r_*}\frac{\partial p}{\partial\theta}+\frac{\mathscr{F}_{*\theta}}{\rho_* U2\Omega},\tag{6.20.2c}$$

$$(1+\varepsilon F\rho)\left[\varepsilon\frac{D^2}{r_0^2}\frac{dw}{dt}-\frac{\varepsilon D}{r_*}(u^2+v^2)-\frac{D}{r_0}\cos\theta u\right]$$

$$=-\frac{\partial p}{\partial z}-\rho+\frac{\mathscr{F}_{*z}}{\rho_* U2\Omega},\tag{6.20.2d}$$

$$\frac{d\rho}{dt}=\frac{K_V}{U}\frac{r_0}{D^2}\frac{\partial^2\rho}{\partial z^2}+\frac{K_H}{Ur_0}\nabla_H^2\rho,\tag{6.20.2e}$$

其中，根据我们现在的尺度分析有

$$\varepsilon=\frac{U}{2\Omega r_0},$$

$$F=\frac{4\Omega^2 r_0^2}{gD},\tag{6.20.3}$$

$$\frac{r_*}{r_0}=1+\frac{D}{r_0}z.$$

(6.20.2b,c,d) 中的摩擦项还没有详细确定，但是可象 6.2 节那样，我们把它们的大小估计为

$$\frac{\mathscr{F}_{*\theta}}{\rho_* 2\Omega U}=O\left\{\frac{A_H}{2\Omega r_0^2},\frac{A_V}{2\Omega D^2}\right\}\ll 1\tag{6.20.4}$$

等等。在水平边界的艾克曼层以外，可以忽略这些摩擦项。在密度方程 (6.20.2e) 中，假定垂直和水平方向不同的湍流扩散系数，与 4.2 节中描述的动量湍流混合的公式相类似。算子d/dt 和 ∇_H^2 定义为

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}&=\frac{\partial}{\partial t}+\frac{r_0}{r_*}\left(\frac{u}{\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}+v\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+w\frac{\partial}{\partial z},\\ \nabla_H^2&=\frac{r_0^2}{r_*^2}\left[\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right].\end{aligned}\tag{6.20.5}$$

对于$U=O$(1 厘米/秒)，以及 $r_0=O(6\times10^8$厘米)，$D=O$(1 公里)、$2\Omega\approx1.4\times10^{-4}$/秒，参数 ε、F 和 D/r_0 分别为

$$\begin{aligned}\varepsilon&=O(10^{-5}),\\ F&=O(70),\\ \frac{D}{r_0}&=O(1.6\times10^{-4}).\end{aligned}\tag{6.20.6}$$

因此,对于 $O(1)$,运动方程中的主要项为

$$\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(v\cos\theta)+\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial u}{\partial\phi}+\frac{\partial w}{\partial z}=0, \tag{6.20.7a}$$

$$\sin\theta v=\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial p}{\partial\phi}, \tag{6.20.7b}$$

$$\sin\theta u=-\frac{\partial p}{\partial\theta}, \tag{6.20.7c}$$

$$\rho=-\frac{\partial p}{\partial z}, \tag{6.20.7d}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{u}{\cos\theta}\frac{\partial\rho}{\partial\phi}+v\frac{\partial\rho}{\partial\theta}+W\frac{\partial\rho}{\partial z}=\lambda\frac{\partial^2\rho}{\partial z^2}. \tag{6.20.7e}$$

如果把 (6.20.7) 式与天气尺度运动等价的近似 (6.3.6) 和 (6.3.7) 式相比较的话,那末显然在这两种情况下,速度场都是不可压缩[1]、地转和流体静力的。但是,在现在的情况下,散度的表达式中必须保留几何项的整个变化,并且更重要的是,科氏参数在最低阶上是可变化的。现在所讨论的运动尺度非常大,以至在该尺度上地转角速度的局部法向分量有 $O(1)$ 的变化。在密度场的方程中,垂直密度梯度现在由运动本身来确定,而不是用水平方向均匀的标准密度来表示。象科氏参数的情况一样,运动的水平尺度大得足以使静力稳定度 $\rho^{-1}\partial\rho/\partial z$ 的侧向变化变得重要起来。参数λ为

$$\lambda=\frac{K_V r_0}{UD^2}. \tag{6.20.8}$$

与 λ 成比例的项是描写由小尺度运动引起的密度垂直扩散的一个粗略模式。根据实际资料估计,该项虽然很可能是一个小量,但保留它是为了使热力(密度)边界层的特性可一致地用方程组 (6.20.7) 式来表示。如果K_V为O(1 厘米^2/秒),那末当$U=1$厘米/秒和 $D=1$ 公里时,λ 为 $O(6\times10^{-2})$。

该尺度与天气尺度之间在地转动力学上的关键性差别在于,最低阶地转近似在动力学上不再是退化的。这就是说,如果在(6.20.7b,c)之间消去压力,并利用连续方程(6.20.7a),那末我们容易得出

$$\boxed{\cos\theta v=\sin\theta\frac{\partial w}{\partial z}}, \tag{6.20.9}$$

用有量纲形式,它对应于退化的涡度方程:

$$\beta_* v_*=f\frac{\partial w_*}{\partial z_*}, \tag{6.20.10}$$

其中

$$f=2\Omega\sin\theta,$$

1) 即若(6.3.7)式中 ρ_s 的尺度标高超过D。

$$\beta_* = 2\Omega\frac{\cos\theta}{r_0}.$$

涡度方程 (6.20.9) 式是 (6.19.5) 式对 $L\sim r_0$ 情况的推广，其中显然保留了 f_* 和 β_* 的 $O(1)$变化。由于科氏参数有 $O(1)$ 变化，所以最低阶地转速度具有 $O(1)$的水平散度，并且，涡度与行星涡度场中涡管伸缩之乘积，被行星涡度场中的南北运动所平衡。热成风关系有如下形式：

$$\sin\theta\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial\rho}{\partial\theta}, \tag{6.20.11a}$$

$$\sin\theta\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial\rho}{\partial\phi}. \tag{6.20.11b}$$

如果把密度方程对Z作一次微商，那末借助于 (6.20.11) 式可得

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\rho}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial\rho}{\partial z} = \lambda\frac{\partial^3\rho}{\partial z^3}. \tag{6.20.12}$$

含有$\partial w/\partial z$的项可以利用涡度方程 (6.20.9) 式消掉，结果有

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left\{\sin\theta\frac{\partial\rho}{\partial z}\right\} = \lambda\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left\{\sin\theta\frac{\partial\rho}{\partial z}\right\}}. \tag{6.20.13}$$

这是对于 $L\sim r_0$ 和$\varepsilon\ll1$的地转运动的位涡方程。在该尺度上，流体的涡度动力学只涉及行星涡度。由于 D/r_0 为小量，所以密度梯度的垂直分量是最大的分量；因而有量纲的位势涡度为

$$\frac{f}{\rho_0}\frac{\partial\rho_*}{\partial z_*} = \frac{2\Omega}{D}\varepsilon F\left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\sin\theta\right), \tag{6.20.14}$$

除了一个常数因子外，它与 (6.20.13) 式中出现的量相等。注意，在无扩散 ($\lambda=0$) 时，位涡是守恒的。如果 $\lambda\neq0$，那末位涡本身满足与密度场相同的扩散方程。

如果扩散可以略去，则位涡和密度都守恒。并且，伯努利函数

$$B = p + \rho z \tag{6.20.15}$$

满足

$$\frac{dB}{dt} = \frac{dp}{dt} + z\frac{d\rho}{dt} + \rho\frac{dz}{dt} = \frac{dp}{dt} + z\lambda\frac{\partial^2\rho}{\partial z^2} + \rho w. \tag{6.20.16}$$

但是若利用 (6.20.7b,c,d) 式，则有

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{u}{\cos\theta}\frac{\partial p}{\partial\phi} + v\frac{\partial p}{\partial\theta} + w\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial t} - w\rho. \tag{6.20.17}$$

故

$$\boxed{\frac{dB}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + z\lambda\frac{\partial^2\rho}{\partial z^2}}. \tag{6.20.18}$$

如果运动是定常的，并且密度扩散可以忽略不计，那末B随着流体元是守恒的。因此，在定常状态时三个函数

$$\Pi=\sin\theta\frac{\partial\rho}{\partial z},\qquad(6.20.19a)$$

$$B=p+\rho z,\qquad(6.20.19b)$$

$$\rho=\rho,\qquad(6.20.19c)$$

均守恒。当流动定常时，各守恒量的等值面在空间是固定的，并且，流体元必须保持在它的起始面上运动。我们来考虑 $B=B_1$ 和 $\rho=\rho_1$ 面上的一个流体元。如图 6.20.1 所示，该流体元必须沿这两个面的交线流动，以保持仍在该二面上。由于 Π 沿这条轨迹为常数，所以在定常状态下，Π 一定仅取决于等 ρ 面和等 B 面之交线。这就是说，对于定常的无扩散运动，给定 ρ 和 B 的某个值，则 ρ 和 B 的组合 Π 一定为常数，或等价地，Π 一定只是 ρ 和 B 的函数：

$$\Pi=\Pi(\rho,B).\qquad(6.20.20)$$

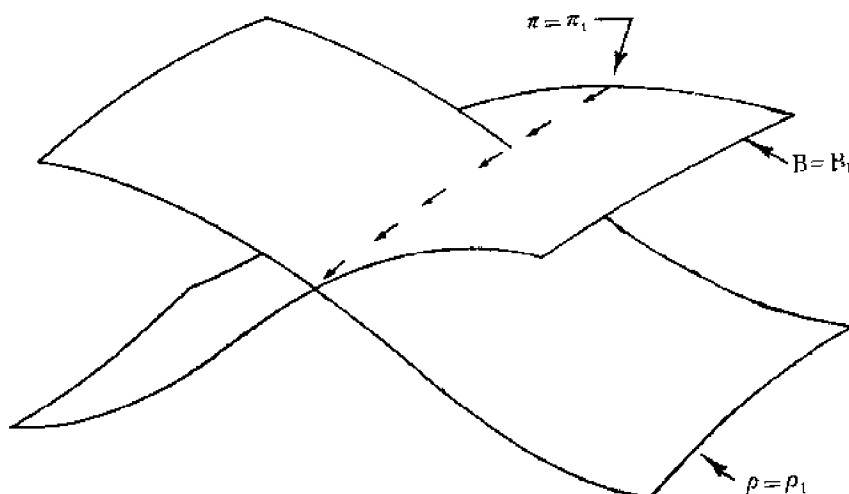
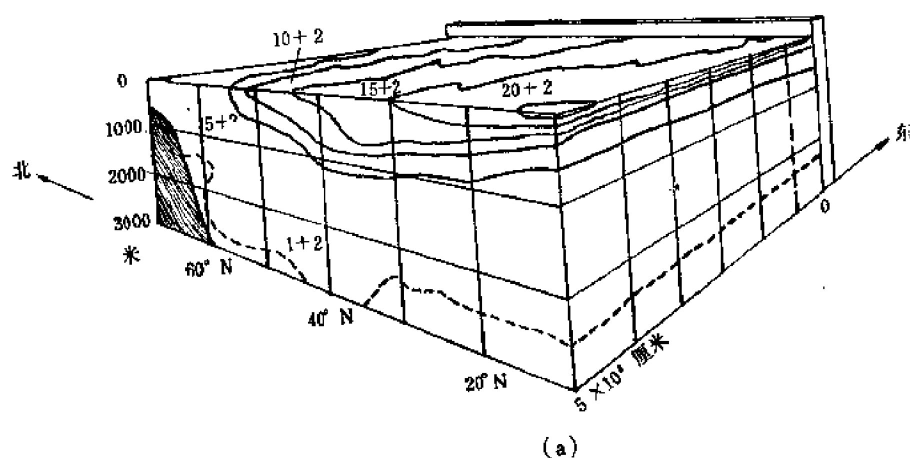


图6.20.1 $B=p+\rho z$ 为常数的面与 ρ 为常数的面相交得一条 Π 为常数的线，这条线与 $U/\beta L^2\ll1$ 时无耗散流的流线重合。

6.21 温跃层问题

全球大洋温度、密度和盐度结构的一个基本特征，就是存在着上述属性随深度急剧变化的狭窄区域。在 6.4 节中曾给出典型的密度廓线。图 6.21.1(a) 给出北大西洋三维温度分布的示意图，而 6.21.1(b) 说明这些现象是普遍存在的。这个急剧垂直变化区，即温跃层，随纬度和经度之不同而出现在不同的深度；它在中纬度最深，在低纬度和高纬度则相当浅。温跃层的深度可变，说明存在着与其坡度及伴随的"热成风"运动相联系的强水平密度梯度。按照 (6.20.7e) 式，运动反过来也影响密度场；因此，密度场的结构与整个动力场的结构有密切关系。以下我们简单说明一下上述观测所提出的这个基本问题。从大洋表面到深处，密度变化为什么存在着比较剧烈的区域，而不是平滑地渐变？我们知道，在大气中，基本的温度和密度结构是由动力学和辐射传输过程之间复杂的相互作用来确定的，而这辐射传输是在一个含有热力吸收与热放射物质不均匀分布的大气中进行的。然而，另一方面，在上表面受到加热与冷却的海洋之温度分布，看来可能基本上决定于大洋环流的热平流，在某种程度上受小尺度运动的湍流热扩散（从而密度扩散）之影响。此外，温跃层的变化为全球尺度，这

使我们似乎可以提出下述概念：有重要动力学意义的过程是大尺度的，也即由前节导出的动力学模式所描述的那种尺度的运动。下面将要描述的温跃层理论显然假定了洋中温跃层仅取决于大尺度动力学特征，然而边界流的热输送和诸如上升流那样的边界过程之作用尚未确定。此外，如λ所表示的，洋中湍流密度扩散程度也很不确定。我们还不清楚，湍流扩散究竟是



(a)

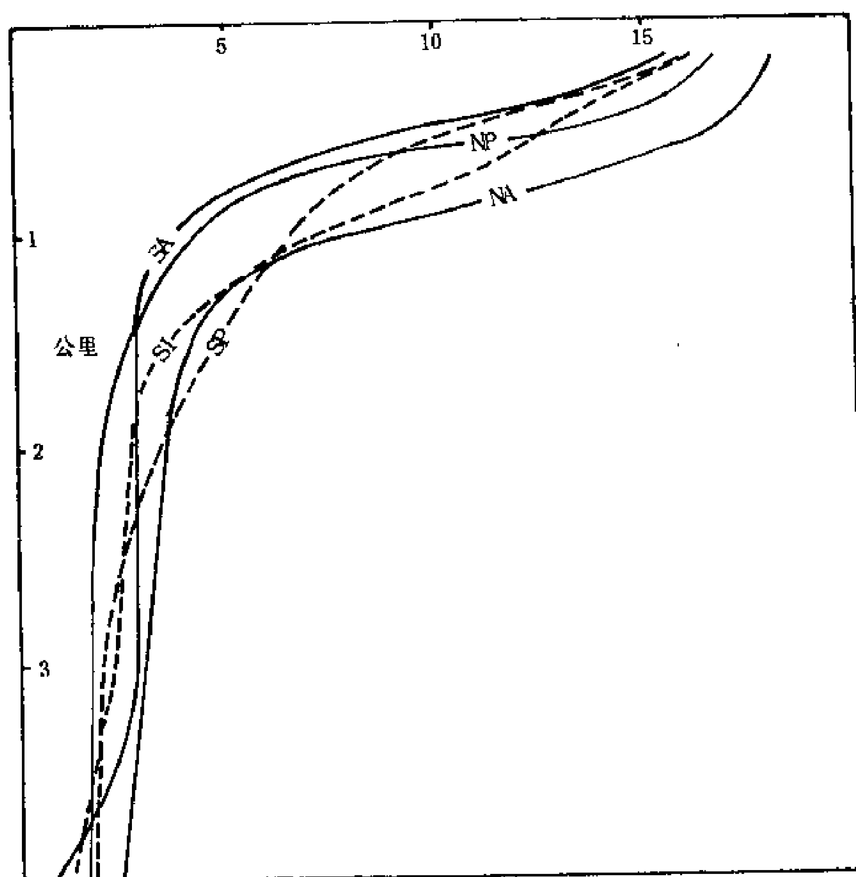


图6.21.1 (a)北大西洋温度分布示意图。(b)全球大洋中温度随深度的典型分布。S为南，N为北；A为大西洋，P为太平洋，I为印度洋（引自Robinson 和Stommel，1959）。

否可以用一个不随空间变化的混合系数来表示，或者说，λ强度的空间变化是否有重要意义。然而，在能够研制出更复杂、更成熟的模式以前，必须首先弄清现在提出的这个问题。这就是说，根据6.20节的大尺度动力学，在大气对洋面的加热和冷却作用下，海洋将有怎样的定常状态密度分布？温跃层在z方向的薄层性质，表示过程在z方向具有边界层特征，而仅根据这条理由，用于温跃层的合理的概念模式应当包括垂直扩散。根据同样的边界层理由，水平扩散象（6.20.7e）那样可以略去。

我们以推导w和ρ的联立方程组来着手分析。根据（6.20.9）和（6.20.7b）式有

$$\sin^2\theta\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial p}{\partial\phi}, \tag{6.21.1}$$

而在定常状态下，利用地转关系和静力关系（6.20.7b,c,d）后，密度方程（6.20.7e）变为

$$(\sin\theta\cos\theta)^{-1}\left\{\frac{\partial p}{\partial\phi}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{\partial p}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\frac{\partial p}{\partial z}\right\}+w\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}=\lambda\frac{\partial^3 p}{\partial z^3}. \tag{6.21.2}$$

对该系统的边条件作如下假设。在以上方程描述的地转区域的上界，必须给定垂直速度。这就是说，由于地转动力学是无粘的，所以在上边界只能给定法向速度。如第四章中所描述的，这说明此处描述的动力学在上艾克曼层以下是适用的。因此接近上表面时，(6.21.1)和（6.21.2）式中的w所达到的相应值，为上艾克曼层抽入或抽出的速度。在上表面处艾克曼层抽入的垂直速度，用有量纲单位时由（4.10.19）式给出，它在定常状态下为

$$w_*(\text{表面})=\mathbf{k}\cdot\text{curl}_*\left(\frac{\mathbf{T}_*}{\rho_0 f}\right), \tag{6.21.3}$$

其中$f=2\Omega\sin\theta$。因此，上边界的w由风应力确定。定义艾克曼垂直速度为

$$w_{e*}=\mathbf{k}\ \text{curl}_*\left(\frac{\mathbf{T}_*}{\rho_0 f}\right)=W_e w_e(\phi,\theta), \tag{6.21.4}$$

其中W_e是w_{e*}的特征量。于是利用（6.20.1）式，W在$z=1$处的条件变为

$$w_*(\phi,\theta,1)=Ww(\phi,\theta,1)=W_e w_e(\phi,\theta), \tag{6.21.5}$$

或

$$w(\phi,\theta,1)=\left(\frac{W_e}{W}\right)w_e(\phi,\theta). \tag{6.21.6}$$

把W选成等于We比较方便，所以，(6.21.6) 式变为

$$\boxed{w=w_e(\phi,\theta),z=1}. \tag{6.21.7}$$

在上边界面，密度必须与通过薄的表面埃克曼层而施加于其下面地转区域的外加密度场匹配，利用形如（1.4.20）的状态方程，可把这个条件用有量纲形式写为

$$T_*(\theta,\phi,1)=\mathscr{T}_0 T_s(\theta,\phi,1)=\frac{\rho_0-\rho_*}{\alpha\rho_0}=-\frac{2\Omega Wr_0^2}{gD^2\alpha}\rho(\theta,\phi,1), \tag{6.21.8}$$

或

$$\rho(\theta,\phi,1)=-\left[\frac{gD^2\alpha\mathscr{T}_0}{2\Omega Wr_0^2}\right]T_s(\theta,\phi), \tag{6.21.9}$$

其中$\mathscr{T}_0$是外加的表面温度变化的大小，α是热膨胀系数。$T_s(\theta,\phi)$是一个$O(1)$的无量纲函

数，它描述了外加温度场之水平结构。为了使ρ可以有$O(1)$的变化，象在推导(6.20.7)式时所作的隐含假定那样，我们把运动的垂直尺度D选为

$$D=\delta_a=\left[\frac{2\Omega W r_0^2}{ga\mathscr{T}_0}\right]^{1/2}. \tag{6.21.10}$$

垂直尺度δ_a称为平流尺度。在该垂直尺度上，艾克曼环流引起的密度侧向变化，与上表面所加的温度侧向变化具有相同的量级。当$2\Omega=10^{-4}$/秒，$r_0=6\times10^8$厘米，$a\mathscr{T}_0=10^{-3}$，$g=10^3$厘米/秒^2，W(艾克曼抽吸速度)$=10^{-4}$厘米/秒时，我们得$\delta_a=600$米。这个尺度分析结果是令人鼓舞的，因为δ_a相当合理地对应于观测到的温跃层深度，而后者的深度范围从中纬度的800米变到赤道和极区的200米。由于δ_a远小于总的海洋深度，因此，似乎可以把温跃层当作一个边界层过程来考虑，并认为下边界条件是，在远大于δ_a的深度处，温度渐近于一个水平均匀的值。因为z_*已经用D作为尺度，所以，只要把坐标原点改到表面，并从海面向下测量z是适宜的。由于δ_a远小于大洋深度，因此z的区间从大的负值到零。所以当$z\to-\infty$时，要求密度距平为零，而W必趋于一个仍然未知的渐近值，就象艾克曼层本身产生的垂直速度不能预先给定一样。

为使偏微分方程的解唯一，(6.21.2)式的边条件原则上也必须沿侧边界给定。这些条件不是外加在大洋盆地边缘的自然条件，因为这些边界由于边界流区而与内区动力学不同，在边界流区域，热量平流和涡度平流是重要的。为了得到这里提出的内区问题的合理边条件，首先对于边界层场必须用尚未明确的内区场来分析边界层区，然后通过使内区与边界层匹配来确定内区场的边条件。该过程的一般性质在第五章中曾描述过，在那里曾指出，东部大洋边界的边界层分析如何能确定斯维尔德鲁普内区运动东边界的边条件。虽然二者在概念上是类似的，但是本情况中的过程对于非线性层结流体动力学来说是太困难了，以至实际上行不通。只有借助于构造不考虑侧边条件的解族，现在的温跃层问题才能取得进展。这是现有的温跃层理论中存在的一个很大的弱点，因为不知道哪个解（如果存在的话）会与合理的侧边条件（假若它们是已知的）相匹配。

已经求出的温跃层方程的几个特解，对于我们所感兴趣的密度场和温度场给出相当切合实际的预报。但是正如我们将看到的，每个解都包含着严重的缺陷，以至对于温跃层问题至今还没有切实可用的完全令人满意的解。

Needler(1967)提出一个形式为

$$p=A(\theta,\phi)+m(\theta,\phi)\exp\{k(\theta,\phi)z\} \tag{6.21.11}$$

的试解，其中A项表示正压场。压力场的斜压部分以与k（必须为正数）有关的速率向下指数衰减。预先假定e折率k是经纬度的函数。因此，用这个试解时，密度的垂直廓线处处相似，即除了一个侧向变化的伸缩系数k外到处都一样。如果我们把(6.21.11)式代入(6.21.1)式，即得

$$\sin^2\theta\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial A}{\partial\phi}+e^{kz}\left\{\frac{\partial m}{\partial\phi}+zm\frac{\partial k}{\partial\phi}\right\}. \tag{6.21.12}$$

把上式对z积分得w：

$$w=\sin^{-2}\theta\left\{z\frac{\partial A}{\partial\phi}+k^{-1}[e^{kz}-1]\frac{\partial m}{\partial\phi}\right.$$

$$+m\frac{\partial k}{\partial\phi}\left[\frac{ze^{kz}}{k}-\frac{e^{kz}-1}{k^2}\right]\bigg\}+w_e(\theta,\phi), \tag{6.21.13}$$

其中已利用在表面处（$z=0$）$w=w_e(\theta,\phi)$ 的条件。如果把（6.21.11）和（6.21.13）式代入（6.21.2）式，则经过一些代数运算后得：

$$e^{kz}\bigg\{\left(\frac{\partial A}{\partial\phi}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(mk)+zmk\frac{\partial k}{\partial\theta}\right]-\frac{\partial A}{\partial\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\phi}(mk)+zmk\frac{\partial k}{\partial\phi}\right]\right)$$

$$\times(\sin\theta\cos\theta)^{-1}+mk^2\left(z\frac{\partial A}{\partial\phi}-k^{-1}\frac{\partial m}{\partial\phi}+k^{-2}m\frac{\partial k}{\partial\phi}\right)(\sin\theta)^{-2}$$

$$+mk^2(w_e-\lambda k)\bigg\}+e^{2kz}\bigg\{m\left(\frac{\partial m}{\partial\phi}\frac{\partial k}{\partial\theta}-\frac{\partial m}{\partial\theta}\frac{\partial k}{\partial\phi}\right)(\sin\theta\cos\theta)^{-1}$$

$$+(\sin\theta)^{-2}(mk)\left(\frac{\partial m}{\partial\phi}+zm\frac{\partial k}{\partial\phi}-\frac{m}{k}\frac{\partial k}{\partial\phi}\right)\bigg\}=0. \tag{6.21.14}$$

为了使（6.21.11）可以为一个真解，（6.21.14）式中作为 z 的不同函数的各个系数必须分别为零。也就是说，ze^{kz}，e^{kz}，ze^{2kz} 和 e^{2kz} 的系数必须均为零。我们首先考虑 ze^{2kz} 的系数。该项为零得

$$m\frac{\partial k}{\partial\phi}=0. \tag{6.21.15}$$

若 $m\neq0$（即对于一个非零斜压场），则 k 一定与经度无关。因此 $k=k(\theta)$. e^{2kz} 的系数也必须为零。利用（6.21.15）式，我们有

$$m\frac{\partial m}{\partial\phi}\left[\frac{\partial k}{\partial\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}k\right]=0. \tag{6.21.16}$$

同样，ze^{kz} 的系数为零得

$$km\frac{\partial A}{\partial\phi}\left[\frac{\partial k}{\partial\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}k\right]=0, \tag{6.21.17}$$

而 e^{kz} 的系数为零得

$$\lambda mk^3=\left\{\frac{\partial A}{\partial\phi}\frac{\partial}{\partial\theta}(mk)-\frac{\partial A}{\partial\theta}k\frac{\partial m}{\partial\phi}\right\}(\sin\theta\cos\theta)^{-1}$$

$$-\left(\frac{\partial m}{\partial\phi}\frac{mk}{\sin^2\theta}-w_emk^2\right). \tag{6.21.18}$$

为满足（6.21.16）和（6.21.17）式，或者 A 与 m 都与 ϕ 无关，或者

$$k(\theta)=\frac{C}{\sin\theta}. \tag{6.21.19}$$

其中 C 为任意常数。在前一种情况下，压力场完全与经度无关，因此 V 准确为零。这又说明对于所有的 z，有 $w=w_e$。这就要求大洋底有一个艾克曼边界层以承受这个垂直速度，并要求有一个大的 $[O(E_V^{-1/2})]$ 内区速度以产生这个艾克曼层。因此，如果 m 为 $O(1)$，则可断定，选择（6.21.19）式是正确的。这又意味着温跃层的垂直尺度为

$$k^{-1}=\frac{\sin\theta}{C},$$

当接近赤道时，它变得越来越浅，这与观测结果定性相符。如果$\partial A/\partial\phi$不为零，那么w包括一个从$z=0$面线性增长的项。对于正压海洋，这恰好是产生引起经向运动的涡管伸缩的项。对于层结海洋，我们试图得到$z_*\gg\delta_a$时渐近于一固定值的w解，在这种情况下，我们必须把A选得与θ无关，所以正压速度是纯纬向的。如果在很大的深度，经向边界（如东部边界）上的纬向速度为零，那末对于所有的θ和ϕ，A本身一定为零。因此，我们把解限于纯斜压的情况，即$A=0$的情况。在$z=0$处，为满足（6.21.9）式，应有

$$\rho(\theta,\phi,0)=-\frac{\partial p}{\partial z}(\theta,\phi,0)=-T_s(\theta,\phi)=-mk, \tag{6.21.20}$$

它决定了函数m，即

$$\boxed{m(\theta,\phi)=\frac{T_S(\theta,\phi)}{k(\theta)}}\,. \tag{6.21.21}$$

因此，假若

$$k=\frac{C}{\sin\theta},$$

则温跃层方程的解为

$$p=\frac{T_S(\theta,\phi)}{k(\theta)}e^{kz}, \tag{6.21.22a}$$

$$\rho=-T_S(\theta,\phi)e^{kz}, \tag{6.21.22b}$$

$$u=-\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{T_S(\theta,\phi)}{k(\theta)}+\frac{T_S}{k}\frac{\partial k}{\partial\theta}z\right)\right]\frac{e^{kz}}{\sin\theta}, \tag{6.21.22c}$$

$$v=(k\cos\theta\sin\theta)^{-1}\frac{\partial T_S}{\partial\phi}e^{kz}, \tag{6.21.22d}$$

$$w=w_e(\theta,\phi)+(\sin\theta)^{-2}\left[\frac{e^{kz}-1}{k^2}\frac{\partial T_S}{\partial\phi}\right], \tag{6.21.22e}$$

其中C为任一个正常数，根据（6.21.18）式有

$$\lambda C^3+\sin\theta\frac{\partial T_S}{\partial\phi}-w_eC^2\sin\theta=0. \tag{6.21.23}$$

从（6.21.22e）式看出，当$z\to-\infty$时，w接近于渐近值：

$$w_\infty=-\frac{1}{C^2}\frac{\partial T_S}{\partial\phi}+w_e(\theta,\phi), \tag{6.21.24}$$

再利用（6.21.23）式，得

$$\boxed{w_\infty=\frac{C\lambda}{\sin\theta}}\,. \tag{6.21.25}$$

由于

$$\frac{\partial T_S}{\partial\phi}=C^2\{w_e(\theta,\phi)-w_\infty\}, \tag{6.21.26}$$

又因为在 $C\lambda$ 给定时 w_∞ 是完全确定的，所以这个解在 $\partial T_S/\partial\phi$ 和 w_e 之间建立了一个紧密的关系。事实上，(6.21.26) 式只不过是斯维尔德鲁普关系，这是由于 (6.20.9) 式的垂直积分为

$$M_S^{(y)}=\int_{-\infty}^{0} v dz=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\{w_e-w_\infty\}, \qquad (6.21.27)$$

它与 (6.21.22d) 一起给出 (6.21.24) 式。因为向北流与 $\partial T_S/\partial\phi$ 成式比，所以，斯维尔德鲁普关系制约了可能的艾克曼抽吸作用，而后者可以与外加的 ϕ 方向表面温度梯度一致。T_S 或 w_e 可任意给定，但是其他的量则由斯维尔德鲁普约束关系来确定。当然，从物理上说，在边界上应当分别给出两个边界场。正是预先给定的解的相似形式，导致了 T_S 和 w_e 之间这个人为关系。

图6.21.2给出 Needler (1967) 根据 (6.21.22) 式和

$$T_*=-\mathscr{T}_0\rho(\theta,\phi,z) \qquad (6.21.28)$$

计算出的温度经向剖面，其中选择[1]

$$C/\delta_a=(1500米)^{-1}$$

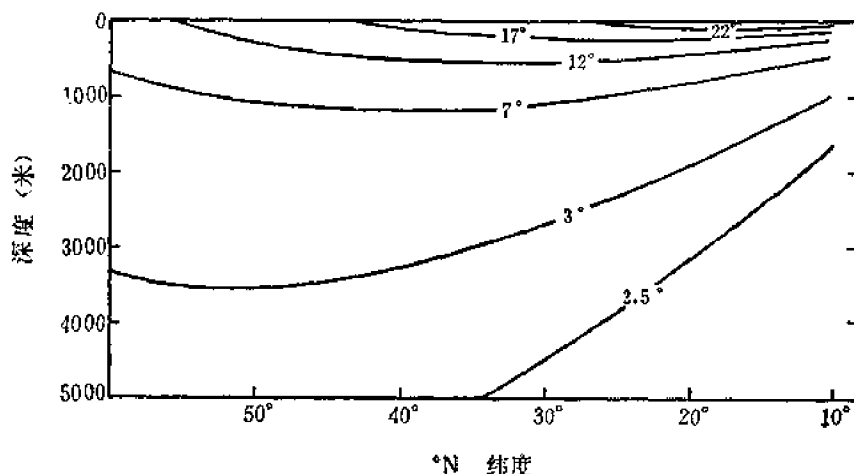


图6.21.2 温度场的南北剖面，其表面温度与 $\cos(\theta+10°)$ 成正比，且 $C/\delta_a=(1500米)^{-1}$ (根据 Needler, 1967)

和与 $\cos(\theta+10°)$ 成正比的表面温度。温度随 θ 的分布是相当切合实际的，由于 $(\sin\theta)^{-1}$ 依赖于 $k(\theta)$，所以等温线在赤道附近上升，而由于表面温度降低，因而等温线又在较高纬度上升。如果 W_e 小于零（就象响应于西风-信风应力分布的大洋中央循环流中出现的情况那样），那末，为维持斜压的向南流，$\partial T_S/\partial\phi$ 必须小于零。

解的最引人注目的特点之一是，可简单预报由 (6.21.25) 式给出的全球尺度的深层上升流 w_∞。一旦选定了 C，则 w_∞ 值就完全由 λ 来确定，而 λ 表示了耗散作用之大小。如果湍流密度混合作用可略，即若 λ 为零，那末 w_∞ 也将为零。事实上，该解中耗散的唯一作用是产生深层上升流。(6.21.25) 式实际上等价于平衡关系

(1) 虽然 (6.21.23) 式原则上是关于 C 的方程，但只有非常特殊的函数 $\partial T_S/\partial\phi$ 和 $w_e(\theta,\phi)$，才能使 C 的解为所要求的常数。而我们在这里先给定 C，并把 (6.21.23) 式看作是由 w_e 和 T_S 之间的相似形式解所要求的一个条件。

$$w_\infty \frac{\partial \rho}{\partial z} = \lambda \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2}, \tag{6.21.29}$$

所以，密度的垂直扩散与 w_∞ 引起的深层冷水上升流平衡。同时，密度分布（6.21.22b）独立地为无耗散方程的一个解，因为它的位涡满足

$$\Pi = \sin\theta \frac{\partial \rho}{\partial z} = C\rho, \tag{6.21.30}$$

它是（6.21.19）式的一种特殊情况。因此，由于相似形式的简单性，解的动力学特征可以分成两部分。场的基本结构由无耗散约束关系（6.20.20）式（即位涡守恒）来确定，而耗散之存在只决定深层上升流速度的大小，并不决定温跃层的结构。假定解有相似形式，这可能是一种基本技巧。参数 λ 可以写为

$$\lambda = \frac{\delta_D}{\delta_*}, \tag{6.21.31}$$

其中 δ_D 是扩散尺度，

$$\delta_D = \frac{K_V}{W}. \tag{6.21.32}$$

若W为10^{-4} 厘米/秒，K_V 为 1 厘米^2/秒，则δ_D 将为100米。我们在前面已估计了δ_*为O(600米)；因此，即使K_V大到 1 厘米^2/秒，λ 也将为一个小参数。这个事实与前面例子中 λ 与解之结构无关的事实一起，使人联想到，在确定温跃层结构时，耗散也许可以完全忽略不计。如果作了这种假设，那末可以利用守恒定律（6.20.18），尤其是可以利用（6.20.20）式：

$$\Pi = \Pi(\rho, p + \rho z). \tag{6.21.33}$$

当（6.21.33）式的函数形式选为

$$\Pi = \sin\theta \frac{\partial \rho}{\partial z} = a_0 \rho + b_0 (p + \rho z) + C_0 \tag{6.21.34}$$

时，就出现 Welander (1971) 提出的一种特别简单的情况，面（6.21.30）式现在可以看作它的一个特例。

如果把（6.21.34）式对z求微商，并且利用（6.20.7d）式，我们就得到

$$\sin\theta \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} = \frac{\partial \rho}{\partial z} b_0 \left(z + \frac{a_0}{b_0} \right), \tag{6.21.35}$$

它可直接积分而得出：

$$\rho(\theta, \phi, z) = \rho_0(\theta, \phi) + C(\theta, \phi) \int_z^0 \exp\left[-\frac{(\zeta + Z_0)^2}{d^2(\theta)} \right] d\zeta, \tag{6.21.36}$$

其中

$$Z_0 = \frac{a_0}{b_0},$$

$$d(\theta) = \left(\frac{-2}{b_0} \right)^{1/2} (\sin\theta)^{1/2}. \tag{6.21.37}$$

函数 $\rho_0(\theta, \phi)$ 是任意设置的表面密度场。显然，对于具有温跃层特点的解（其密度变化随深度衰减），b_0 必须为正。函数 $C(\theta, \phi)$ 用 $z \to \infty$ 时 ρ 接近于渐近值 ρ_∞ 的条件来定，即

$$\rho_{\infty}(\theta,\phi)=\rho_{s}(\theta,\phi)+C(\theta,\phi)\int_{-\infty}^{0}\exp\left[\frac{-(\zeta+Z_0)^2}{d^2(\theta)}\right]d\zeta, \qquad (6.21.38)$$

或

$$C(\theta,\phi)=\frac{\rho_{\infty}(\theta,\phi)-\rho_{0}(\theta,\phi)}{d(\theta)\int_{-Z_0/d}^{\infty}e^{-\mu^2}d\mu}.$$

其中 $\rho_{\infty}(\theta,\phi)$ 为任意场，对于切合实际的解，它最多是 θ 和 ϕ 的一个弱函数。Welander (1971a) 得到的解 (6.21.36) 之特点，取决于 Z_0 为正还是为负。若 Z_0 为负($a_0>0$)，则解随深度基本上是指数形式。但是，若Z_0为正，则作为z之函数的ρ廓线在 Z_0 处有一个拐点，即 $\partial\rho/\partial z$ 在 Z_0 处最大。第二长度尺度为 $d(\theta)$，它决定了围绕 Z_0 点的温跃层区域的宽度。虽然 Z_0 是固定的，但是 $d(\theta)$ 象 $(\sin\theta)^{1/2}$ 那样变化，在热带地区产生一个薄的强温跃层。图6.21.3给出 Welander 计算的温跃层结构；$\rho_0(\theta,\phi)$ 选得与实测的表面密度分布相匹配，而$C(\theta,\phi)$选得使 ρ 在很大深度上趋于一个均匀值。从 (6.21.36) 式和流体静力关系可得压力，即

$$p=p_0(\theta,\phi)-z\rho_0(\theta,\phi)+C(\theta,\phi)\int_{z}^{0}d\zeta\int_{\zeta}^{0}d\zeta'\exp\left[-\frac{(\zeta'+Z_0)^2}{d^2}\right]. \qquad (6.21.39)$$

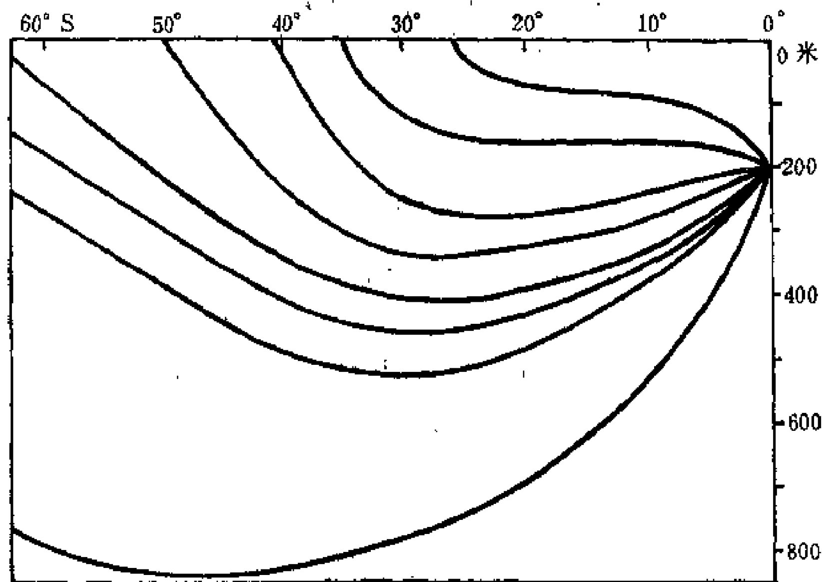


图6.21.3　理想流体温跃层之结构，其中Π是 β 和 ρ 的线性函数(Welander,1971)

但是表面压力 $p_0(\theta,\phi)$不是任意的。若把 (6.21.39) 和 (6.21.36) 代入 (6.21.34)式，则我们在$z=0$处得

$$p_s(\theta,\phi)=-Z_0\rho_0(\theta,\phi)-\frac{C_0}{b_0}-\frac{C(\theta,\phi)}{b_0}\sin\theta e^{-Z_0^2/d^2}. \qquad (6.21.40)$$

因此，压力场（因而总的速度场）完全由表面和深层密度场的特征所决定。这是理想流体模式的一个非常严重的缺陷，它使模式不能满足 w 和 ρ 在表面处为任意的条件。虽然理想流体

模式在模拟基本密度结构方面的成功是令人鼓舞的，但现在如何解决上述困难尚不清楚。

然而，由此得出的启发性论证告诉我们，即使在 δ_D/δ_0 为小量时，耗散作用也并不是到处都可以忽略的。考虑模式方程：

$$v_0 \frac{\partial \rho}{\partial y} + w_0 \frac{\partial \rho}{\partial z} = \lambda \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2}, \tag{6.21.41}$$

它模仿了 (6.20.7e) 式，不过 v_0 和 w_0 是任意选择的常数。(6.21.41) 对于 $y=0$ 时 ρ 为零、且 $z=0$ 时 ρ_S 为常值的解（虽然当 z 为大的正值时其衰减为零）可表示为 (Carslaw 和 Jaeger, 1959)：

$$\rho(y,z) = \frac{\rho_S}{2}\left[erfc\left(\frac{z - w_0\tau}{2(\lambda\tau)^{1/2}}\right) + e^{w_0 z/\lambda} erfc\left(\frac{z + w_0\tau}{2(\lambda\tau)^{1/2}}\right)\right], \tag{6.21.42}$$

其中

$$\tau = \frac{y}{v_0}$$

和

$$erfc(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi. \tag{6.21.43}$$

如果 w_0 大于零，且 λ 为小量，则图6.21.4(a)给出解的示意图。对于所有的 $z < w_0\tau$，密度场等于表面密度，后者已被速度 w_0 带到内部。在 $Z_0 = w_0 y/v_0$ 处出现的锋区，耗散过程

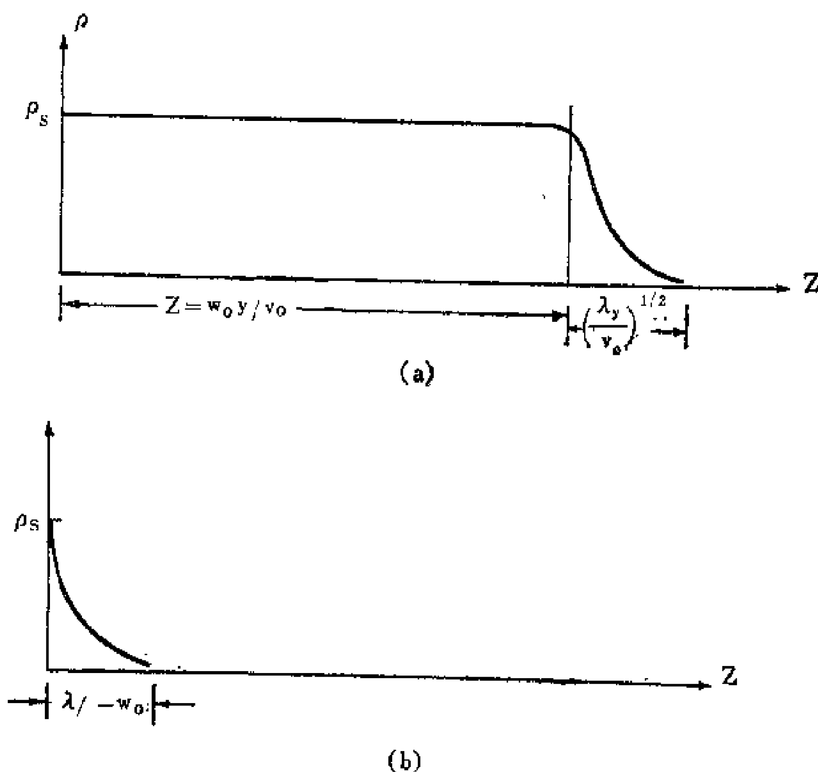


图6.21.4

(a)(6.21.41)式在 $w_0>0$ 时解的示意图，表明热力锋向流体的主体平流。(b)(6.21.41)式在 $w_0<0$ 时解的示意图，说明温度急速变化的区域朝边界挤压

开始在宽度为 $(\lambda y/v_0)^{1/2}$ 的内区扩散层中起作用。这使密度场急剧地渐近于远处所设置的密度值。另一方面，若w_0小于零，则（6.21.42）的形式就有显著的不同。现在除 $z=0$ 附近的量级为$O(\lambda/(-w_0))$的窄区外，对于所有的z，密度 ρ 非常接近于零。在这种情况下，窄区以外的密度平流被向内的密度弱扩散所平衡，结果在边界附近一个很薄的层内产生密度场的拦截。如果把这个直观模式转用到温跃层上，则它使人想到由 Welander(1971b)首次提出的下述可能性：在存正负艾克曼抽吸作用的大洋中，温跃层的动力学性质不能处处都用类似的解来充分表示。在 $w_e<0$ 的区域（即流体被抽入该区域），温跃层在深层，并且平流过程占优势，这与前面得出的解一样，也就是说，预料其深度为 $O(\delta_a)$，并且如图 6.21.4(a)所示，可能有内部耗散区。若 $w_e>0$，则艾克曼层把流体从地转区域抽出，并可预料有一个深度为 $O(\delta_D)$ 阶的薄温跃层区。因此，在这两种区域，耗散作用显然小，但为了使内区速度场和密度场与任意规定的边值相匹配，它是必不可少的。需要强调指出，这个假说是推理性的。

第七章 不稳定理论

7.1 引 言

除了月球引潮力以外，太阳加热是大气和海洋运动的终极能源。在很长的时期内，太阳辐射能可能稍微有些变化，但对于大多数气象学与海洋学问题来说，把太阳能源强度视为常数，是一种合理的简化。所以，入射辐射（及其空间分布）随时间的变化，由地球和太阳之位置间的天文关系确定，例如由地球在其绕太阳运行轨道上的季节变化所确定。但是显而易见，无论大气还是海洋之运动，都表现出那些时间尺度与日地系统的天文周期没有直接关联的变化。大气中的天气现象，实际上正是大气环流大尺度波状变化的表现，它们的发生，不象潮汐那样可以通过一个由以往经验可肯定它再现的简单的年表来制作预报。大洋运动的观测也揭示出一些变化，其时间尺度与表征外部作用的天文周期没有明显的关系。不仅实测的海洋与大气变化确实出现在与外力不相匹配的时间尺度上，而且除此之外，环流变化的任一特定观测结果都表明，假如在时间上未受随机干扰的话，它们的出现也是不稳定的。

不过可以假想大气和海洋处于一种与外界强迫作用和边界条件一致的动力学状态中，其中的所有变化，假定均可用适当的天文周期来预报，在这些天文周期中，每个季节都和它以前的相应季节一样，以至于用以往的年表可以确切地预测未来。这样一个物理系统也许满足各种物理原因，但它决不是自然界的真实状态。幸好，人类所经历的，不是上述假想的系统，而是呈现出千变万化的大气与海洋之运动，它们与简单的重复再现大相径庭。

大气与海洋环流之波动，可以归因于无波动的基本动力状态对波状小扰动的不稳定性。在任何真实系统中，都不可避免地存在着这样一些小扰动，但它们对稳定系统的影响是短暂的。然而，如果运动状态对小扰动是不稳定的，那末这种小扰动的振幅会增长，其时间尺度和空间尺度，决定于初始扰动和初始基本运动状态之结构的动力学相互作用。这对非天文周期扰动能量必然存在的原因，直接从概念上给出了合理的解释。但是，为了证明这一假说，需要解决两个极为困难的基本问题。第一，如果能证明波动的存在是由于环流之不稳定，而该环流可出现在没有波动的情况下，那末，首先必须知道这个没有波动的状态是什么样的状态。回答这个问题一般是很困难的。在某些经典的动力不稳定问题中，如在自下均匀加热的流体层的传导温度梯度不稳定的问题中，基本状态的计算很简单，可以把注意力直接集中于第二个基本问题，即初始状态对小扰动的稳定性表现及其随后的演变。对于大气和海洋运动之稳定性的研究，要计算在无波动的情况下，在物理上和数学上可能发生的运动是非常困难的，以至几乎不可能把这一研究完全进行到底。所以，人们自然会提出这样的问题：是否有其他办法可以代替详细计算无波动的运动状态。当然可以观测实际流型，计算其时间平均状态，由观测得到一个滤去了与波动有关的速度和温度变化的流型。这样可以定义一个实测的平均运动状态。但关键问题是应当认识到，一般不能用这种状态作为上述无波动的基本状态，并根据其稳定与否来确定实测波动是否起因于不稳定过程。实测平均运动的结构，必然会受到我们所要预测的波动之影响，因为一般而言，波动通过非线性过程产生随时间平均

不为零的热通量和动量通量。如果存在时间平均状态的话，上述通量的辐合必须由平均运动的耗散或相反的通量来平衡。因此实测平均运动之结构，已隐含地假定了波动的存在；同时，假设平均状态的稳定性能够精确描写无波动状态的稳定性，这一般也是一个使人误入岐途的虚构，因为在大多数情况下，波动的性质使没有波动的状态在稳定性方向上发生了改变。也就是说，如果把时间平均状态作为初始状态，经常会发现，它比我们应当考察的合理的初始状态稳定得多。

稳定性分析所需要的精确的无波动状态的未知性质，实际上可以变为好事。我们可以不去精确计算平均状态，而是预先规定一个初始状态。例如，我们设想一个行星，其上的流体运动是由加热和地形产生的、而且没有迭加纬向变化。任何定常的纬向运动（即与经度无关的运动）都满足（6.5.21）式。我们可以设想一种运动，它在开始时是由摩擦和外界加热之间的平衡所确定的，因为这些力虽然对随 x 变化的运动可以忽略，但当（6.5.21）式中保留的项恒等于零（象对与 x 无关的运动那样）时，它们就变为主要项。每一种设想的初始状态对应于热流和摩擦力的一种特定分布。为了使所设想的运动成为运动方程的解，它们可以根据实际情况加以规定。这样我们就可以考虑各种初始状态，每一种初始状态对应于不同的外力组合，从而可以直接考察各种初始状态的稳定性，以便研究不稳定性是由初始状态的哪些特征引起的。如果能说明不稳定性起因的特征足够普遍，且出现在各种各样的情况下，同时所得到的不稳定又可确认有其合理的地球物理意义，那末考察这种设想的初始状态（而不是精确地计算个别例子），实际上更能起到深入了解不稳定过程性质和不稳定判据之作用。

这样做本身又假定了，有可能判断预报的不稳定波（即初始状态对小扰动的响应），实际上对海洋和大气在物理上是否合理。事先并不清楚，在海洋和大气中出现的充分发展的有限振幅波动中含有明显的不稳定过程的性质。Charney(1947) 和 Eady(1949) 等研究大气不稳定的先驱者们所做的主要贡献是，他们证明了在概念上"合理"的初始状态之不稳定波，具有和大气中实测的天气波很相近的时空尺度与物理结构。大气中的实测波动，可以用十分理想化的基本运动的小振幅稳定性分析来解释。这个概念并非是显而易见的，它在随后所得到的证实，有助于深刻了解早期研究工作的物理意义。

本章旨在讨论准地转不稳定理论的基本原理。尽管实际大气的未扰动状态，是由海陆温度差异和地形强迫造成的随经度变化的运动，但大多数稳定性理论，把初始状态理想化为均匀的纬向运动，即不随经度变化的运动。研究这种理想化初始状态的不稳定性，可以直接揭示出产生不稳定过程的机制，而且能预测实际波动的一般特征。

7.2 不稳定问题的提出：连续层结模式

无论在大气还是在海洋中，我们欲建立的理论所研究的实测波动是天气尺度的，使用第六章的记号，即

$$\beta=\frac{\beta_0 L^2}{U}=O(1), \tag{7.2.1a}$$

$$S=\frac{N_s^2 D^2}{f_0^2 L^2}=O(1), \tag{7.2.1b}$$

式中的 N_s，对大气来说为

$$N_s^2=\frac{g}{\Theta_s}\frac{\partial\Theta_s}{\partial z_*},$$

对海洋来说为

$$N_s^2=-\frac{g}{\rho_s}\frac{\partial\rho_s}{\partial z_*}.$$

参数 β_0 和 f_0 如同 6.2 节一样，用中心纬度 θ_0 来定义，该纬度 θ_0 也规定了我们所讨论的地理区域。为了使准地转理论成立，显然 θ_0 必须离赤道（此处 f_0 为零）有相当的距离。

考虑速度是严格纬向（即沿纬圈）的初始运动状态，且可用地转流函数给出：

$$\psi=\Psi(y,z). \tag{7.2.2}$$

因此，初始状态或基本状态以无量纲的纬向速度

$$U_0=-\frac{\partial\Psi}{\partial y}(y,z) \tag{7.2.3}$$

为特征，它一般是纬度(y)和高度(z)的函数。有量纲的速度借助固定的速度尺度 U（它是速度的典型值）与 U_0 联系起来。U 可以是经向横截面的平均速度，或者可以很好地代表 yz 剖面上有量纲的纬向速度的范围。对于 U 的唯一限制是，它的选取应使有量纲的速度为

$$U_{0*}=UU_0(y,z),$$

且使 $U_0(y,z)$ 的量级为1[1]。

我们将对大气纬向气流的情况提出上述基本状态的稳定性问题，就提出问题而言，海洋的情况可以考虑为大气问题的特例，并且如 6.8 节讨论的那样，通过把标准密度场视为常数、且用海洋密度距平的负值代替大气位温距平 θ 而得到。

与纬向气流 (7.2.3) 相对应的位温是

$$\theta_*=\theta_s(z)[1+\varepsilon F\Theta(y,z)], \tag{7.2.4}$$

式中的 $\Theta(y,z)$ 精确到罗斯贝数的最低阶为

$$\Theta_0(y,z)=\frac{\partial\Psi}{\partial z}. \tag{7.2.5}$$

根据热成风关系有

$$\frac{\partial U_0}{\partial z}=-\frac{\partial\Theta_0}{\partial y}, \tag{7.2.6}$$

所以初始纬向风随高度的变化，直接与经向位温梯度有关，或根据 (6.10.13) 式，与基本气流的有效位能有关。

初始状态 $\Psi(y,z)$是 (6.5.21) 式的解。现在考虑以流函数

$$\psi(x,y,z,t)=\Psi(y,z)+\phi(x,y,z,t) \tag{7.2.7}$$

表示的扰动状态的演变，函数ϕ表示正在发展的扰动场之结构。若把 (7.2.7)代入(6.5.21)，则得到 ϕ 的非线性问题，即

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U_0\frac{\partial}{\partial x}\right)q+\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\Pi_0}{\partial y}+\left\{\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial y}-\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial q}{\partial x}\right\}=0 \tag{7.2.8}$$

式中 $q(x,y,z,t)$是由下式定义的扰动位涡：

(1) 本章的记号和第六章一样，即有量纲的变量以星号标识。下标 0 和 1 代表每个变量的罗斯贝数展开式中的前两阶。例如，$U_*=U(U_0+\varepsilon U_1+\cdots\cdots)=U_{0*}+\varepsilon U_{1*}+\cdots\cdots$.

$$q=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\rho_s}{S}\frac{\partial\phi}{\partial z}, \tag{7.2.9}$$

而 $\partial\Pi_0/\partial y$ 是基本状态位涡的经向梯度，即

$$\Pi_0=\beta y+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}+\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\rho_s}{S}\frac{\partial\Psi}{\partial z}, \tag{7.2.10}$$

故

$$\frac{\partial\Pi_0}{\partial y}=\beta-\frac{\partial^2U_0}{\partial y^2}-\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho_s}{S}\frac{\partial U_0}{\partial z}\right). \tag{7.2.11}$$

假若平均气流与y,z无关，则环境位涡的经向梯度将简化为β。现在的基本问题是，确定U_0的结构如何决定扰动场ϕ的演变。也就是说，给定一个特殊的初始状态$U_0(y,z)$，迭置于此基本气流上的扰动场将趋于增强还是衰减？如果出现扰动场增强，那末我们可以推论，初始状态对扰动场ϕ是不稳定的。为了肯定U_0是稳定的，必须证明初始状态对所有可能的初始扰动都是稳定的；而要证实U_0的不稳定性，则只要找到一个对初始状态不稳定的扰动ϕ即可。

为了完整地提出ϕ的数学问题，还必须规定边界条件。为使β平面近似成立，区域的纬度范围必须是球面之一部分，所以要给出y的边界条件。

我们假定在$y=\pm1$处有包围基本气流和扰动区的刚性边界。虽然这一假设显然是人为的，但它可以把所要研究的区域和周围区域有效地隔开，并在出现不稳定时，可以断定其源一定位于所考虑的区域内。在上述条件下，可以得出$y=\pm1$处U_0为零，

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=0,\quad 在y=\pm1处. \tag{7.2.12}$$

如果把纬向动量方程（6.3.13a）对x从$-\infty$到∞积分（这相当于绕一个完整的纬圈积分），可得

$$\frac{\partial\overline{U}_0}{\partial t}=\bar{v}_1-\frac{\partial}{\partial y}\overline{v_0u_0}, \tag{7.2.13}$$

式中上横线表示求平均，

$$\overline{(\quad)}=\lim_{X\to\infty}\frac{1}{2X}\int_{-X}^{X}(\quad)dx. \tag{7.2.14}$$

注意$\bar{v}_0$必须为零，因为v_0是地转的。由于v_1和v_0在$y=\pm1$处都必须为零，故又可得出，ϕ除了满足（7.2.12）式以外，还必须满足

$$\frac{\partial^2}{\partial t\partial y}\bar{\phi}=0,\ 在y=\pm1处, \tag{7.2.15}$$

这是（6.9.17）式的特例。在$z=0$处，（6.6.10）式适用。为了使基本状态x与无关，或者$U_0(y,0)$必须为零，或者更普遍些，$\partial\eta_B/\partial x$必须为零。我们选后一种条件，在此情况下$\phi$的边界条件变为，在$z=0$处满足

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U_0\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial\phi}{\partial z}+\left(S\frac{\partial\eta_B}{\partial y}-\frac{\partial U_0}{\partial z}\right)\frac{\partial\phi}{\partial x}+\left\{\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z}-\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z}\right\}$$

$$=-\frac{E_V^{1/2}}{2\varepsilon}S\left\{\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right\}. \tag{7.2.16}$$

上表面处可能有不同的边界条件。如果 $z=z_T$ 处的上表面是自由面，如大洋表面，则有 (6.9.14) 式成立，对扰动来说，它意味着在 $z=z_T$ 处有

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U_0\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial\phi}{\partial z}-\frac{\partial U_0}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\left\{\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z}-\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z}\right\}=0. \qquad (7.2.17)$$

另一方面，如果我们想考察以固定水平面为上界的运动之稳定性问题，那末 (4.6.11) 式成立，所以对于 ϕ，在 $z=z_T$ 处有

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U_0\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial\phi}{\partial z}-\frac{\partial U_0}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\left\{\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z}-\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z}\right\}$$

$$=\frac{E_V^{\frac{1}{2}}}{2\varepsilon}S\left\{\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right\}. \qquad (7.2.18)$$

对于上边界在 $z_T=\infty$ 处的大气模式，要求满足辐射条件：

$$\lim_{Z\to\infty}\int_{-1}^{1}dy\rho_s\overline{w_1\phi}\geqslant 0. \qquad (7.2.19)$$

实际上，在以下我们所要讨论的全部情况中，对于增长的扰动，其辐射条件可以由以下更强的条件来代替：

$$\lim_{Z\to\infty}\int_{-1}^{1}dy\rho_s\overline{w_1\phi}=0. \qquad (7.2.20)$$

稳定性问题之研究，首先是给定 $U_0(y, z)$，然后考察对于任意初始扰动场，由方程 (7.2.8)、及边界条件 (7.2.12)、(7.2.16) 和 (7.2.17)、(7.2.18) 或 (7.2.19) 所描写的 ϕ 场的演变。上面得到的关于 ϕ 的非线性问题，一般是难以处理的，求解过程通常要求扰动是小振幅的，即 $\phi\ll 1$，从而可以忽略与 ϕ^2 成比例的非线性项，至少在扰动演变的早期阶段可以如此。然而，在作这种线性化之前，可以先对非线性问题，作某些一般性的讨论。在没有加热的情况下，对热力学方程求纬向平均得到

$$\frac{1}{S}\frac{\partial\bar{\theta}_0}{\partial t}=-\bar{w}_1-\frac{\partial}{\partial y}\frac{(\overline{v_0\theta_0})}{S}. \qquad (7.2.21)$$

如果把 (7.2.13) 式对 y 求微商，把 (7.2.21) 式乘以 ρ_s 后再对 z 求微商并除以 ρ_s，然后将所得到的两个方程式相加，便可得出纬向平均位涡的演变方程：

$$\frac{\partial\bar{q}}{\partial t}=\frac{\partial^2}{\partial y^2}\overline{v_0u_0}-\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\frac{\rho_s}{S}\overline{v_0\theta_0}, \qquad (7.2.22)$$

推导中已使用了纬向平均连续方程。由于

$$\bar{q}=-\frac{\partial\bar{U}_0}{\partial y}+\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\rho_s}{S}\bar{\theta}_0, \qquad (7.2.23)$$

故由 (7.2.22) 式得出

$$\frac{\partial\bar{q}}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial y}(\overline{v_0q}). \qquad (7.2.24)$$

现在，v_0 由定义是$O(\phi)$，而且因 v_0 是地转的，故对 x 求平均为零。所以扰动通量 $\overline{u_0v_0}$、$\overline{\theta_0v_0}$ 和 $\overline{v_0q}$ 不大于 $O(\phi^2)$。当扰动增长时，纬向平均场 $\bar{u}_0$、$\bar{\theta}_0$ 和 $\bar{q}$ 随时间变化的量级是 $O(\phi^2)$。但是，可以事先对这种纬向平均场的演变加上某种重要的约束。若把 (7.2.13) 式

乘以 ρ_s，并在经向剖面上积分，则由于在 $y=\pm 1$ 处 v_0 为零，因此我们得到

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{z_T}\int_{-1}^{1}\rho_s\bar{u}_0\,dy\,dz=\int_0^{z_T}\int_{-1}^{1}\rho_s\bar{v}_1\,dy\,dz. \tag{7.2.25}$$

(7.2.25) 中的项 $\int_0^{z_T}\rho_s\bar{v}_1\,dz$ 表示在运动的无粘内区中，$O(\varepsilon)$ 非地转速度产生的总的向北的质量输送。如果上表面是固定的话，上述量必定由 $z=0$ 处的下艾克曼层及上艾克曼层中向南的穿越等压线的质量输送所平衡。利用 4.5 节中关于艾克曼层分析所得的结果，可以证明：

$$\int_0^{z_T}\rho_s\bar{v}_1dz=-\frac{E_V^{1/2}}{2\varepsilon}[\rho_s(0)\bar{u}_0(y,0)+\rho_s(z_T)\bar{u}_0(y,z_T)], \tag{7.7.26}$$

式中，除非 $z=z_T$ 处的表面确实是刚性的且有一艾克曼层，否则右边第二项为零。所以没有摩擦作用时，总的向北运动一定为零，因此不管扰动性质如何，总的纬向动量是守恒的。除了在 $z=0$ 和 $z=z_T$ 的表面附近摩擦阻滞运动以外，扰动的影响只是使纬向动量在 yz 剖面上重新分布，而总的平均纬向动量守恒，即

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{z_T}\int_{-1}^{1}\rho_s\bar{u}_0dydz=O\left(\frac{E_V^{1/2}}{\varepsilon}\right). \tag{7.2.27}$$

类似地，读者容易验证，由 (7.2.21) 式有

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{z_T}\int_{-1}^{1}\rho_s\frac{\bar{\theta}_0}{S}dydz=O\left(\frac{E_V^{1/2}}{\varepsilon}\right). \tag{7.2.28}$$

平均运动的总能量定义为

$$\bar{E}=\int_{-1}^{1}dy\int_0^{z_T}dz\rho_s\left\{\frac{(\bar{u}_0)^2+(\bar{\theta}_0)^2/S}{2}\right\}, \tag{7.2.29}$$

由 (7.2.13) 和 (7.2.21) 得出

$$\frac{\partial\bar{E}}{\partial t}=-\int_0^{z_T}\int_{-1}^{1}dy\,dz\,\rho_s[\bar{w}_1\bar{\theta}_0-\bar{v}_1\bar{u}_0]-\int_0^{z_T}\int_{-1}^{1}dy\,dz\,\rho_s\left[\bar{u}_0\frac{\partial}{\partial y}(\overline{v_0u_0})+\bar{\theta}_0\frac{\partial}{\partial y}\frac{(\overline{v_0\theta_0})}{S}\right]. \tag{7.2.30}$$

使用地转关系，借助 $\bar{\Phi}$ 来计算 $\bar{\theta}_0$ 和 $\bar{u}_0$，经过分部积分之后，(7.2.30) 式给出

$$\frac{\partial\bar{E}}{\partial t}=-\int_0^{z_T}\int_{-1}^{1}dydz\rho_s\left[\bar{u}_0\frac{\partial}{\partial y}(\overline{v_0u_0})+\bar{\theta}_0\frac{\partial}{\partial y}\frac{(\overline{v_0\theta_0})}{S}\right]+\int_{0}^{1}dy[\rho_s(0)(\bar{\Phi}\bar{w}_1)_{z=0}-\rho_s(z_T)(\bar{\Phi}\bar{w}_1)_{z_T}], \tag{7.2.31}$$

(7.2.31) 式最后两项表示由穿过上、下边界的平均垂直能通量产生的纬向平均运动能量之变化。在无摩擦时这两项均等于零。但是，(7.2.31)式各边的前两项代表由扰动场的动量和热量通量辐合产生的能量变化，而且一般说来，它们不为零。实际上，这是不稳定过程的实质及其对平均运动的影响。虽然扰动只能使纬向平均场 $\bar{u}_0$ 和 $\bar{\theta}_0$ 重新分布，但可以使纬向平均场之能量 $\bar{E}$ 改变，而且纬向平均场失去的能量将为波状扰动的进一步发展所利用。在无摩擦时，对 (7.2.31) 式继续作分部积分得

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial t}=\int_0^{z_T}\int_{-1}^{1} dy\,dz\,\rho_s\left[\overline{v_0 u_0}\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial y}+\frac{\overline{v_0\theta_0}}{S}\frac{\partial \bar{\theta}_0}{\partial y}\right]. \tag{7.2.32}$$

如果在 $\partial\bar{\theta}_0/\partial y$ 为负的地方，扰动热通量 $\overline{v_0\theta_0}$ 为正，即若扰动热通量的方向与纬向平均的径向温度梯度相反时，上述扰动热通量将使纬向平均场之能量减少。类似地，如果扰动动量通量 $\overline{v_0 u_0}$（负的雷诺应力）的方向与纬向平均速度 $\bar{u}_0$ 的梯度相反，则动量通量也将使平均运动能量减少。所以，扰动场使与纬向平均运动有关的能量减少，结果扰动有使 $\bar{u}_0$ 和 $\bar{\theta}_0$ 的经向梯度变平滑的趋势，同时又保持其在经向平面内的平均值不变。

7.3 线性稳定性问题：不稳定的条件

按实际情况来说，非线性不稳定问题 (7.2.8) 是难以处理的。我们自然希望能考察初始状态对任意振幅扰动的稳定性，但 (7.2.8) 式的非线性性质使这一希望落空。因而我们只有假定，至少在开始时扰动振幅足够小，即

$$\phi \ll 1 \tag{7.3.1}$$

所以 (7.2.8)、(7.2.16)、(7.2.17) 和 (7.2.18) 中与 ϕ^2 和 ϕq 成比例的项可以忽略不计。在忽略与 ϕ^2 成比例的项而保留 $O(E_V^{1/2}/\varepsilon)$ 项时，我们假设 $O(E_V^{1/2}/\varepsilon)$ 项尽管是小量，但 $O(\phi^2)$ 项更小。略去量级为 ϕ^2 的项后，得到线性化稳定性问题：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U_0\frac{\partial}{\partial x}\right)q+\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial \Pi_0}{\partial y}=0, \tag{7.3.2}$$

式中

$$q=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\rho_s}{S}\frac{\partial \phi}{\partial z}, \tag{7.3.3}$$

边界条件是

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}=0, \quad 当\ y=\pm 1, \tag{7.3.4}$$

此时，在 $z=0$ 处我们有

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U_0\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial \phi}{\partial z}+\left(S\frac{\partial \eta_B}{\partial y}-\frac{\partial U_0}{\partial z}\right)\frac{\partial \phi}{\partial x}=-\frac{E_V^{1/2}S}{2\varepsilon}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right), \tag{7.3.5}$$

在 $z=z_T$ 处，根据上边界是刚性边界还是自由边界而分别有

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U_0\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial \phi}{\partial z}-\frac{\partial U_0}{\partial z}\frac{\partial \phi}{\partial x}=\begin{cases}\dfrac{E_V^{1/2}S}{2\varepsilon}\left(\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right) & (刚性), \\ 0 & (自由)\end{cases} \tag{7.3.6}$$

若 $z_T\to\infty$，我们选 (7.2.19) 式作为适当的条件，即

$$\lim_{z\to\infty}\int_{-1}^{1} dy\,\rho_s\,\overline{w_1\phi}\geqslant 0. \tag{7.3.7}$$

当把一个振幅无限小的扰动迭加到流场 $U_0(y,z)$ 上时，上面提出的线性问题，可以研究流场是否稳定。如果流场对这种小扰动不稳定，且扰动增长，那末这些扰动最后将达到有限振幅，从而必须考虑那些在这里已略去的非线性效应。或者，若流场对无限小扰动是稳定的，则有必要研究振幅足够大的扰动是否会使基本流场减稳。在本书的讨论中，第二种可能性并未涉及；第一种可能性将在 7.16 节的有限振幅问题中予以讨论。值得注意的是线性问题确

实在很大程度上对大气与海洋中观测到的波动结构（如波长和垂直尺度）作出了合理的解释。

将（7.3.2）式乘以 $\rho_s\phi$，然后对整个流体体积积分，可以得到扰动场的能量方程。利用扰动场在 x 方向的周期性及 $y=\pm 1$ 和 $z=0$、z_T 处的边界条件，经过几次分部积分后可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{z_T}\int_{-1}^{1} dydz\frac{\rho_s}{2}\left[\overline{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2+S^{-1}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2}\right] \\
&=\int_0^{z_T}\int_{-1}^{1} dydz\left[\rho_s\overline{\frac{\partial\phi}{\partial x}\ \frac{\partial\phi}{\partial y}}\ \frac{\partial U_0}{\partial y}+\rho_s S^{-1}\overline{\frac{\partial\phi}{\partial x}\ \frac{\partial\phi}{\partial z}}\ \frac{\partial U_0}{\partial z}\right] \\
&-\frac{E_V^{1/2}}{2\varepsilon}\int_{-1}^{1} dy\left\{\rho_s\left[\overline{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2}\right]\right\}_{z=0} \qquad (7.3.8) \\
&+\begin{cases} -\dfrac{E_V^{1/2}}{2\varepsilon}\displaystyle\int_{-1}^{1} dy\left\{\rho_s\left[\overline{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2}\right]\right\}_{z=z_T} & (\text{刚性}), \\ 0 & (\text{自由}), \\ -\displaystyle\int_{-1}^{1} dy(\rho_s\overline{\phi w_1})_{z\to\infty} & (z_T\to\infty), \end{cases}
\end{aligned}
$$

式中上横线表示由（7.2.14）式定义的对 x 的平均。

（7.3.8）式左边的体积分表示扰动场的动能和有效位能之和随时间的变化率。扰动能量的这种增长或衰减是由右端项给出的。右端第一项可以表示为

$$
\int_0^{z_T}\int_{-1}^{1}\rho_s\overline{\frac{\partial\phi}{\partial x}\ \frac{\partial\phi}{\partial y}}\ \frac{\partial U_0}{\partial y}dydz=-\int_0^{z_T}\int_{-1}^{1}\rho_s\overline{u_0v_0}\frac{\partial U_0}{\partial y}dydz \qquad (7.3.9)
$$

它是扰动的雷诺应力 $-\rho_s\overline{u_0v_0}$ 与纬向气流 U_0 的水平切变之积在径向平面内的积分。（7.3.8）式右端第二项，在使用（7.2.6）式后可以写为

$$
\int_0^{z_T}\int_{-1}^{1}\rho_s\overline{\frac{\partial\phi}{\partial x}\ \frac{\partial\phi}{\partial z}}\ \frac{\partial U_0}{\partial z}dydz=-\int_0^{z_T}\int_{-1}^{1}\rho_s\overline{\theta_0v_0}\frac{\partial\Theta_0}{\partial y}dydz, \qquad (7.3.10)
$$

因此，它表示扰动向北输送的热通量与 $-\partial\Theta_0/\partial y$（即位温的向赤道方向的梯度）之乘积在径向平面上的积分。（7.3.8）式中的其他各项表示由下艾克曼层和上艾克曼层（如果 z_T 是刚性的）的摩擦耗散或从系统逸出的垂直能通量（若 $z_T\to\infty$）所引起的波动能汇。所以唯一可能的波动能源是（7.3.9）和（7.3.10）式所表示的两项，它们关键取决于 U_0 的水平切变和垂直切变。对于大多数气象与海洋上合理的情况，艾克曼层摩擦所引起的耗散时间尺度远比平流时间长，即 $E_V^{1/2}/\varepsilon\ll 1$，所以对扰动的初始演变，无摩擦近似是成立的。在无摩擦且 $z=z_T$ 处能通量为零的情况下，

$$
\frac{\partial E(\phi)}{\partial t}=-\int_0^{z_T}\int_{-1}^{1} dydz\rho_s\left[\overline{v_0u_0}\frac{\partial U_0}{\partial y}+\frac{\overline{v_0\theta_0}}{S}\ \frac{\partial\Theta_0}{\partial y}\right], \qquad (7.3.11)
$$

式中 $E(\phi)$ 是扰动总能量，即

$$
E(\phi)\equiv\int_0^{z_T}\int_{-1}^{1} dydz\frac{\rho_s}{2}\left[\overline{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{S}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2}\right]. \qquad (7.3.12)
$$

在（7.3.11）式中，u_0、v_0 和 θ_0 当然是扰动场，其定义分别是：

$$
u_0-U_0=-\frac{\partial\phi}{\partial y}, \qquad (7.3.13a)
$$

$$v_0=\frac{\partial\phi}{\partial x},\qquad(7.3.13b)$$

$$\theta_0-\Theta_0=\frac{\partial\phi}{\partial z}.\qquad(7.3.13c)$$

在线性理论中，纬向平均能量方程可以从（7.2.32）式直接导出，只要注意到对小振幅扰动，精确到$O(\phi^2)$有

$$\overline{v_0u_0}\frac{\partial\bar{u}_0}{\partial y}=\overline{v_0u_0}\frac{\partial U_0}{\partial y},\qquad(7.3.14a)$$

$$\overline{v_0\theta_0}\frac{\partial\bar{\theta}_0}{\partial y}=\overline{v_0\theta_0}\frac{\partial\Theta_0}{\partial y},\qquad(7.3.14b)$$

故在无摩擦时，(7.2.32) 式变为

$$\frac{\partial\bar{E}}{\partial t}=\int_0^{z_T}\int_{-1}^{1}dydz\rho_s\left[\overline{v_0u_0}\frac{\partial U_0}{\partial y}+\frac{\overline{v_0\theta_0}}{S}\frac{\partial\Theta_0}{\partial y}\right].\qquad(7.3.15)$$

若将（7.3.11）式和（7.3.15）式加以比较，则容易看出，x 方向平均运动[1]之能量与波动能量之和守恒。因此作用于平均梯度上的波动动量通量和热通量，代表平均运动和波动运动之间的能量转换机制。因此，扰动场获得的能量一定是平均场通过不稳定过程所失去的能量。不稳定现象是从无波运动向波动运动优先输送能量的现象。

取决于基本流水平切变的不稳定过程，称为正压不稳定，因为它可以出现在没有垂直切变的均质流体中。为了使正压不稳定过程向扰动传送能量，从（7.3.8）式可知，在经向平面上平均说来，乘积

$$\overline{\frac{\partial\phi}{\partial x}\ \frac{\partial\phi}{\partial y}}\ \frac{\partial U_0}{\partial y}$$

必须为正。由于

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}\ \frac{\partial\phi}{\partial y}\ \frac{\partial U_0}{\partial y}=\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\Big/\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\ \frac{\partial U_0}{\partial y}=-\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_\phi\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\frac{\partial U_0}{\partial y},\qquad(7.3.16)$$

所以，若如图7.3.1a 所示，正压不稳定使扰动能量增加，则 ϕ 的等值线在 $\partial U_0/\partial y$ 为正值的

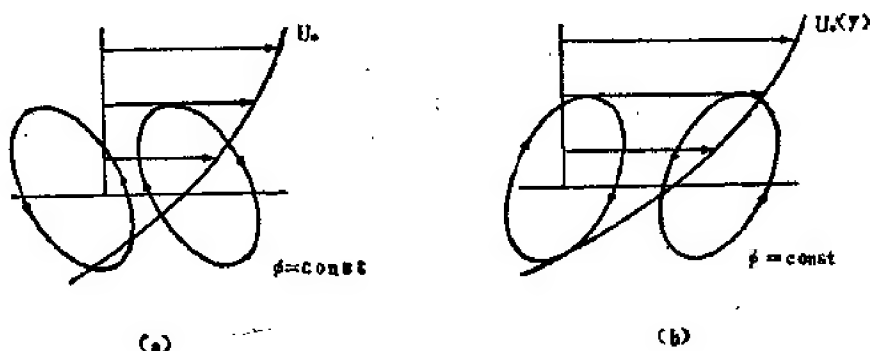


图7.3.1

(a) 当扰动的雷诺应力从基本气流汲取能量时，扰动流线之倾斜。注意扰动“逆”纬向气流方向倾斜以使它减速的现象。
(b) 当扰动的雷诺应力从扰动向基本流输送能量时，扰动流线之倾斜。

（1） 我们以后称 U_0 为平均运动，而不是指实测运动在 x 方向的平均值。

区域一定（平均地说）由西北向东南倾斜。假如等ϕ线的倾斜方向相反，那末扰动将把能量供给平均运动。能量转换率取决于平均水平切变之大小。若$\partial U_0/\partial y<0$，则能量释放方向与$\phi$的流线之关系相反。

另一种不稳定过程取决于基本流垂直切变的存在。由于垂直切变意味着水平温度梯度，故这种过程叫斜压不稳定。水平温度梯度之存在，意味着基本流中存在有效位能，而且这是斜压不稳定的能源。斜压转换项为正的条件是，平均来说有

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial U_0}{\partial z}=-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_\phi\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\frac{\partial U_0}{\partial z}>0, \tag{7.3.17}$$

所以为了使斜压转换项为正，在$\partial U_0/\partial z>0$的区域，等$\phi$线必须向上并向西倾斜。能量转换过程对$\phi$的空间结构的敏感性是这种微妙的不稳定过程的表现，在这种不稳定过程中，为了使平均运动的可用动能与位能释放，扰动必须有适当的结构才行。注意在扰动获得能量的各种情况下，等ϕ线的方向与被切变线弄歪斜了的无温示踪物（如染纹）之方向恰好相反。

能量方程（7.3.11）通过分部积分，可以用通量辐合与平均运动U_0之乘积来表示，即

$$\frac{\partial E(\phi)}{\partial t}=\int_0^{z_T}\int_{-1}^{1}dy\,dz\,\rho_s\left[U_0\frac{\partial}{\partial y}\overline{v_0u_0}+\Theta_0 S^{-1}\frac{\partial}{\partial y}\overline{v_0\theta_0}\right]. \tag{7.3.18}$$

注意，如果$(\partial/\partial y)(\overline{v_0u_0})>0$，则（7.2.13）意味着平均运动减小，即雷诺应力作为平均运动的一个阻滞力。这一阻力与正U_0的乘积表示平均运动能量减少率，如（7.3.18）所示，也表示$E(\phi)$的增长率。同样，波动热通量的辐散，即$(\partial/\partial y)(\overline{v_0\theta_0})>0$，有使平均位温$\theta_0$减小的趋势。在$\theta_0$为正时，这将使纬向平均运动的有效位能减小，而这意味着波动能量之增加。

能量方程（7.3.11）在分部积分、并使用（7.2.6)式以后，还可以表示成

$$\frac{\partial}{\partial t}E(\phi)=\int_0^{z_T}\int_{-1}^{1}dy\,dz\,U_0\left[\frac{\partial}{\partial y}(\rho_s\overline{u_0v_0})-\frac{\partial}{\partial z}(\rho_s\overline{\theta_0v_0})\right]$$

$$+\int_{-1}^{1}dy\,U_0\,\rho_s\frac{\overline{v_0\theta_0}}{S}\bigg|_0^{z_T}, \tag{7.3.19}$$

式中使用了记号

$$(\quad)_0^{z_T}=(\quad)_{z=z_T}-(\quad)_{z=0}, \tag{7.3.20}$$

以便较简洁地表示由第二项的分部积分所产生的边界项。利用恒等式

$$\rho_s\overline{v_0q}=-\frac{\partial}{\partial y}\rho_s\overline{v_0u_0}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\rho_s}{S}\overline{v_0\theta_0}, \tag{7.3.21}$$

可以把能量方程用扰动场的位涡通量来表示：

$$\frac{\partial E(\phi)}{\partial t}=-\int_0^{z_T}\int_{-1}^{1}dy\,dz\,U_0\rho_s\overline{v_0q}+\int_{-1}^{1}dy\,U_0\,\rho_s\overline{v_0\theta_0}\bigg|_0^{z_T} \tag{7.3.22}$$

为方便起见，引进由下式定义的函数$\eta(x,y,z,t)$：

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+U_0\frac{\partial\eta}{\partial x}=v_0 \tag{7.3.23}$$

η是流体元向北的位移，而（7.3.23）式是质点位移和欧拉速度之间较普遍关系式之线性化形式。把(7.3.2）式改写为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U_0\frac{\partial}{\partial x}\right)q=-\left(\frac{\partial}{\partial t}+U_0\frac{\partial}{\partial x}\right)\eta\frac{\partial \Pi_0}{\partial y}, \tag{7.3.24}$$

就可以明瞭引入 η 之原因。(7.3.24)的特解是

$$q=-\eta\frac{\partial \Pi_0}{\partial y}, \tag{7.3.25}$$

它对应于那些扰动位涡完全由位移平流平均位涡梯度而造成的扰动．若利用 (7.3.25) 式，则可得到

$$\overline{v_0 q}=-\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\overline{\eta^2}}{2}\right)\frac{\partial \Pi_0}{\partial y}, \tag{7.3.26}$$

这使能量方程可以写为

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[E(\phi)-\int_0^{z_T}\int_{-1}^{1}dydz\frac{\rho_s\overline{\eta^2}}{2}\left(U_0\frac{\partial \Pi_0}{\partial y}\right)\right]=\int_{-1}^{1}dy\,U_0\rho_s\frac{\overline{v_0\theta_0}}{S}\Big|_0^{z_T} \tag{7.3.27}$$

同样，在 $z=0$ 处，由 (7.3.13c)、(7.3.5) 和 (7.3.24) 式得出，在无摩擦时，

$$\overline{v_0\theta_0}=-\left\{S\frac{\partial \eta_B}{\partial y}-\frac{\partial U_0}{\partial z}\right\}\frac{\partial \overline{\eta^2}/2}{\partial t},\quad z=0\text{处}. \tag{7.3.28}$$

如果暂设 z_T 有限，以使 (7.3.6) 式成立，则在无摩擦时，对自由和刚性上表面均有

$$\overline{v_0\theta_0}=\frac{\partial U_0}{\partial z}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\overline{\eta^2}}{2},\quad z=z_T\text{处}. \tag{7.3.29}$$

于是，无耗散时的波动能量方程可以表示为守恒表达式

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{E(\phi)-\int_0^{z_T}\int_{-1}^{1}dydz\rho_s\frac{\overline{\eta^2}}{2}\left(U_0\frac{\partial \Pi_0}{\partial y}\right)-\int_{-1}^{1}dy\left(\frac{U_0}{S}\frac{\partial U_0}{\partial z}\frac{\rho_s\overline{\eta^2}}{2}\right)_{z=z_T}\right.$$

$$\left.+\int_{1}^{-1}dy\left[U_0\left(S^{-1}\frac{\partial U_0}{\partial z}-\frac{\partial \eta_B}{\partial y}\right)\frac{\rho_s\overline{\eta^2}}{2}\right]_{z=0}\right\}=0. \tag{7.3.30}$$

若 z_T 可以变为无限大，则当垂直切变在无限远处为零或 η 在那里为零时，上式中在 $z=z_T$ 处取值的项为零。

如果 U_0 对扰动场 ϕ 不稳定，则能量 $E(\phi)$ 显然必须随时间增加。同样，在一个发展的扰动中，任一流体线元在 y 方向上的平均平方位移，即均方位移 $\overline{\eta^2}$ 也必须增加。后者是一个很强的要求。根据 (7.3.26) 式，它首先要求经向位涡通量与基本位涡梯度反向。这就是说，波动必须逆基本位涡梯度方向输送位涡。

其次，对于 (7.3.30) 式中 $\overline{\eta^2}$ 项处处为正的运动，$E(\phi)$ 和 $\overline{\eta^2}$ 随时间的增加是不一致的。所以，如果对经向平面内一切 y 和 z 有

$$U_0\frac{\partial \Pi_0}{\partial y}\leqslant 0, \tag{7.3.31a}$$

且

$$U_0\left(S^{-1}\frac{\partial U_0}{\partial z}-\frac{\partial \eta_B}{\partial y}\right)\geqslant 0,\quad z=0\text{处}, \tag{7.3.31b}$$

$$U_0 S^{-1}\frac{\partial U_0}{\partial z}\leqslant 0,\quad z=z_T\text{处}, \tag{7.3.31c}$$

则运动$U_0(y、z)$对无限小扰动是稳定的。因此，上述条件是基本状态稳定的充分条件．这些条件的破坏是它不稳定的必要条件。必须注意，上述条件完全取决于$U_0(y,z)$之特征。

由(7.2.6) 和 (6.5.3)式得

$$S^{-1}\frac{\partial U_0}{\partial z}=-\varepsilon^{-1}\frac{\partial\theta_*/\partial y}{\partial\theta_*/\partial z}=\frac{L}{\varepsilon D}\left(\frac{\partial z_*}{\partial y_*}\right)_{\theta_*}, \tag{7.3.32}$$

式中$(\partial z_*/\partial y_*)_\theta$精确到$O(\varepsilon)$时是基本状态等位温面的坡度。因此边界条件 (7.3.31b,c)都和以边界坡度为基准的基本状态等位温面的坡度成比例。因为η_B与下边界的有量纲的变化有关：

$$\eta_B=\frac{h_B}{\varepsilon D}, \tag{7.3.33}$$

所以，

$$S^{-1}\frac{\partial U_0}{\partial z}-\frac{\partial\eta_B}{\partial y}=\frac{L}{\varepsilon D}\left[\left(\frac{\partial z_*}{\partial y_*}\right)_{\theta_*}-\frac{\partial h_B}{\partial y_*}\right]. \tag{7.3.34}$$

不稳定的另一个稍强的条件，可以直接从条件 (7.2.27)(即在无耗散时$(E_V^{1/2}/\varepsilon\to 0)$，波动对平均运动的影响只是使平均纬向动量重新分布）导出。这个条件可从 (7.2.26) 式和恒等式

$$0=-\int_0^{z_T}\int_{-1}^{1}\frac{\partial}{\partial y}\rho_s\overline{u_0v_0}\,dydz \tag{7.3.35}$$

得到。用 (7.3.21) 式，上式变为

$$0=\int_0^{z_T}\int_{-1}^{1}\rho_s\overline{v_0q}\,dydz-\int_0^{z_T}\int_{-1}^{1}\frac{\partial}{\partial z}\rho_s\frac{\overline{v_0\theta_0}}{S}\,dzdy, \tag{7.3.36}$$

该式再用 (7.3.26)、(7.3.28) 和 (7.3.29) 又可写为

$$0=\int_0^{z_T}\int_{-1}^{1}\rho_s\frac{\partial\Pi_0}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial t}\overline{\eta^2}\right]dydz+\int_{-1}^{1}\left[\frac{\rho_s}{S}\frac{\partial U_0}{\partial z}\frac{\partial}{\partial t}\overline{\eta^2}\right]_{z=z_T}dy$$

$$-\int_{-1}^{1}\left\{\rho_s\left[S^{-1}\frac{\partial U_0}{\partial z}-\frac{\partial\eta_B}{\partial y}\right]\frac{\overline{\partial\eta^2}}{\partial t}\right\}_{z=0}dy=0 \tag{7.3.37}$$

该积分为零是不稳定的必要条件。如同前面已注意到的，在不稳定运动中，原来位于某纬圈上的任何流体线元的均方位移将增加，即$(\partial/\partial t)\overline{\eta^2}>0$.因此，为了满足 (7.3.37)，基本状态必须满足某种严格的条件。例如，考虑等位温面平行于下边界的情况，即在$z=0$处，$(\partial z_*/\partial y_*)_\theta=\partial h_B/\partial y$的情况。在此情况下，(7.3.37) 式中最后一项将为零。其次，设在上边界z_T处（不论有限或无限）$\partial U_0/\partial z$也为零。于是得到不稳定的必要条件是

$$\boxed{\int_0^{z_T}\int_{-1}^{1}dydz\rho_0\frac{\partial\Pi_0}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial t}\overline{\eta^2}\right)=0}\ . \tag{7.3.38}$$

因此，若$\partial\overline{\eta^2}/\partial t$为正，则基本流的位涡梯度必须在经向平面的某些子区域内为正，而在其他地方为负。无摩擦时，水平边界为等位温面的纬向流$U_0(y,z)$不稳定的必要条件是，位涡梯度$\partial\Pi_0/\partial y$在经向横截面的某条曲线上必须为零 (Charney 和 Stern (1962))。不满足这个条件的原始模式情况出现在$\partial\Pi_0/\partial y$等于β的均匀流中。在那种情况下，如6.12节所证明的那样，只可能有稳定的（不增长的）罗斯贝波。

如果 $\partial\Pi_0/\partial y$ 在整个经向剖面上是同号的，那末不稳定（对无粘扰动而言）只能出现在 z_T 或 $z=0$ 处有经向温度梯度的情况下。考虑在 $z=z_T$ 处 $\partial U_0/\partial z=0$ 的情况（其重要例子出现于 $z_T\to\infty$ 和 $(\partial U_0/\partial z)(\infty)=0$ 的时候）。此时，如果 $\partial\Pi_0/\partial y$ 在基本流的整个经向剖面内有同样的符号，则仅当对某个 y 有

$$\left[\left(\frac{\partial z_*}{\partial y_*}\right)_{\theta_*}-\frac{\partial h_B}{\partial y_*}\right]_{z=0}\frac{\partial\Pi_0}{\partial y}>0 \tag{7.3.39}$$

时，才能产生不稳定。如果 $\partial\Pi_0/\partial y$ 为正，即若基本位涡梯度处处与 β 有相同的符号，则不稳定的必要条件要求，在下边界处 θ_* 面向北的坡度大于边界向北的坡度。注意，不论基本状态有效位能或动能数量之多少，足够强的地形坡可以使运动 $U_0(y,z)$ 稳定化。如果 z_T 有限，而且 $z=0$ 处对（7.3.37）式的贡献为零，则代替（7.3.39）的条件是，在 $\partial\Pi_0/\partial y$ 为同号时，对于（$-1,1$）中的某个 y 有

$$\left(\frac{\partial U_0}{\partial z}\right)_{z=z_T}\frac{\partial\Pi_0}{\partial y}<0. \tag{7.3.40}$$

如果确实满足（7.3.37），那末与（7.3.30）式相比可以看出，后者可以表示为

$$\int_0^{z_T}\int_{-1}^{1}dydz\rho_s\left(\frac{\partial\overline{\eta^2}}{\partial t}\right)(U_0-c_0)\frac{\partial\Pi_0}{\partial y}+\int_{-1}^{1}dy\left[(U_0-c_0)\,S^{-1}\frac{\partial U_0}{\partial z}\frac{\partial\overline{\eta^2}}{\partial t}\right]_{z=z_T}$$

$$-\int_{-1}^{1}dy\left[(U_0-c_0)\left\{S^{-1}\frac{\partial U_0}{\partial z}-\frac{\partial\eta_B}{\partial y}\right\}\left(\frac{\partial\overline{\eta^2}}{\partial t}\right)\right]_{z=0}=2\int_0^{z_T}\int_{-1}^{1}dydz\frac{\partial E(\phi)}{\partial t}, \tag{7.3.41}$$

式中 c_0 是任意常数。由（7.3.37）式可知，乘以 c_0 的项的总和恒等于零。考虑 $(\partial U_0/\partial z)(z_T)$ 为零（$z_T\to\infty$ 时也可成立）、而且或者下边界为等位温面，或者下边界处 U_0 与 y 无关的情形。如果前者成立，则 $z=0$ 处的边界项恒等于零。如果后者成立（即若 $z=0$ 处 U_0 与 y 无关），则边界项可以通过令 c_0 等于 $U_0(y,0)$ 而变成零。此时若 $\partial E(\phi)/\partial t>0$，则（7.3.41）式变为

$$\int_0^{z_T}\int_{-1}^{1}dydz\rho_s\left(\frac{\partial\overline{\eta^2}}{\partial t}\right)[U_0(y,z)-U_0(y,0)]\frac{\partial\Pi_0}{\partial y}>0. \tag{7.3.42}$$

所以，除了（7.3.37）所要求的条件之外，（7.3.42）要求，为了产生不稳定，相对于其地面值的纬向速度与位涡经向梯度之乘积必须在某处为正。所以尽管 $\partial\Pi_0/\partial y$ 处处为零时满足（7.3.38）式，但显然不满足（7.3.42）式。

不稳定判据对基本流位涡分布结构的敏感性是极为重要的。虽然（7.3.11）式表明，基本状态的水平切变和水平温度梯度为扰动场提供了有效能量，但这一能量的真正可用性，则取决于扰动场释放这种能量的能力，这种能量释放又必须满足基本的扰动位涡动力学性质。如果不满足不稳定的必要条件（它可直接由位涡动力学性质导出），则基本状态的能量在动力学意义上，对扰动发展是没有用的。

7.4 标准波型

虽然可以通过 7.3 节普遍积分的方法找到稳定性的充分条件，但这些条件只是给出 $U_0(y,z)$ 不稳定的必要条件。如果运动场满足这些必要条件，那末为了证明运动实际上是不稳定的，仍要做具体的计算。此外，只有通过直接计算，才能得到有关不稳定扰动结构的知识（我们知道，这一点本身有重要的地球物理学意义）。

求解扰动问题(7.3.2)的一个很有成效的方法是标准波型法。由于(7.3.2)以及(7.3.5)和(7.3.6)的系数仅取决于 y 和 z，所以可以寻找如下形式的解答：

$$\phi(x,y,z,t)=Re\Phi(y,z)e^{ik(x-ct)}, \tag{7.4.1}$$

式中 Re 表示取其后面表达式的实数部分。为了使 ϕ 对很大的正 x 和负 x 均有限，即，使 ϕ 随经度周期性变化，纬向波数 k 必须是实数。不失一般性，我们可取 k 为正数。但是，振幅函数 Φ 和频率 kc 可以是复数。特别是相速 c 可用其实部和虚部写为：

$$c=c_r+ic_i. \tag{7.4.2}$$

如果找到了 $c_i>0$ 的形如(7.4.1)的解，则 ϕ 将呈指数增长，因为

$$\phi=Re\Phi e^{ik(x-c_rt)}e^{kc_it}. \tag{7.4.3}$$

扰动增长率是 kc_i。当然，在经过一定时间之后，扰动变会增大到使线性理论所忽略的非线性效应变为重要因子的程度。尽管如此，扰动突然增长的可能性，至少在开始阶段上，清楚地显示出基本状态之不稳定，而且不同扰动的相对增长率，对于确定哪种扰动最易发展来说，给出了一个自然的判据。应当注意，解对 x 的周期形式是不失一般性的，因为各种波数可以通过富里叶积分迭加起来表示一个任意扰动。随时间呈指数增长的假定，虽然与方程相容，但不是扰动演变可采取的最普遍形式。呈代数幂的增长或衰减也是可能的。然而，如果找到指数增长解，它们增长的速率将快于任何代数幂之增长率。所以，要是存在(7.4.3)这种形式之解的话，它们就是最恰当的。如果增长率在某个特定波数处有明显的极大值，则解还能自然地解释大气和海洋中实测波动的波状特性。

把(7.4.1)式代入(7.3.2)式和有关的边界条件，可以得到关于 Φ 的标准波型问题：

$$(U_0-c)\left[\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\rho_s}{S}\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}-k^2\Phi\right]+\Phi\frac{\partial\Pi_0}{\partial y}=0, \tag{7.4.4}$$

式中与以前一样，

$$\frac{\partial\Pi_0}{\partial y}=\beta-\frac{\partial^2U_0}{\partial y^2}-\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\rho_s}{S}\frac{\partial U_0}{\partial z}. \tag{7.4.5}$$

由(7.2.12)式，Φ 的边界条件是

$$\Phi=0,\qquad y=\pm1\text{处}, \tag{7.4.6}$$

而在 $z=0$ 处成立的(7.3.5)式变为

$$(U_0-c)\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\left[S\frac{\partial\eta_B}{\partial y}-\frac{\partial U_0}{\partial z}\right]\Phi=i\frac{E_V^{1/2}}{2k\varepsilon}S\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}-k^2\Phi\right]. \tag{7.4.7}$$

若 z_T 有限，则(7.3.6)式适用，它给出 Φ 的条件

$$(U_0-c)\frac{\partial\Phi}{\partial z}-\frac{\partial U_0}{\partial z}\Phi=\begin{cases}-\dfrac{iE_V^{1/2}}{2k\varepsilon}S\left[\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}-k^2\Phi\right] & (\text{刚性}),\\ 0 & (\text{自由}),\end{cases} \tag{7.4.8}$$

该式右端的取值依赖于上表面是刚性表面还是自由表面。若 z_T 无限，则(7.3.7)式成立。现在垂直能通量可以写为

$$\rho_s\overline{\phi w_1}=-\frac{\rho_s}{S}\overline{[Re\Phi e^{ik(x-ct)}]Re\left\{\left[(U_0-c)\frac{\partial\Phi}{\partial z}-\frac{\partial U_0}{\partial z}\Phi\right]ike^{ik(x-ct)}\right\}}. \tag{7.4.9}$$

这是因为对扰动有

$$w_1 S = -\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_0 \frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial U_0}{\partial z}\frac{\partial \phi}{\partial x}\right]. \tag{7.4.10}$$

利用关系式

$$Re(\ \ ) = \frac{(\ \ ) + (\ \ )^*}{2}, \tag{7.4.11}$$

式中 ( )*表示 ( ) 的复共轭，则 (7.4.9) 式就变为

$$\rho_s \overline{\phi w_1} = -\frac{S^{-1}}{4}\rho_s\left[(U_0 - c)\Phi^* \frac{\partial \Phi}{\partial z} - (U_0 - c^*)\Phi \frac{\partial \Phi^*}{\partial z}\right] i k e^{2kc_i t}. \tag{7.4.12}$$

将 (7.4.4) 式乘以 Φ^*,对所得结果稍加运算，再利用 (7.4.12) 式，可得

$$\frac{\partial}{\partial z}\int_{-1}^{1} dy \rho_s \overline{\phi w_1} = -\frac{kc_i}{2}\rho_s\left[S^{-1}\left|\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right|^2 + \left|\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right|^2 + k^2|\Phi|^2\right]e^{2kc_i t} - \frac{\partial U_0}{\partial z}\frac{ik}{4}\frac{\rho_s}{S}$$

$$\times\left[\frac{\partial \Phi}{\partial z}\Phi^* - \Phi\frac{\partial \Phi^*}{\partial z}\right]e^{2kc_i t} - \frac{\partial U_0}{\partial y}\frac{ik}{4}\rho_s\left[\frac{\partial \Phi}{\partial y}\Phi^* - \Phi\frac{\partial \Phi^*}{\partial y}\right]e^{2kc_i t}, \tag{7.4.13}$$

实际上这是用 Φ 表示的扰动能量方程。(7.4.13) 式只不过说明，能通量的散度必须或者由扰动能的局部衰减((7.4.13)式右边第一项)，或者由平均能的局部转换来局部地平衡。这种局部转换与 $\partial U_0/\partial z$ 和 $\partial U_0/\partial y$ 的局部值成比例。考虑对于大的 z 值，U_0 与 y 和 z 无关的情况，在这样的区域，

$$\frac{\partial}{\partial z}\rho_s \overline{\phi w_1} = -\frac{kc_i}{2}\rho_s\left[S^{-1}\left|\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right|^2 + \left|\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right|^2 + k^2|\Phi|^2\right]e^{2kc_i t}, \tag{7.4.14}$$

故对于不稳定扰动，能通量必定随高度减小。但由 (7.4.12) 式

$$\begin{aligned}
\rho_s\int_{-1}^{1}\overline{\phi w_1}\,dy &= -S^{-1}\frac{\rho_s}{4}\left[(U_0 - c)\Phi^*\frac{\partial \Phi}{\partial z} - (U_0 - c^*)\Phi\frac{\partial \Phi^*}{\partial z}\right]e^{2kc_i t} \\
&\leqslant \frac{1}{4}S^{-1}\rho_s\left\{2k|U_0 - c||\Phi|\left|\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right|\right\}e^{2kc_i t} \\
&= \frac{1}{4}S^{-1/2}\rho_s\left\{2|U_0 - c||\Phi k|\left|S^{-1/2}\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right|\right\}e^{2kc_i t} \\
&\leqslant \frac{1}{4}S^{-1/2}\rho_s|U_0 - c|\left\{S^{-1}\left|\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right|^2 + k^2|\Phi|^2\right\}e^{2kc_i t} \\
&\leqslant \frac{1}{4}S^{-1/2}\rho_s|U_0 - c|\left\{S^{-1}\left|\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right|^2 + \left|\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right|^2 + k^2|\Phi|^2\right\}e^{2kc_i t}.
\end{aligned} \tag{7.4.15}$$

所以，(7.4.14)式意味着

$$-\frac{\partial}{\partial z}\rho_s \overline{\phi w_1} \geqslant 2\frac{kc_i S^{1/2}\rho_s}{|U_0 - c|}\overline{\phi w_1}. \tag{7.4.16}$$

从区域之底部 $z = z_1$ 处 (在这里 U_0 与 y、z 无关) 积分给出

$$\rho_s\int_{-1}^{1}\overline{\phi w_1}\,dy = \left[\rho_s\int_{-1}^{1}\overline{\phi w_1}\,dy\right]_{z=z_1}\exp\left(-\int_{z_1}^{z}\frac{2kc_i S^{1/2}}{|U_0 - c|}dz\right) \tag{7.4.17}$$

当 $z\to\infty$ 时，(7.4.17) 式指出，对不稳定波 ($kc_i > 0$)有

$$\lim_{Z\to\infty}\rho_s\int_{-1}^{1}\overline{\phi w_1}\,dy=0. \tag{7.4.18}$$

在没有局部能量制造的情况下，不稳定波的能量增长，必须被有不稳定源的区域中产生的能通量辐合所平衡。由于能通量因乘以局部能量密度而有界，这就使源区以外的能通量呈指数衰减。这一结论的特殊后果是，只要流动以无限大的无扰源区为上界时，就可用较强的条件（7.4.18）代替不等式（7.3.7）。

现在可以把稳定性问题，用以下方式加以陈述。由于扰动方程（7.4.4）和边界条件都是线性齐次的，在所有其他参数固定的情况下，仅对某些 c 值才有非零解。因此复相速 c 是稳定性问题的本征值。如果存在一个与具有正虚部的本征值有关的解，则运动是不稳定的。对于特定的 $U_0(y,z)$，本征值问题的解将给出增长率：

$$kc_i=kc_i\left(k,\ \beta,\ S,\frac{E_V^{1/2}}{\varepsilon}\right), \tag{7.4.19}$$

kc_i 为极大值的那个 k 给出最不稳定波的纬向波数，这个波型将首先从小扰动的背景流场中发展起来，即它最可能达到有限振幅，这至少似乎是合理的。标准波型分析所含的程序，要求计算 $U_0(y,z)$ 不稳定的参数范围，以及增长率对 k 的依赖关系。

7.3节导出的不稳定必要条件也可以直接从（7.4.4）式导出。若 $c_i\neq0$，则（7.4.4）式总可以除以 U_0-c，因为此时 U_0-c 永远不为零。若把得到的方程乘以 $\rho_s\Phi^*$，并在经向剖面上积分，则经过分部积分后，可得在无摩擦情况下，

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}dy\int_{0}^{z_T}dz\,\rho_s\left\{S^{-1}\left|\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|^2+\left|\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right|^2+k^2|\Phi|^2\right\}&=\int_{-1}^{1}dy\int_{0}^{z_T}dz\frac{\rho_s|\Phi|^2}{U_0-c}\frac{\partial\Pi_0}{\partial y}\\&+\int_{-1}^{1}dy\left\{\rho_s S^{-1}\frac{|\Phi|^2}{U_0-c}\frac{\partial U_0}{\partial z}\right\}_{z=z_T}-\int_{-1}^{1}dy\left\{\frac{\rho_s|\Phi|^2}{U_0-c}\left[S^{-1}\frac{\partial U_0}{\partial z}-\frac{\partial\eta_B}{\partial y}\right]\right\}_{z=0},\end{aligned} \tag{7.4.20}$$

若 $z_T\to\infty$，(7.4.18) 式适用，则 $z=z_T$ 处的积分项无贡献。

因为

$$\frac{1}{U_0-c}=\frac{1}{|U_0-c|^2}\{U_0-c_r+ic_i\}, \tag{7.4.21}$$

所以（7.4.20）式的虚部可以写为：

$$\begin{aligned}c_i\Bigg\{&\int_{-1}^{1}dy\int_{0}^{z_T}dz\frac{\rho_s|\Phi|^2}{|U_0-c|^2}\frac{\partial\Pi_0}{\partial y}+\int_{-1}^{1}dy\left[\frac{\rho_s S^{-1}|\Phi|^2}{|U_0-c|^2}\frac{\partial U_0}{\partial z}\right]_{z=z_T}\\&-\int_{-1}^{1}dy\left[\rho_s\frac{|\Phi|^2}{|U_0-c|^2}\left(S^{-1}\frac{\partial U_0}{\partial z}-\frac{\partial\eta_B}{\partial y}\right)\right]_{z=0}\Bigg\}=0.\end{aligned} \tag{7.4.22}$$

如果 c_i 不等于零，即若波型是不稳定的，则与 c_i 相乘的积分一定为零。所得的不稳定条件恰好与（7.3.37）式一样。如果我们记

$$\eta=Re\mathscr{N}(y,z)e^{ik(x-ct)}, \tag{7.4.23}$$

则由（7.3.23）式得

$$\mathscr{N}=\frac{\Phi}{U_0-c}, \tag{7.4.24}$$

或者

$$\overline{\eta^2}=\frac{1}{2}|\mathscr{N}|^2e^{2kc_it}=\frac{1}{2}\frac{|\Phi|^2}{|U_0-c|^2}e^{2kc_it}. \tag{7.4.25}$$

所以

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{\eta^2}=\frac{kc_i|\Phi^2|}{|U_0-c|^2}e^{2kc_it}, \tag{7.4.26}$$

这可使（3.3.37）式直接表示为（7.4.22）式。利用 $c_i\neq0$ 和 c_0 为任意常数的（7.4.22）式，则（7.4.20）式的实部给出

$$\int_{-1}^{1}dy\int_0^{z_T}dz\rho_s\frac{|\Phi|^2}{|U_0-c|^2}(U_0-c_0)\frac{\partial\Pi_0}{\partial y}+\int_{-1}^{1}dy\left[\frac{\rho_s}{S}(U_0-c_0)\frac{|\Phi|^2}{|U_0-c|^2}\frac{\partial U_0}{\partial z}\right]_{z=z_T}$$

$$-\int_{-1}^{1}dy\left\{\rho_s(U_0-c_0)\left[S^{-1}\frac{\partial U_0}{\partial z}-\frac{\partial\eta_B}{\partial y}\right]\frac{|\Phi|^2}{|U_0-c|^2}\right\}_{z=0}$$

$$=\int_{-1}^{1}dy\int_0^{z_T}dz\rho_s\left[S^{-1}\left|\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|^2+\left|\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right|^2+k^2|\Phi|^2\right]>0, \tag{7.4.27}$$

该式与（7.4.26）式一起，等价于条件（7.3.42）。这些不稳定必要条件的意义在上节已讨论过。必须注意，不管我们所考虑的扰动是假设为波状（如本节），还是假设为 7.3 节的一般形式，都得到同样的不稳定条件。

7.5 相速和增长率的范围

对一给定的 $U_0(y,z)$ 计算相速 c_r 和增长率 kc_i，一般是一个困难问题，但在求复本征值以前，能预先了解相速度和增长率的容许范围，是很有用的。

为此可用向北的位移之振幅 $\mathscr{N}$（根据（7.4.24）式，它与 Φ 有关）来改写（7.4.4）式。若把（7.4.24）式代入（7.4.4）式，然后利用（7.4.5）式，我们得到

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[(U_0-c)^2\frac{\partial\mathscr{N}}{\partial y}\right]+\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial}{\partial z}\left[(U_0-c)^2\frac{\rho_s}{S}\frac{\partial\mathscr{N}}{\partial z}\right]-k^2\mathscr{N}(U_0-c)^2$$

$$+\beta\mathscr{N}(U_0-c)=0, \tag{7.5.1}$$

而边界条件变为

$$\mathscr{N}=0,\qquad 在 y=\pm1 处。$$

而且在无摩擦时，

$$(U_0-c)^2\frac{\partial\mathscr{N}}{\partial z}+(U_0-c)S\frac{\partial\eta_B}{\partial y}\mathscr{N}=0,\quad z=0 处。 \tag{7.5.2a}$$

$$\frac{\partial\mathscr{N}}{\partial z}=0,\quad z=z_T 处. \tag{7.5.2b}$$

若把（7.5.1）乘以 $\rho_s\mathscr{N}^*$，且在经向平面上积分，则得

$$\int_0^{z_T}\int_{-1}^{1}(U_0-c)^2\rho_s\left[S^{-1}\left|\frac{\partial\mathscr{N}}{\partial z}\right|^2+\left|\frac{\partial\mathscr{N}}{\partial y}\right|^2+k^2|\mathscr{N}|^2\right]dydz$$

$$=\beta\int_0^{z_T}\int_{-1}^{1}(U_0-c)\rho_s|\mathscr{N}|^2dydz+\int_{-1}^{1}dy(U_0-c)\frac{\partial\eta_B}{\partial y}\{\rho_s|\mathscr{N}|^2\}_{z=0}, \tag{7.5.3}$$

如果 $c_i\neq 0$，则它的虚部给出：

$$\boxed{\int_0^{z_T}\int_{-1}^{1} U_0 p\,dy\,dz=c_r\int_0^{z_T}\int_{-1}^{1} P\,dy\,dz+\frac{\beta}{2}\int_0^{z_T}\int_{-1}^{1} J\,dy\,dz+\int_{-1}^{1} dy\frac{J(y,0)}{2}\frac{\partial\eta_B}{\partial y}},\qquad(7.5.4)$$

式中，

$$P(y,z)=\rho_s\left[S^{-1}\left|\frac{\partial\mathcal{N}}{\partial z}\right|^2+\left|\frac{\partial\mathcal{N}}{\partial y}\right|^2+k^2|\mathcal{N}|^2\right],\qquad(7.5.5)$$

$$J(y,z)=\rho_s|\mathcal{N}|^2.$$

借助于（7.5.4）式，则（7.5.3）式的实部又给出

$$\int_0^{z_T}\int_{-1}^{1} U_0^2 P\,dy\,dz=(c_r^2+c_i^2)\int_0^{z_T}\int_{-1}^{1} P\,dy\,dz+\beta\int_0^{z_T}\int_{-1}^{1} U_0 J\,dy\,dz$$

$$+\int_{-1}^{1} dy J(y,0)\frac{\partial\eta_B}{\partial y}.\qquad(7.5.6)$$

为了充分利用关系式（7.5.4）和（7.5.6），需要先有一些预备结果。任何在 $y=\pm1$ 处为零的函数 $\mathcal{N}$ 可以展开为富里叶级数

$$\mathcal{N}=\sum_{j=0}^{\infty}A_j\cos\left(j+\frac{1}{2}\right)\pi y.\qquad(7.5.7)$$

因此，

$$\frac{\partial\mathcal{N}}{\partial y}=-\sum_{j=0}^{\infty}A_j\pi\left(j+\frac{1}{2}\right)\sin\left(j+\frac{1}{2}\right)\pi y,\qquad(7.5.8)$$

利用 $\sin\left(j+\frac{1}{2}\right)\pi y$ 在区间 $(-1,1)$ 上的正交性，

$$\int_{-1}^{1} dy\left|\frac{\partial\mathcal{N}}{\partial y}\right|^2=\sum_{j=0}^{\infty}|A_j|^2\pi^2\left(j+\frac{1}{2}\right)^2\geqslant\sum_{j=0}^{\infty}\pi^2|A_j|^2/4.\qquad(7.5.9)$$

但因

$$\int_{-1}^{1} dy|\mathcal{N}|^2=\sum_{j=0}^{\infty}|A_j|^2,\qquad(7.5.10)$$

则立即可得

$$\frac{\pi^2}{4}\int_{-1}^{1} dy|\mathcal{N}|^2\leqslant\int_{-1}^{1} dy\left|\frac{\partial\mathcal{N}}{\partial y}\right|^2.\qquad(7.5.11)$$

所以，

$$\int_0^{z_T} dz\int_{-1}^{1} dy P\geqslant\left(k^2+\frac{\pi^2}{4}\right)\int_0^{z_T} dz\int_{-1}^{1} dy J.\qquad(7.5.12)$$

考虑 $\partial\eta_B/\partial y$ 为零（即底边界平坦）的情况，则由（7.5.4）式得

$$c_r=\frac{\int_0^{z_T}\int_{-1}^{1} U_0 P\,dy\,dz}{\int_0^{z_T}\int_{-1}^{1} P\,dy\,dz}-\frac{\beta}{2}\frac{\int_0^{z_T}\int_{-1}^{1} J\,dy\,dz}{\int_0^{z_T}\int_{-1}^{1} P\,dy\,dz}.\qquad(7.5.13)$$

设 U_{MAX} 和 U_{MIN} 是 U_0 在经向平面上的极大值与极小值。使用（7.5.13）式和不等式

(7.5.12),可得

$$\boxed{U_{MIN}-\frac{\beta}{2(\pi^2/4+k^2)}<c_r<U_{MAX}}\ . \tag{7.5.14}$$

所以β平面上纬向流的不稳定无粘扰动的相速实部必定在 (7.5.14) 式给出的范围内。现在考虑显然成立的不等式

$$0\geqslant\int_0^{z_T}\int_{-1}^{1}dydz(U_0-U_{MAX})(U_0-U_{MIN})P=\int_0^{z_T}\int_{-1}^{1}dydz\{U_0^2P-(U_{MAX}-U_{MIN})U_0P+U_{MAX}U_{MIN}P\} \tag{7.5.15}$$

利用 (7.5.4) 和 (7.5.6) 式，该式可以给出，当$\partial\eta_B/\partial y=0$时，

$$0\geqslant[c_r^2-c_r(U_{MAX}+U_{MIN})+c_i^2+U_{MAX}U_{MIN}]\int_0^{z_T}\int_{-1}^{1}dydzP$$

$$+\beta\int_0^{z_T}\int_{-1}^{1}dy\,dz\,J\left\{U_0-\frac{U_{MAX}+U_{MIN}}{2}\right\}. \tag{7.5.16}$$

如果在 (7.5.16) 式最后一个积分中用U_{MIN}代替U_0,容易看出

$$\int_0^{z_T}\int_{-1}^{1}dy\,dz\,J\left\{U_0-\frac{U_{MAX}+U_{MIN}}{2}\right\}\geqslant-\frac{U_{MAX}-U_{MIN}}{2}\int_0^{z_T}\int_{-1}^{1}dydzJ$$

$$\geqslant-\frac{U_{MAX}-U_{MIN}}{2(\pi^2/4+k^2)}\int_0^{z_T}\int_{-1}^{1}dydzP, \tag{7.5.17}$$

所以不等式 (7.5.16) 在除以P在经向平面上的正的定积分后，可改写为

$$\left(\frac{U_{MAX}-U_{MIN}}{2}\right)^2+\frac{\beta}{k^2+\pi^2/4}\left(\frac{U_{MAX}-U_{MIN}}{2}\right)$$

$$\geqslant\left(c_r-\frac{U_{MAX}+U_{MIN}}{2}\right)^2+c_i^2\ . \tag{7.5.18}$$

所以，不稳定波的复相速c必定位于c平面上的一个半圆内，该圆的半径为 (7.5.18) 式左端之平方根，而圆心在实轴的平均速度 $(U_{MAX}+U_{MIN})/2$ 处，如图 7.5.1 所示。但是方程 (7.5.14) 说明，$c_r>U_{MAX}$的小半圆的阴影部分是本征值c不能取值的区域。

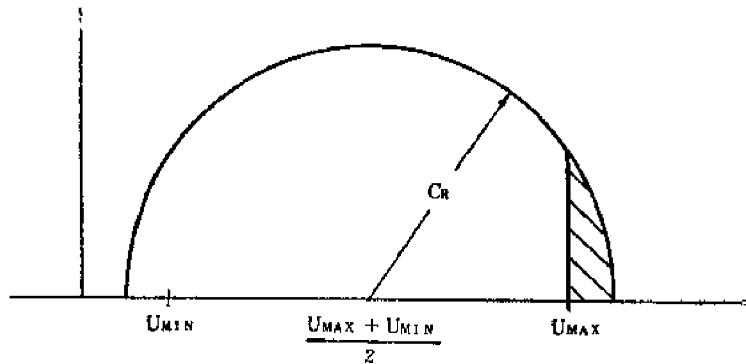


图7.5.1

复速度平面上的半圆，复相速必须位于该半圆内。阴影区是c不能取值之区域。半圆的半径c_R由

$$c_R^2=\left(\frac{U_{MAX}-U_{MIN}}{2}\right)^2+\frac{\beta}{k^2+\pi^2/4}\left(\frac{U_{MAX}-U_{MIN}}{2}\right)$$式给出。

假若β为零，则（7.5.18）式可简化为 Howard (1961) 定理，其中半圆的半径是纬向速度范围之半。注意，

$$c_i^2 \leqslant \left(\frac{U_{MAX}-U_{MIN}}{2}\right)^2 - \frac{\beta}{k^2+\pi^2/4} \frac{U_{MAX}-U_{MIN}}{2}, \tag{7.5.19}$$

所以对$U_{MAX}-U_{MIN}$为零的均匀流，c_i必须为零。

增长率的另一个正界可以利用变换

$$\Phi(y,z)=(U_0-c)^{1/2}\chi(y,z) \tag{7.5.20}$$

而得到。若把上式代入（7.4.4）式，则得

$$\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial}{\partial z}\left[(U_0-c)S^{-1}\rho_s\frac{\partial\chi}{\partial z}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[(U_0-c)\frac{\partial\chi}{\partial y}\right]-k^2(U_0-c)\chi$$
$$-\left[\left(\frac{\partial U_0}{\partial y}\right)^2+S^{-1}\left(\frac{\partial U_0}{\partial z}\right)^2\right]\frac{\chi}{4(U_0-c)}$$
$$+\left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2}+\frac{1}{2\rho_s}\frac{\partial}{\partial z}\left(S^{-1}\rho_s\frac{\partial U_0}{\partial z}\right)+\frac{\partial\pi_0}{\partial y}\right]\chi=0, \tag{7.5.21}$$

边界条件为

$$\chi=0,\quad 在\ y=\pm1处.$$

在没有摩擦时，

$$\begin{aligned}&(U_0-c)\frac{\partial\chi}{\partial z}+\left[S\frac{\partial\eta_B}{\partial y}-\frac{\partial U_0}{\partial z}\right]\chi=0,\quad z=0处,\\&(U_0-c)\frac{\partial\chi}{\partial z}-\frac{\partial U_0}{\partial z}\chi=0,\quad z=z_T处.\end{aligned} \tag{7.5.22}$$

若把（7.5.21）式乘以$\rho_s\chi^*$，然后将乘积在经向平面上积分，则所得结果的虚部给出

$$\int_{-1}^{1}dy\int_0^{z_T}dz\rho_s\left[S^{-1}\left|\frac{\partial\chi}{\partial z}\right|^2+\left|\frac{\partial\chi}{\partial y}\right|^2+k^2|\chi|^2\right]$$
$$=\int_{-1}^{1}dy\int_0^{z_T}dz\left[S^{-1}\left(\frac{\partial U_0}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial U_0}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\rho_s|\chi|^2}{|U_0-c|^2}. \tag{7.5.23}$$

因为

$$|U_0-c|^2\geqslant c_i^2,$$

所以把（7.5.11）式用于函数χ时，（7.5.23）式意味着

$$\boxed{(2kc_i)^2\leqslant\left[\frac{k^2}{k^2+\pi^2/4}\right]\left[S^{-1}\left(\frac{\partial U_0}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial U_0}{\partial y}\right)^2\right]_{MAX}}, \tag{7.5.24}$$

式中下标 MAX 表示括号内的量在经向平面上的极大值。由于$\partial U_0/\partial z=-\partial\Theta_0/\partial y$，因此（7.5.24）式右边最后一个因子中的第一项表示有效位能，而第二项表示在纬向流水平切变中对于扰动的有效动能密度。两种能源之和确定了能量增长率$2kc_i$的界限。值得注意的是，最大增长率随k的减小而减小。纬向波长很长的波动向北的速度小，在经向上输送的热量与动量也较少；如（7.3.11）式所表明的，这对扰动能的增长是一个基本事实。

增长率的最后上限，可以直接从（7.4.27）式导出。当$z=0$和$z=z_T$处的U_0使

(7.4.27) 式中的边界项可以通过审慎地选取 c_0 而变为零时，利用 (7.5.11) 式就可得到

$$(kc_i)^2 \leqslant \left[(U_0-c_0)\frac{\partial \Pi_0}{\partial y}\right]_{MAX} \frac{k^2}{k^2+\pi^2/4} \tag{7.5.25}$$

7.6 斜压不稳定：基本机制

扰动能量方程 (7.3.11) 式揭示出基本流中两个潜在的不稳定能源：U_0 的垂直切变和水平切变。垂直切变意味着水平温度梯度，从而意味着可以通过斜压不稳定过程释放并转换为扰动能量的有效位能之存在。

尽管大气和海洋中的所有流动，都在不同程度上具有水平切变和垂直切变，但是为了有助于讨论问题，我们先来考虑只有一种切变的简单情形。这样做有两个目的。从数学角度来看，假定 U_0 是 y 或 z 的函数，但不同时为二者的函数，可以使方程 (7.4.4) 立刻由一个偏微分方程简化为常微分方程。从物理的角度来看，任意地首先略去一个扰动能源，然后略去另一个扰动能源，能使我们把精力集中于各类能量转换的基本物理特征上。一旦分别完成了这些讨论，就可以对 U_0 同时具有垂直切变和水平切变的复杂问题，作出合理的物理解释。

Charney(1947) 和 Eady(1949) 的开创性研究指出，中纬度大气中出现的扰动，可以解释为纬向风斜压不稳定的一种表现形式。我们先单独研究这类机制。

斜压不稳定机制容易通过 Eady(1949) 首先提出的论证来加以描述。考虑如图 7.6.1 的情形。其中等位温面在经向平面内相对于水平面向上倾斜的角度为 α。这是一种仅由科氏力与倾斜的等 θ 面所表示的水平压力梯度力相平衡的平衡状况。在非旋转流体的运动中，如果初始时等 θ 面倾斜，则它会立即变成水平形状。

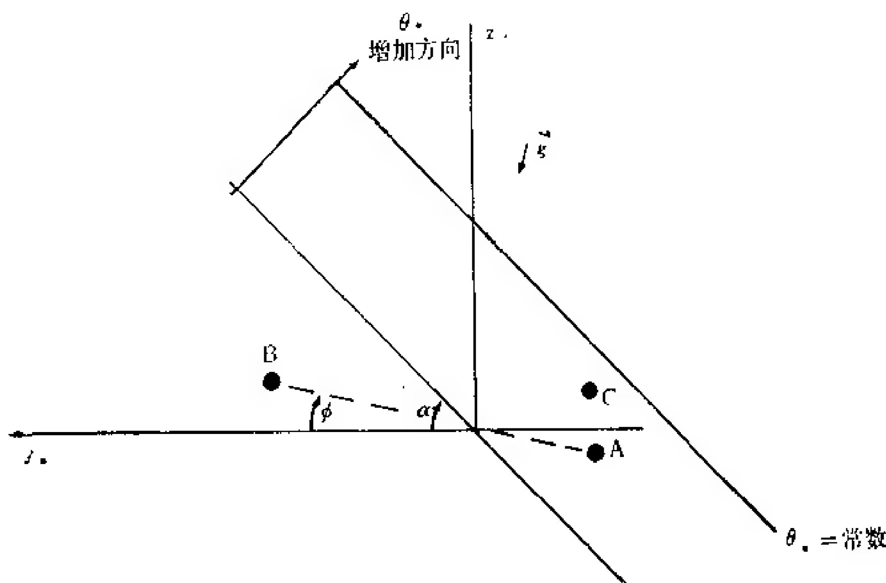


图7.6.1

等位温面相对于水平面的倾斜，张成一个角度为 $\tan^{-1}(\partial z_*/\partial y_*)_\theta$ 的"不稳定楔"。楔内的流体轨迹（如流体元A移动到位置B）将释放有效位能，而处于这类轨迹上的流体元，离开其初始位置后将被加速。

现在考虑图 7.6.1 上的一个流体元从位置A到一个新位置（例如B）的位移。

令流体元在 y 和 z 方向上的有量纲位移，分别是 η_* 和 ζ_*。用 6.4 节的分析方法可知，当流体元 A 移到元 B 的位置上且调整为环境压力时，其密度变化是

$$\Delta\rho_{*A}=\frac{1}{\gamma}\frac{P_{*0}}{R\theta_{*A}}\left\{\frac{p_*}{P_{*0}}\right\}^{1/\gamma}\left\{\frac{\partial p_*}{\partial z_*}\frac{\zeta_*}{P_*}+\frac{\partial p_*}{\partial y_*}\frac{\eta_*}{P_*}\right\}, \tag{7.6.1}$$

其中已假定位温

$$\theta_*=\frac{p_{*0}}{Rp_*}\left(\frac{p_*}{p_{*0}}\right)^{1/\gamma} \tag{7.6.2}$$

在位移中守恒。常数 p_{*0} 是标准气压，通常选为地面上的典型气压值。表达式（7.6.1）是（6.4.3）式稍加推广的形式，后者说明由侧向的气压变化所引起的密度变化。于是，流体元 A 的密度变为

$$\rho_{*A}+\Delta\rho_{*A}=\rho_{*A}+\frac{1}{\gamma}\frac{\rho_{*A}}{p_{*A}}\left\{\zeta_*\left(\frac{\partial p_*}{\partial z_*}\right)_A+\eta_*\left(\frac{\partial p_*}{\partial y_*}\right)_A\right\}, \tag{7.6.3}$$

流体元 B 的密度可以用简单的泰勒展式表示为

$$\rho_{*B}=\rho_{*A}+\left(\frac{\partial\rho_*}{\partial y_*}\right)_A\eta_*+\left(\frac{\partial\rho_*}{\partial z_*}\right)_A\zeta_*, \tag{7.6.4}$$

与未受扰动的流体元 B 的密度相比，流体元 A 增加的密度为

$$\begin{aligned}\rho_{*A}+\Delta\rho_{*A}-\rho_{*B}=\rho_{*A}\Big\{\zeta_*\left[\frac{1}{\gamma P_{*A}}\left(\frac{\partial p_*}{\partial z_*}\right)_A-\frac{1}{\rho_{*A}}\left(\frac{\partial\rho_*}{\partial z_*}\right)_A\right]\\+\eta_*\left[\frac{1}{\gamma p_{*A}}\left(\frac{\partial p_*}{\partial y_*}\right)_A-\frac{1}{\rho_{*A}}\left(\frac{\partial\rho_*}{\partial y_*}\right)_A\right]\Big\}=\rho_{*A}\Big[\frac{\zeta_*}{\theta_{*A}}\frac{\partial\theta_{*A}}{\partial z_*}\\+\frac{\eta_*}{\theta_{*A}}\frac{\partial\theta_{*A}}{\partial y_*}\Big].\end{aligned} \tag{7.6.5}$$

由密度增量所引起的单位质量流体沿位移方向 AB 的恢复力就是

$$E_*=\left(\frac{\rho_{*A}+\Delta\rho_{*A}-\rho_{*B}}{\rho_{*A}}\right)g\sin\phi\ , \tag{7.6.6}$$

式中 ϕ 是由下式定义的位移的角度：

$$\tan\phi=\frac{\zeta_*}{\eta_*}. \tag{7.6.7}$$

因此，利用（7.6.5）式可以把恢复力写为

$$\boxed{E_*=\frac{g}{\theta_*}\frac{\partial\theta_*}{\partial z_*}\sin\phi\left[\zeta_*-\eta_*\left(\frac{\partial z_*}{\partial y_*}\right)_{\theta_*}\right]}, \tag{7.6.8}$$

推导中已使用了恒等式

$$\left(\frac{\partial z_*}{\partial y_*}\right)_{\theta_*}=-\frac{\partial\theta_*/\partial y_*}{\partial\theta_*/\partial z_*}.$$

从（7.6.6）变到（7.6.8）式时，已略去了下标 A，因为恢复力的表达式显然适用于任何流体元的位移。

若位移是垂直方向的（如从 A 到C），则 η_* 为零，$\sin\phi$ 为 1，而且 (7.6.8) 式简化为 (6.4.7) 式。只要 $\partial\theta_*/\partial z_*>0$，这样的位移就产生正的恢复力。实际上，除非流体元的位移使其轨迹满足

$$\boxed{0<\tan\phi<\left(\frac{\partial z_*}{\partial y_*}\right)_{\theta*}}, \tag{7.6.9}$$

否则一切位移都产生一个正的恢复力。如果流体元的位移发生在由水平等位势面和等 θ_* 面定义的楔中，那末E_*是负的，浮力不再作为恢复力而是使流体元从其初始位置起进一步加速。这是斜压不稳定的基本机制，它关键取决于等位温面的坡度，在不可压缩流体中取决于等密度面的坡度。对位于不稳定楔内的轨迹来说，轻流体上升而重流体下沉，释放出基本状态的有效位能。因此斜压不稳定是热力对流的一种形式。

若用 (6.5.3) 式，则精确到罗斯贝数的最低阶时有

$$-\frac{\partial\theta_*/\partial y_*}{\partial\theta_*/\partial z_*}=-\frac{D}{L}\varepsilon F\theta_s\frac{\partial\theta_0/\partial y}{\partial\theta_s/\partial z}. \tag{7.6.10}$$

由于位移方向完全可以用速度分量给出，故有

$$\frac{\zeta_*}{\eta_*}=\frac{w_*}{v_*}=\frac{D}{L}\varepsilon\frac{w_1}{v_0}, \tag{7.6.11}$$

其中用到了 (6.3.12) 式。于是对于不稳定有

$$\left(\frac{\partial z_*}{\partial y_*}\right)_{\theta*}(\tan\phi)^{-1}=\left[-\frac{\partial\theta_0}{\partial y}\frac{v_0}{w_1}\right]S^{-1}>1, \tag{7.6.12}$$

式中根据尺度假定，方括号中的项为 $O(1)$。因此 (7.6.9) 式意味着斜压不稳定要求

$$S=\frac{L_D^2}{L^2}\leqslant O(1), \tag{7.6.13}$$

其中 L 是运动的水平尺度，而 L_D 是罗斯贝变形半径 N_sD/f_0。因此，易于产生斜压不稳定的扰动之长度尺度大于变形半径，而根据 (7.5.24) 和 (7.5.25) 式，在扰动尺度相当大时，有效能量的释放是很慢的。我们可以预料，量级为 L_D 的尺度是斜压不稳定所产生的波动的优选尺度（即最常见的尺度）。这个结论富有启发性地解释了，为什么 $S=O(1)$ 的参数值对大气与海洋的天气尺度运动都如此合适。

当然，以上所描述的位移必须满足位涡动力学。这里的论证只是说明，如果某些轨迹在动力学上是可能的，则平均运动的有效位能将得以释放。

上述结果也可以直接从涡度方程 (6.3.17) 式得出。若将 (6.3.17) 式对由纬向运动 U_0 给出的基本状态线性化，则可得到

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U_0\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right]+\frac{\partial\phi}{\partial x}\left[\beta-\frac{\partial^2U_0}{\partial y^2}\right]=\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial}{\partial z}\rho_sw_1, \tag{7.6.14}$$

式中 w_1 是扰动的垂直速度。把 (7.6.14) 式乘以 $-\rho_s\phi$ 且在经向平面上积分，可得动能

$$K(\phi)=\int_0^{z_T}\int_{-1}^{1}dydz\frac{\rho_s}{2}\left[\overline{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2}+\overline{\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2}\right] \tag{7.6.15}$$

的方程，即分部积分后，若略去摩擦则得

$$\frac{\partial K}{\partial t}=\int_0^{z_T}\int_{-1}^{1}dydz\rho_s\overline{\frac{\partial\phi}{\partial x}\ \frac{\partial\phi}{\partial y}}\ \frac{\partial U_0}{\partial y}+\int_0^{z_T}\int_{-1}^{1}\overline{\rho_s\frac{\partial\phi}{\partial z}w_1}\ dydz. \tag{7.6.16}$$

在无水平切变时，唯一的扰动能源是

$$\int_{-1}^{1}dy\int_0^{z_T}\overline{\rho_s\frac{\partial\phi}{\partial z}w_1}\ dydz=\int_{-1}^{1}\int_0^{z_T}\rho_s\overline{\theta_0w_1}dydz, \tag{7.6.17}$$

式中 θ_0 是扰动位温。所以在没有水平切变时，对流体质量平均来说，仅当暖流体（θ_0 高）上升而冷流体（θ_0 低）下沉时，扰动才能获得动能。

使用关系式

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t}+U_0\frac{\partial}{\partial x}\right)\zeta&=w_1,\\ \left(\frac{\partial}{\partial t}+U_0\frac{\partial}{\partial x}\right)\eta&=v_0,\end{aligned} \tag{7.6.18}$$

可以得出

$$\theta_0=-\eta\frac{\partial\Theta_0}{\partial y}-\zeta S. \tag{7.6.19}$$

故在无水平切变时，

$$\begin{aligned}\frac{\partial K}{\partial t}&=-\int_{-1}^{1}\int_0^{z_T}\rho_s dydz\left\{\overline{w_1\zeta}\,S+\overline{w_1\eta}\,\frac{\partial\Theta_0}{\partial y}\right\}\\ &=-\int_{-1}^{1}\int_0^{z_T}S\,\frac{\rho_s}{2}dydz\frac{\partial}{\partial t}\,\overline{\zeta^2}\left[1+\frac{\overline{w_1\eta}}{\overline{w_1\zeta}}\frac{\partial\Theta_0}{\partial y}S^{-1}\right].\end{aligned} \tag{7.6.20}$$

如图 7.6.1 所示，若 $\partial\Theta_0/\partial y<0$，则不稳定扰动的动能之增加$(\partial/\partial t)\overline{\zeta^2}>0$)，要求在经向平面上至少有某处满足

$$-\frac{\partial\Theta_0}{\partial y}S^{-1}\frac{\overline{w_1\eta}}{\overline{w_1\zeta}}>1. \tag{7.6.21}$$

注意到

$$\frac{\overline{w_1\eta}}{\overline{w_1\zeta}}=O\left(\frac{v_0}{w_1}\right), \tag{7.6.22}$$

则（7.6.21）式实际上和（7.6.12）式是同样的条件。考虑（7.6.16）式所强调的事实是，在没有水平切变时，这里所描述的倾斜热对流是不稳定的唯一能源。虽然 θ_* 的水平梯度意味着基本流的垂直切变，但不存在作用于这一切变上的、与垂直雷诺应力 $\overline{w_*u_*}$ 有关的转换项。这是因为对于准地转运动，w_* 是 $O(\varepsilon)$，因而垂直雷诺应力太弱，以至于不能把有效位能转换为动能。所以与大尺度运动垂直切变相联系的不稳定，必定和位能转换有关。根据以上的论证，这意味着运动尺度的量级是罗斯贝变形半径。在下面几节中将详细讨论几个斜压不稳定的例子。

7.7 伊迪模式

一个能说明斜压不稳定过程的极好的简单模式是 Eady(1949) 提出来的。在该模式中，U_0 与 y 无关，而且水平温度梯度是常数，即

$$U_0 = z. \tag{7.7.1a}$$

因此，

$$\frac{\partial \Theta_0}{\partial y} = -1, \tag{7.7.1b}$$

从而根据（7.6.10）式有

$$\left(\frac{\partial z_*}{\partial y_*}\right)_{\theta_*} = \frac{D}{L}\varepsilon S^{-1}. \tag{7.7.2}$$

S 和 ρ_s 都取为常数，而令 β 等于零，特意略去地球的球形效应。此外，在垂直方向上将运动限于 $z=0$ 和 $z=1$ 处的两个水平刚性边界中。摩擦效应也忽略不计。注意，对于常数 S,（7.7.2）式意味着等位温面的坡度为常数。

由（7.7.1a）和（7.4.5）式可知，对于这种运动，基本状态的位涡梯度恒等于零，即

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial y} = 0, \tag{7.7.3}$$

所以（7.4.4）式变为

$$(z-c)\left\{S^{-1}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - k^2\Phi\right\} = 0. \tag{7.7.4}$$

在 $z=0$ 处，（7.4.7）式成立；当没有摩擦和底边界坡度时，该式变为

$$-c\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \Phi = 0, \tag{7.7.5}$$

而在 $z=1$ 处，（7.4.8）式给出

$$(1-c)\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \Phi = 0. \tag{7.7.6}$$

方程（7.7.4）满足条件（7.4.6）的解可以有如下形式：

$$\Phi(y,z) = A(z)\cos l_n y, \tag{7.7.7}$$

式中，

$$l_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi, \quad n=0,1,2,\cdots\cdots, \tag{7.7.8}$$

且 n 是任意态数。

于是 $A(z)$满足常微分方程

$$(z-c)\left[\frac{d^2A}{dz^2} - \mu^2 A\right] = 0, \tag{7.7.9}$$

其中

$$\mu^2 = (k^2 + l_n^2)S, \tag{7.7.10}$$

边界条件是

$$c\frac{dA}{dz} + A = 0, \quad z=0\text{处}。 \tag{7.7.11a}$$

$$(c-1)\frac{dA}{dz} + A = 0, \quad z=1\text{处}. \tag{7.7.11b}$$

首先考虑 (7.7.9) 式的非奇异解，即那些满足

$$\frac{d^2A}{dz^2}-\mu^2A=0 \tag{7.7.12}$$

的解，而且对于复相速 c 一定满足上式。(7.7.12)的通解可以表示为

$$A(z)=a\cosh\mu z+b\sinh\mu z, \tag{7.7.13}$$

式中 a 和 b 是任意常数。应用(7.7.11a,b) 式，可以得到两个关于 a 和 b 的线性代数方程，即

$$a+\mu bc=0, \tag{7.7.14a}$$

$$a[(c-1)\mu\sinh\mu+\cosh\mu]$$
$$+b[(c-1)\mu\cosh\mu+\sinh\mu]=0. \tag{7.7.14b}$$

仅当 (7.7.14a,b) 中 a 和 b 的系数行列式为零时，才能求得 a 和 b 的非零解。这个条件作为 (7.7.12) 有解的条件给出 c 的二次方程:

$$c^2-c+\mu^{-1}\coth\mu-\mu^{-2}=0, \tag{7.7.15}$$

或

$$c=\frac{1}{2}\pm\left\{\frac{1}{4}+\mu^{-2}-\mu^{-1}\coth\mu\right\}^{1/2} \tag{7.7.16}$$

使用恒等式

$$\coth\mu=\frac{1}{2}\left[\tanh\frac{\mu}{2}+\coth\frac{\mu}{2}\right], \tag{7.7.17}$$

可把 (7.7.16) 改写为

$$\boxed{c=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{\mu}\left[\left(\frac{\mu}{2}-\coth\frac{\mu}{2}\right)\left(\frac{\mu}{2}-\tanh\frac{\mu}{2}\right)\right]^{1/2}}, \tag{7.7.18}$$

对于任何 μ 都有 $\mu/2\geqslant\tanh\mu/2$ 成立，所以当 $\mu/2$ 大于 $\coth\mu/2$ 时，(7.7.18) 式根号中表达式的值为正，c 的两个根均为实数。另一方面，对于使 $\mu/2$ 小于 $\coth\mu/2$ 的那些 μ 值，根号中的值为负，c 是复数。因此 μ 的临界值满足

$$\frac{\mu_c}{2}=\coth\frac{\mu_c}{2}, \tag{7.7.19}$$

其数值为

$$\mu_c=2.3994. \tag{7.7.20}$$

当 $\mu>\mu_c$ 时，对于每个 k 和 n，解由两个中性波组成，每个波都有 (7.7.18) 式的根给出的实相速 c。这些根如图7.7.1(b)所示。当 μ 很大（高波数）时，c 的一个根趋于零，即接近于下边界处的速度，而另一个根趋于1，即接近于上边界处的速度。对于大 μ，第一个解的形式为

$$A(z)\sim e^{-\mu z},\quad 当c\to 0, \tag{7.7.21}$$

而第二个解在 $c\to 1$ 时，其形式为

$$A(z)\sim e^{\mu(z-1)},\quad 当\ c\to 1. \tag{7.7.22}$$

这两个中性波，或者在下边界或者在上边界处被拦截。在上述每一种情况下，相对的那个边界离得很远，以至 Φ 在那里几乎为零，而且 (7.4.22) 式说明，由于 $\partial\Pi_0/\partial y$ 为零，所以若 Φ 在一个边界处为零，则 c_i 也必为零。

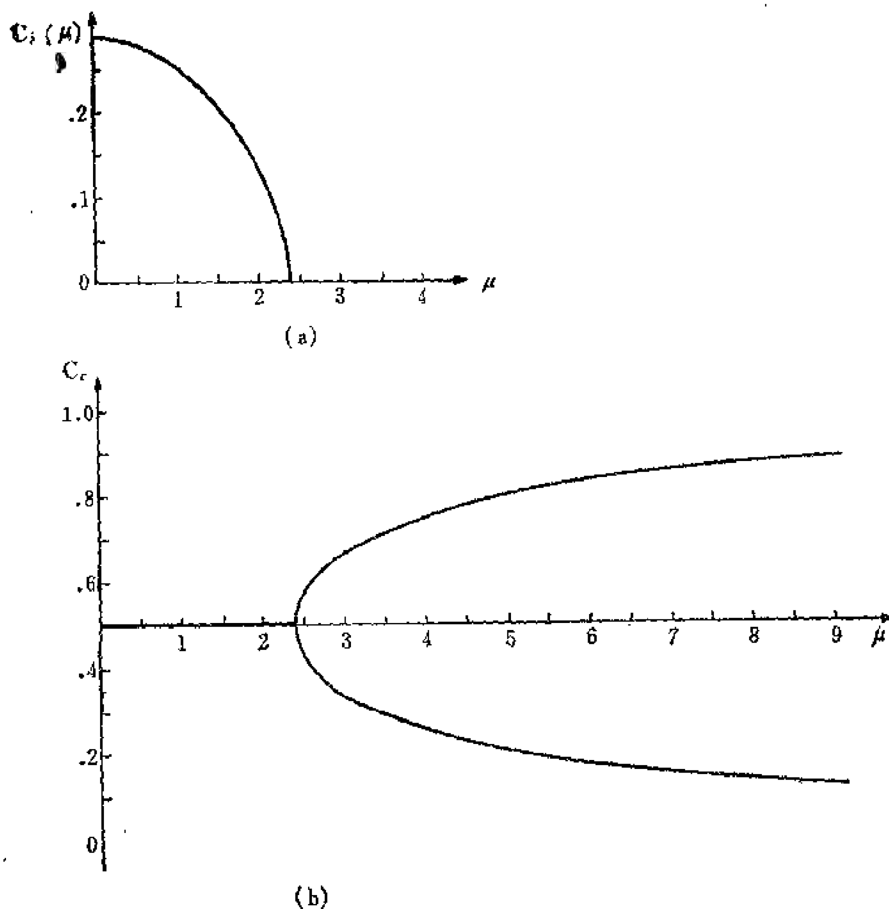


图7.7.1

(a) c 的虚部 c_i 随 $\mu=(k^2+l_n^2)^{1/2}S^{1/2}$ 变化的函数关系。 (b) c 的实部 c_r 随 μ 变化的函数关系；注意在临界波数 μ_c 处的接合。

另一方面，当 $\mu<\mu_c$ 时，(7.7.18) 式给出 c 的两个互为复共轭的根。在无摩擦时，(7.4.4) 式和相应的边界条件的系数，除了含 c 的因子以外均是实数。所以在一般无粘问题中，如果 Φ 是 (7.4.4) 式相应于本征值 c 的解，则对同样的 k 值，Φ^* 也是一个解，只是方程中的 c 由其复共轭 c^* 代替，(7.7.18) 式提供了这种情况的一个例子。当 μ 从大于 μ_c 的值接近 μ_c 时，两个实相速合二为一．当 $\mu<\mu_c$ 时，相速的实部 c_r 由基本流的平均速度给出，即 $c_r=0.5$．图 7.7.1(a) 给出不稳定波($c_i>0$)的 $c_i(\mu)$；另一个根($c_i<0$)和 $c_i>0$ 的根关于 μ 轴对称。由 (7.7.10) 式可知，为了对某些实数 k 值出现不稳定，S 必须满足条件：

$$S<\frac{\mu_c^2}{l_n^2}=4\frac{\mu_c^2}{\pi^2(2n+1)^2}=\frac{2.333}{(2n+1)^2}. \tag{7.7.23}$$

显然，这个不稳定条件对 $n=0$ 的波型最易满足．即在 y 方向上波数最小的波是最不稳定的。除了数字系数以外，(7.7.23) 式可以从讨论斜压不稳定的物理基础的 (7.6.13) 式推出来。不稳定波的增长率是

$$kc_i=\frac{k}{\mu}\left[\left(\coth\frac{\mu}{2}-\frac{\mu}{2}\right)\left(\frac{\mu}{2}-\tanh\frac{\mu}{2}\right)\right]^{1/2}. \tag{7.7.24}$$

对给定的 l_n 和 S 来说，μ 是 k 的函数，所以方程 (7.7.24) 和 (7.7.10) 式共同确定

增长率随波数变化的性质。图 7.7.2(a)给出 $n=0$ 的波（最不稳定波）和 $S=0.25$ 时的增长率。对此 S 值，$L=2L_D$，所以，从 $y=-1$ 到 $y=1$ 的区域侧向范围，相当于长为 $4L_D$ 的有量纲宽度。虽然 $c_i(\mu)$ 的最大值出现在波长很长的波处，但根据（7.5.24）式，当 $k\to 0$ 时，增长率 kc_i 为零。当 k 很大时（此时 $\mu>\mu_c$），增长率为零。在取中等数值（对上述 n 和 S）

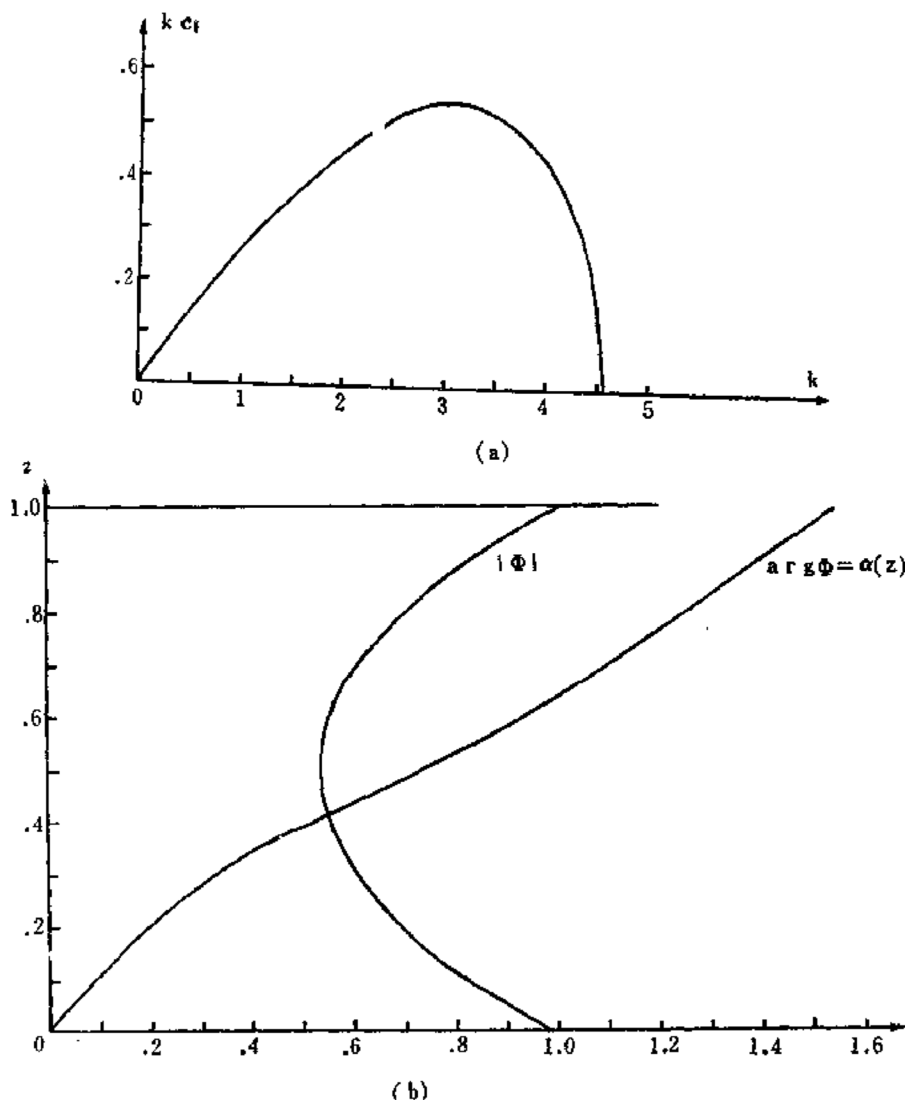


图7.7.2

(a) 对于最不稳定的伊迪波，即对于 $S=0.25$，并与 $\cos\frac{1}{2}\pi y$ 成比例的波的增长率 kc_i。

(b) 最不稳定波的振幅 $|\Phi|$ 和位相 $\alpha(z)$ 随高度的变化。注意，α 随 z 增加表示波动随高度向西倾斜，这又意味着有效位能被扰动所释放。

$$k_m=3.1277 \tag{7.7.25}$$

时，增长率达到其极大值。这个波是最不稳定波。若初始扰动由各种波数之波的迭加组成，而每个波在开始时具有大约同样大小的振幅，则我们可以预料，波数为 k_m 的波将增长最快，并在扰动场结构中起主导作用。因此，把最不稳定波与观测到的不稳定机制所优选的有限振幅扰动联系起来，看来是合理的。对于 $S=0.25$，与波数 k_m 相应的有量纲波长为

$$\lambda_* = \frac{2\pi}{k_m} L = \frac{4\pi}{k_m} L_D = (4.018) L_D. \tag{7.7.26}$$

若 L_D 为 10^3 公里（在大气中），则（7.7.26）式预测波长量级为 4,000 公里的波将是大气波动谱中的优势成分。因而（7.7.26）式预测的四分之一波长（即从波峰到波槽的距离）为 O（1000公里），这个结果与实测的天气尺度大气扰动非常一致，所以对于大气中观测到的瞬变长波之存在来说，斜压不稳定机制看来是最合理的解释。

既然 c 可求得，因而可用（7.7.14a）或（7.7.14b）中任一个方程，通过 a 来确定 b，从而得到不稳定波的结构（且不管常数因子）：

$$A(z) = \cosh\mu z - \frac{\sinh\mu z}{\mu_c}. \tag{7.7.27}$$

解（7.7.27）可乘以一个任意常数。线性理论不能确定扰动的振幅。对于 $\mu < \mu_c$，这又给出

$$\phi = Re\, e^{kc_i t} e^{i(kx-0.5t)} \left[\left(\cosh\mu z - \frac{0.5}{\mu|c|^2} \sinh\mu z \right) + \frac{ic_i \sinh\mu z}{\mu|c|^2} \right] \cos l_n y, \tag{7.7.28a}$$

或者

$$\phi = e^{kc_i t} |\Phi(z)| \cos l_n y \cos\{kx + \alpha(z) - 0.5t\}, \tag{7.7.28b}$$

式中波振幅随高度的分布由下式给出

$$|\Phi(z)| = \left[\left(\cosh\mu z - \frac{0.5\sinh\mu z}{\mu|c|^2} \right)^2 + \frac{c_i^2 \sinh^2\mu z}{\mu^2|c|^4} \right]^{1/2}, \tag{7.7.29}$$

而相角 $\alpha(z)$ 为

$$\alpha(z) = \tan^{-1}\left\{ \frac{c_i \sinh\mu z}{\mu|c|^2\cosh\mu z - 0.5\sinh\mu z} \right\}. \tag{7.7.30}$$

当 $c_i \neq 0$ 时，波动位相随高度改变，并且每一时刻的等位相线满足

$$x = \frac{-\alpha(z)}{k} + 常数. \tag{7.7.31}$$

图7.72(b) 给出最不稳定波的 $|\Phi|$ 和 $\alpha(z)$。注意，由于 α 是 z 的增函数，故等位相线必须随高度西倾（与流动方向相反）。这恰好是能量从平均场向扰动场斜压转换之条件（7.3.17）。从图 7.7.2(b) 上我们看到，$z=0$ 处的波动位相比 $z=1$ 处的波动位相超前约 $\pi/2$ 弧度。也就是说，上层等压面图上的槽脊比地面图上的波动槽脊滞后约90°。振幅 $|\Phi|$ 对于 $z=0.5$ 处的中点几乎是对称的。在 $U_0(z)=c_r$ 的称为引导高度的该点($z=c_r$)处，$|\Phi|$ 达到其极大值。

在任意的 y 和 z 处，向北的热通量是

$$\rho_s \overline{\frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\partial\phi}{\partial z}}.$$

利用（7.7.28b）式，上式可表示为

$$\rho_s \overline{\frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\partial\phi}{\partial z}} = \frac{|\Phi(z)|^2}{2} k \frac{\partial\alpha}{\partial z} \cos^2 l_n y e^{2kc_i t}. \tag{7.7.32}$$

由于 $\partial\alpha/\partial z$ 处处为正，所以热通量总与基本状态温度梯度相反，即方向朝北。水平雷诺应力恒等于零，即

$$\rho_s \overline{\frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\partial\phi}{\partial y}} = 0, \tag{7.7.33}$$

这是因为 u_0 和 v_0 的位相差 90°。对所有与 y 无关的 U_0，必定有此结果。因 $\partial\Pi_0/\partial y$ 恒等于零，故位涡通量也为零，即

$$\overline{v_0 q} = 0, \tag{7.7.34}$$

根据上式和（7.7.33）及（7.3.21）式可知，由（7.7.32）式给出的热通量一定与高度无关。实际上，使用$|\Phi|$和$a(z)$的表达式可以证明对伊迪波（7.7.28b），有

$$\rho_s \overline{v_0 \theta_0} = \rho_s \overline{\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial z}} = \frac{kc_i}{2|c|^2} e^{2kc_i t} \cos^2 l_n y > 0. \tag{7.7.35}$$

对于每个k和n，即对于扰动的每一个水平平面波型，标准波型分析给出z方向上具有实的或虚的c（视μ的大小而定）的两个波型。但是原则上说，对每个k和n可以规定一个具有任意垂直结构的初始扰动。如果标准波型是完备的，那末这种任意扰动可以表示为标准波型之和。从（7.7.13）、（7.7.14）和（7.7.16）得到的两个波型显然是不完备的。我们自然要问，是否已经随意排除了其他一些自由波解？回答是肯定的。在从(7.7.9)式到(7.7.12)式的推导过程中，只得到了（7.7.9）式的非奇异解，即只得到了具有任意阶连续导数的连续解.我们来考虑c是实数的情形。此时由(7.7.9)式可知，也许除了奇点z_c(在这里$z=c$)以外，$A(z)$对所有的z都满足（7.7.12）.所以，如果c是实数且位于（0,1）区间内，则实际上$A(z)$的适当方程是

$$z_c = c\text{处}, \quad \frac{d^2 A}{dz^2} - \mu^2 A = B\delta(z - z_c), \tag{7.7.36}$$

式中B是任意常数，δ是狄拉克δ函数。该式可从以下的普遍事实中得出：若函数$q(z)$满足

$$(z - z_c) q(z) = 0, \tag{7.7.37}$$

则

$$q(z) = B\delta(z - z_c), \tag{7.7.38}$$

（7.7.38）式的意义可由下面的积分极限来理解：

$$\lim_{z_0 \to 0} \int_{z_c - z_0}^{z_c + z_0} q(z) dz = B, \tag{7.7.39}$$

面对所有不等于z_c的z，$q(z)$为零。由（7.7.38）式看出，当$z \neq z_c$时，$(z-z_c)q(z)$显然为零，而

$$\lim_{z_0 \to 0} \int_{z_c - z_0}^{z_c + z_0} (z - z_c) q(z) dz = 0 \cdot B = 0. \tag{7.7.40}$$

前面求出的解相当于选$B=0$. 这些解是标准波，其解给出不稳定的伊迪波。$B \neq 0$的(7.7.36)式的解，只是从扰动位涡在$z-z_c$处具有δ函数奇异性的意义上说，是奇异的。[1]这样的解

---

(1) 可以证明，对区间(0,1)上的任何z_c，使A在$z=z_c$处连续的(7.7.36)式之解是

$$A(z) = \frac{-B[(z_c - 1)\mu \sinh \mu + \cosh \mu]}{(z_c - c_1)(z_c - c_2)\mu^3 \sinh \mu} U(z_<) V(z_>),$$

式中，

$$U(z) = \mu z_c \cosh \mu z - \sinh \mu z,$$

$$V(z) = \frac{(z_c - 1)\mu \cosh \mu + \sinh \mu}{(z_c - 1)\mu \sinh \mu + \cosh \mu} \cosh \mu z - \sinh \mu z,$$

而且

当$z < z_c$时，　$z_< = z$，　$z_> = z_c$，

当$z > z_c$时，　$z_< = z_c$，　$z_> = z$，

而c_1和c_2是(7.7.18)式的两个根。

有无穷多个，每一个都对应于基本速度范围内的一个实数的 c 值。要完全地表示一个任意的初始扰动，必须把这些解加到伊迪波上。由于 z_c 在 (0,1) 之间是连续分布的，所以这些奇异解代表区间 (0,1)上本征值 c 的连续谱。虽然整个解的完备性要求该连续谱，但是连续谱只对应于稳定的波动，这就使我们可以就稳定性问题而论，把注意力集中于前面已得到的标准波型上，此处将不再进一步讨论连续谱的性质。

伊迪模式的某些特点，对应用于大气和海洋来说，是很不实际的。最重要的是模式中缺少内部的位涡梯度，特别是没有行星涡度梯度。在伊迪模式中 $\partial\Pi_0/\partial y$ 恒等于零，所以 (7.4.22) 式表明，对伊迪不稳定来说，$z=z_T$ 处刚性边界的存在是十分重要的。当 $z_T\to\infty$ 时，(7.4.22) 和 (7.7.23) 式都表明 c_i 趋于零。虽然伊迪波说明了不稳定的基本特征，但是可以预料，反映出位涡动力学约束的不稳定波的具体结构，在有环境位涡梯度存在时，可能有很大的改变。

7.8 恰尼模式和临界层

Charney(1947) 提出了一个比较逼真的斜压不稳定模式。虽然该模式保留了伊迪模式的几个简化特点(例如，U_0 与 y 无关，忽略粘性效应，垂直切变为常数)，但它引进了某些重要而逼真的动力学要素。特别是考虑了 β 效应，所以在流体内部，环境位涡梯度影响流体元的运动。此外，因旨在应用于大气，所以 Charney 取无量纲密度标高

$$h^{-1}=-\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial\rho_s}{\partial z}\tag{7.8.1}$$

为有限值。为使数学处理简单，h 和 S 均取为常数。基本状态的纬向速度是

$$U_0=\lambda z,\tag{7.8.2}$$

故 λ 是垂直切变的无量纲量度。U_0 可以加上一个任意常数而不影响分析。用 (7.8.2) 式，标准波型方程 (7.4.4) 变为

$$(\lambda z-c)\left[\frac{1}{S}\frac{d^2A}{dz^2}-\frac{h^{-1}}{S}\frac{dA}{dz}-\mu^2A\right]+\frac{\partial\Pi_0}{dy}A=0,\tag{7.8.3}$$

其中求出满足边条件 (7.4.6) 的解，其形式为

$$\Phi(y,z)=A(z)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi y,\ n=0,1,2\cdots\cdots.\tag{7.8.4}$$

波数 μ 由下式给出：

$$\mu^2=\left[k^2+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2\right],\tag{7.8.5}$$

而且

$$\frac{\partial\Pi_0}{\partial y}=\beta+\frac{\lambda}{hS}.\tag{7.8.6}$$

非零的基本位涡梯度的存在，对扰动动力学有非常大的影响。如 (7.4.22) 式所示，非零的 $\partial\Pi_0/\partial y$ 使得在 $z=z_T$ 处没有边界或 $z=z_T$ 处没有温度梯度的情况下仍可发生不稳定。若 $\partial\Pi_0/\partial y$ 到处为正(如在(7.8.6)式中设 $\lambda>0$)，则在下边界有水平温度梯度时，只要 $\partial U_0/\partial z$ 大于 $\partial\eta_B/\partial y$，就可以发生不稳定。这使上边界被移到无穷远处——实际上这就是恰尼模式中的情况。还有一个重要的事实是，当 $\partial\Pi_0/\partial y\neq0$ 时，(7.8.3) 式在 z_c 点是奇异的，在该

点处，

$$U_0(z_c)=c,\tag{7.8.7}$$

这对（7.8.2）式来说，就是

$$z_c=\frac{c}{\lambda}.\tag{7.8.8}$$

果如 c_i 为正，即对发展的扰动，微分方程的奇异性只出现在复的 z 值，因此，在该问题的有物理意义的区间 $z>0$ 且为实数时，没有奇点。尽管如此，在 z 的复平面上考虑的奇异性对扰动的物理结构和数学结构都有重要的意义。特别是对很小的 c_i 或中性波，若 c_r 位于 U_0 的范围内，则奇异性将有非常大的影响。由（7.8.7）式定义的 z_c 点是（7.4.4）的临界点，而 $z=z_c$ 则称为临界高度，与它紧邻的区域叫临界层。当 c 为实数时，若 c 处于 U_0 的范围内，则临界点位于 z 的范围内，而当 c_i 很小且 c_r 处于 U_0 的范围内时（象在伊迪模式中那样），扰动结构中的临界层是明显的。

这个事实可用几种方法说明。当 U_0 只是 z 的函数时，（7.4.4）式的通解可以借助富罗比尼方法，用 $z=z_c$ 点附近的推广的幂级数展开式得到。该通解可以表示为两个独立解：

$$A_1(z)=(z-z_c)[1+a_1(z-z_c)+a_2(z-z_c)^2+\cdots\cdots]\tag{7.8.9}$$

与

$$A_2(z)=A_1(z)\left[\frac{(\partial\Pi_0/\partial y)(z_c)}{(\partial U_0/\partial z)(z_c)}\right]\log(z-z_c)$$
$$-[1+b_1(z-z_c)+b_2(z-z_c)^2+\cdots\cdots]\tag{7.8.10}$$

之和，式中 a_n 和 b_n 取决于 U_0、ρ_s 和 S 在 z_c 点附近的具体分布。但值得注意的一个关键问题是，除非 $\partial\Pi_0/\partial y$ 在 $z=z_c$ 处为零，否则 $A_2(z)$ 在 $z=z_c$ 处有一个对数奇点。如果象恰尼模式那样，$(\partial\Pi_0/\partial y)(z_c)$ 不为零，那末（7.8.10）中的对数项是解的主要部分。当然，对数函数是多值函数：

$$\log(z-z_c)=\log|z-z_c|+i\alpha,\tag{7.8.11}$$

其中我们已写

$$z-z_c=|z-z_c|e^{i\alpha}.\tag{7.8.12}$$

考虑 c_i 略大于零的情形。如图 7.8.1 所示，点 $z=z_c$ 在 z 的复平面上略高于实轴。为了使解（7.8.10）有物理意义，必须选对数函数的一支。使对数取单值所要求的切口，应选得当 $c_i>0$ 时不妨碍实轴，后者是有物理意义的区域。现在考虑实轴上紧靠临界点左侧的一个点。

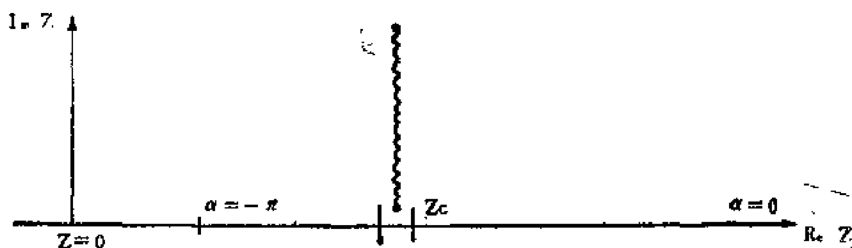


图7.8.1　在 z 的复平面上点 z_c 处稳定性方程的奇异性。若 $c_i>0$，z_c 点的位置略高于实轴。

在该点处，α 非常接近 $-\pi$，而且当所考虑的点穿过临界层向 $z>z_c$ 运动时，α 突然变为零，位相穿过临界层突然变化的物理意义，从（7.7.32）式可以看出。在该式中，我们看到向北的热通量直接与 α 随 z 变化的快慢成比例。对于 c_r 位于 U_0 范围内的所有情况，在运动区域内有位相变化，有随之发生的热通量，因此有有效位能的释放。这意味着一个相当费解的结果：可以预期 β 效应在有切变存在时引入了新的不稳定波型之可能性，但只有 β 效应而无切变时（如罗斯贝波之表现），它是一个稳定的恢复机制。显然，若 c 是实数（中性波）时，一般说来它必位于 U_0 的范围之外，否则由 $\log(z-z_c)$ 引入的复数，不能被 $z=0$ 处边界条件的任何其他项所抵消。

Bretherton(1966) 用有助于我们理解的物理术语，对这种数学考虑作了另一种描述。把（7.3.21）式在经向平面上积分，得到

$$\int_0^{z_T} dz \int_{-1}^{1} dy\, \rho_s \overline{v_0 q} = \int_{-1}^{1} \left[\rho_s \frac{\overline{v_0\theta_0}}{S} \right]_{z=z_T} dy - \int_{-1}^{1} \left[\rho_s \frac{\overline{v_0\theta_0}}{S} \right]_{z=0} dy, \qquad (7.8.13)$$

所以位涡的经向通量必须由 $z=0$ 处和（或）$z=z_T$ 处的热通量平衡。由（7.3.26）式，

$$\overline{v_0 q} = -\left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\overline{\eta^2}}{2} \right) \frac{\partial \Pi_0}{\partial y}, \qquad (7.8.14a)$$

若 $\partial \Pi_0/\partial y>0$，则位涡通量对不稳定波是负的，所以必须由下边界处正的热通量或上边界处负的热通量来平衡。因为从（7.3.28）式和（7.3.29）式有

$$(\overline{v_0\theta_0})_{z=z_T} = \left(\frac{\partial U_0}{\partial z} \right)_{z=z_T} \frac{\partial \overline{\eta^2}/2}{\partial t}, \qquad (7.8.14b)$$

$$(\overline{v_0\theta_0})_{z=0} = \left(\frac{\partial U_0}{\partial z} - S \frac{\partial \eta_B}{\partial y} \right)_{z=0} \frac{\partial \overline{\eta^2}/2}{\partial t}, \qquad (7.8.14c)$$

所以若 $\partial U_0/\partial z>0$，则位涡通量必须由下边界处正的热通量平衡。这实际上是（7.4.22）式所反映的意义。其次由（7.4.26）式得

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\overline{\eta^2}}{2} = \frac{kc_i |\Phi|^2}{2|U_0-c|^2} e^{2kc_i t} = \frac{kc_i}{2} \left\{ \frac{|\Phi|^2 e^{2kc_i t}}{(U_0-c_r)^2+c_i^2} \right\}, \qquad (7.8.15)$$

对于 $kc_i>0$，该式为正。现在考虑 c_i 很小的扰动。当 $c_i \to 0$ 时，除了在 U_0-c_r 为零的临界高度以外，$(\partial/\partial t)\overline{\eta^2}$ 将对其他所有的 z 都为零。在临界高度处，流体元的 $(\partial/\partial t)\overline{\eta^2}$ 无限增长，仅在该高度处产生位涡通量。把（7.8.15）式在穿过临界高度的一个小邻域上积分，则当 $c_i \to 0$ 时，

$$\int_{z_c^-}^{z_c^+} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\overline{\eta^2}}{2} dz = \lim_{c_i\to 0} \int_{z_c^-}^{z_c^+} \frac{kc_i}{2} \frac{|\Phi|^2 e^{2kc_i t}}{(U_0-c_r)^2+c_i^2} dz = Re \lim_{c_i\to 0} \int_{z_c^-}^{z_c^+} \frac{k|\Phi|^2 e^{2kc_i t}}{2i(U_0-c)} dz$$

$$= Re \lim_{c_i\to 0} \int_{z_c^-}^{z_c^+} \frac{k|\Phi|^2 \left(\frac{\partial U_0}{\partial z}(z_c) \right)^{-1}}{2i(z-z_c)} dz. \qquad (7.8.16)$$

所以根据留数计算，绕过 $z=z_c$ 处奇点的积分如图 7.8.2 所示，当 $c_i \to 0$ 时，它给出

$$\int_{z_c^-}^{z_c^+} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\overline{\eta^2}}{2} \right) dz = \frac{\pi k}{2} \frac{|\Phi(z_c)|^2}{(dU_0/dz)(z_c)} + O(c_i \log c_i). \qquad (7.8.17)$$

故对很小的 c_i，积分的位涡通量完全归因于临界高度处的通量，而且由（7.8.13）式，它为

$$\int_0^{z_T} dz \int_{-1}^{1} dy \rho_s \overline{v_0 q} = -\frac{\pi k}{2}\int_{-1}^{1} dy \frac{|\Phi(z_c)|^2}{(\partial U_0/\partial z)_{z=z_c}} \frac{\partial \Pi_0}{\partial y}. \qquad (7.8.18)$$



图7.8.2 （7.8.16）式的积分路径在 $c_i>0$ 时，经过 z_c 下方，当 $c_i\to 0$ 时该路径等价于如图所示的凹线。

但是当 $c_i\to 0$ 时，$z=0$ 和 $z=z_T$ 处的热通量均为零，这违背（7.8.13）式，所以，除非在临界高度处 $\partial\Pi_0/\partial y$ 为零，否则不可能有使 c 位于 U_0 范围内的稳定的标准波。在 $c_i\to 0$ 的极限时，在 z_c 周围的狭区内，非零位涡通量的存在（由（7.3.21）式）意味着与 c_i 大小无关的热通量的局部飞跃，它在其他地方未被补偿，必然导致位能的释放。因此和以前一样，我们得出的结论是，流体内区非零位涡梯度的存在，使得在 U_0 范围内具有临界层的波动减稳。现在我们把注意力转到（7.8.3）式提出的特殊问题上。根据（7.4.7）式，在没有摩擦和地形坡度时，$z=0$ 处的边界条件在现在的情况下是

$$-c\frac{dA}{dz}-\lambda A=0, \quad z=0, \qquad (7.8.19)$$

而且可以证明，对于其他边界条件只要要求，$z\to\infty$ 时，$\rho_s|A|^2$ 保持有界即可。A 的方程可以通过变换

$$A(z)=\left(z-\frac{c}{\lambda}\right)e^{\nu z}F\left(z-\frac{c}{\lambda}\right) \qquad (7.8.20)$$

而简化为标准型，其中

$$\nu=\frac{1}{2h}-\frac{1}{2[h^{-2}+4S\mu^2]^{1/2}}. \qquad (7.8.21)$$

线性因子是受（7.8.9）式的启发而得到的，而指数因子则反映了当 z 很大时波动的结构，在大 z 处，对于固定的 $\partial\Pi_0/\partial y$，扰动位涡必须趋于零。把（7.8.20）式代入（7.8.3）式可以得到 $F(z-c/\lambda)$ 满足

$$\xi\frac{d^2F}{d\xi^2}+(z-\xi)\frac{dF}{d\xi}-(1-r)F=0, \qquad (7.8.22)$$

式中

$$r=\frac{\beta S/\lambda+h^{-1}}{[4S\mu^2+h^{-2}]^{1/2}}, \qquad (7.8.23)$$

而 ξ 是一个新变量，其定义为

$$\xi=\left(z-\frac{c}{\lambda}\right)[h^{-2}+4S\mu^2]^{1/2}. \qquad (7.8.24)$$

（7.8.19）式在下边界处适用，当它用 F 和 ξ 来表示时变为

$$\text{在}\xi=\xi_0=-\frac{c}{\lambda}(h^{-2}+4S\mu^2)^{1/2}\text{处}, \quad \xi_0^2\left[\frac{dF}{d\xi}-\frac{a_1-\frac{1}{2}}{2a_1}F\right]=0, \qquad (7.8.25)$$

式中

$$a_1=\frac{1}{2}[1+4S\mu^2h^2]^{1/2}.$$

方程（7.8.22）是合流超几何方程，其通解可以写为（Abromowitz 和 Stegun,1964）

$$F(\xi)=c_1M(a,2,\xi)+c_2U(a,2,\xi), \tag{7.8.26}$$

式中 c_1 和 c_2 是任意常数，而

$$a=1-r, \tag{7.8.27}$$

M 和 U 的定义如下：

$$M(a,2,\xi)=1+\frac{a\xi}{2}+\frac{a(a+1)\xi^2}{2\times3\times2!}+\cdots\cdots+\frac{(a)_n\xi^n}{(2)_n n!}+\cdots\cdots$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(a)_m\xi^m}{(2)_m m!}, \tag{7.8.28}$$

式中对任意数 b 有

$$(b)_n=b(b+1)(b+2)\cdots\cdots(b+n-1);\quad (b)_0=1. \tag{7.8.29}$$

当 r 不是正整数时，第二个解 $U(\xi)$ 可以写为

$$\Gamma(a)U(a,2,\xi)=\frac{1}{\xi}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+m)[\log\xi+\psi(a+m)-\psi(1+m)-\psi(2+m)]}{\Gamma(a-1)m!(m+1)!}\xi^m, \tag{7.8.30}$$

式中 $\Gamma(x)$ 是伽玛函数，定义为

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty}t^{x-1}e^{-t}dt. \tag{7.8.31}$$

对整数 x，它可化为阶乘函数，即

$$\Gamma(n)=(n-1)!,$$

（7.8.30）式中的函数 $\psi(x)$ 是 $\Gamma(x)$ 的对数导数，即

$$\psi(x)=\frac{d}{dx}\log\Gamma(x). \tag{7.8.32}$$

对于很大的 ξ，M 和 U 有如下的渐近性质：

$$M(a,2,\xi)\sim\frac{2\xi^{a-2}}{\Gamma(a)}e^{\xi}, \tag{7.8.33a}$$

$$U(a,2,\xi)\sim\xi^{-a}. \tag{7.8.33b}$$

故根据（7.8.20）式，对于很大的 ξ 或 z，函数 $M(a,2,\xi)$ 会给出

$$A(z)\sim(z-c/\lambda)^{-(r+1)}\exp\left\{\left[-\frac{1}{2h}+\frac{1}{2h}(1+4Sh^2\mu^2)^{1/2}\right](z-c\lambda)\right\}, \tag{7.8.34}$$

这必须舍弃。所以当 r 不是整数时，（7.8.26）式中的 c_1 必须选为零，且 $F(\xi)$ 的形式为 $U(a,2,\xi)$. 另一方面，当 r 是正整数时，$M(a,2,\xi)$ 的级数为有限项，变为 $r-1$ 阶多项式，故 $M(a,2,\xi)$ 对所有 ξ 都是可取的解。对整数 r 必须重新定义第二个解．可以证明，对很大的 z，它引起 A 的指数增长，因而必须舍弃；在这里不予给出。于是，$F(\xi)$ 为

$$F(\xi)=\begin{cases}c_1M(a,2,\xi), & r=n,\\ c_2U(a,2,\xi), & r\neq n,\end{cases}$$

式中 n 是任意大于零的整数。

首先考虑对于整数 r 的解。最简单的解对应于 $r=1$，即 $a=0$ 的情况，故

$$F(z)=M(0,2,\xi)=1, \tag{7.8.35}$$

所以 $A(z)$ 具有简单的形式：

$$A(z)=\left(z-\frac{c}{\lambda}\right)e^{\nu z}, \tag{7.8.36}$$

式中 ν 由(7.8.21)式给出。然而 $r=1$ 的条件要求切变参数 λ 和总波数 $\mu=\left(k^2+\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi^2\right)^{1/2}$ 之间有特殊关系，即

$$\mu^2=\frac{\beta^2 S}{4\lambda^2}+\frac{\beta}{2h\lambda}. \tag{7.8.37}$$

该式用有量纲的单位表示，则为

$$k_*^2=\frac{\beta_0^2 N_s^2}{4f_0^2(\partial U_{0*}/\partial z_*)^2}+\frac{\beta_0}{2(\partial U_{0*}/\partial z_*)h_*}-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\frac{\pi^2}{L^2}, \tag{7.8.38}$$

式中

$$h_*^{-1}=-\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial\rho_s}{\partial z_*}. \tag{7.8.39}$$

对于很大的 L 和 h_*，这给出波动的特征纬向尺度：

$$k_*^{-1}=\frac{2f_0\partial U_{0*}/\partial z_*}{\beta_0 N_s}. \tag{7.8.40}$$

若 $\partial U_{0*}/\partial z_*$ 为 2米/秒·公里，$N_s=2\times10^{-1}$/秒，则该式给出的尺度是 1,000 公里。这个水平尺度确定了 $A(z)$ 的特征垂直尺度，因为现在由（7.8.21）式和（7.8.37）式得

$$\nu=\frac{1}{2h}-\frac{1}{2}\left[h^{-2}+\frac{\beta^2 S^2}{\lambda^2}-\frac{2\beta S}{\lambda h}\right]^{1/2}=-\frac{\beta S}{2\lambda}, \tag{7.8.41}$$

它给出波动的有量纲的垂直尺度：

$$d_*=\frac{D}{\nu}\sim\frac{D\lambda}{S\beta}=\frac{1}{\beta_0}\left(\frac{dU_*}{dz_*}\right)\frac{f_0^2}{N_s^2}, \tag{7.8.42}$$

对前面引用的参数值，其量级为 O(5 公里)。

r 的较大的整数值给出 A 的较高阶的多项式解。每个多项式有 $r-1$ 个节点。例如对于 $r=2$ 有

$$F(\xi)=1-\frac{\xi}{2}, \tag{7.8.43}$$

它在 $\xi=2$ 处有一个节点。每个本征波型的结构，随整数 r 的增加，在垂直方向上变得更为复杂。由（7.8.23）式看出，对于给定的波长，r 较高的解对应于较小的垂直切变值。在 $\lambda\mu$ 平面上，$r=1,2$ 和 3 的等值线如图 7.8.3 所示。注意，

$$\frac{\lambda}{\beta Sh}=\frac{1}{\beta_0 h_*}\frac{\partial U_*}{\partial z_*}\frac{f_0^2}{N_s^2},$$

以及

$$\mu S^{1/2}h=\mu_*\frac{N_s}{f_0}h_*,$$

这里 h_* 是有量纲的密度标高，μ_* 是有量纲的全波数，即 $\mu_*=\mu/L$。对于所有的 $r>1$；若 $h^{-1}\neq 0$，则等 r 线与 $\mu=0$ 轴的截距是有限的。所以对于固定的垂直切变值，若 $h^{-1}\neq 0$，则只有有限个波数能给出 $F(\xi)$ 的多项式解。

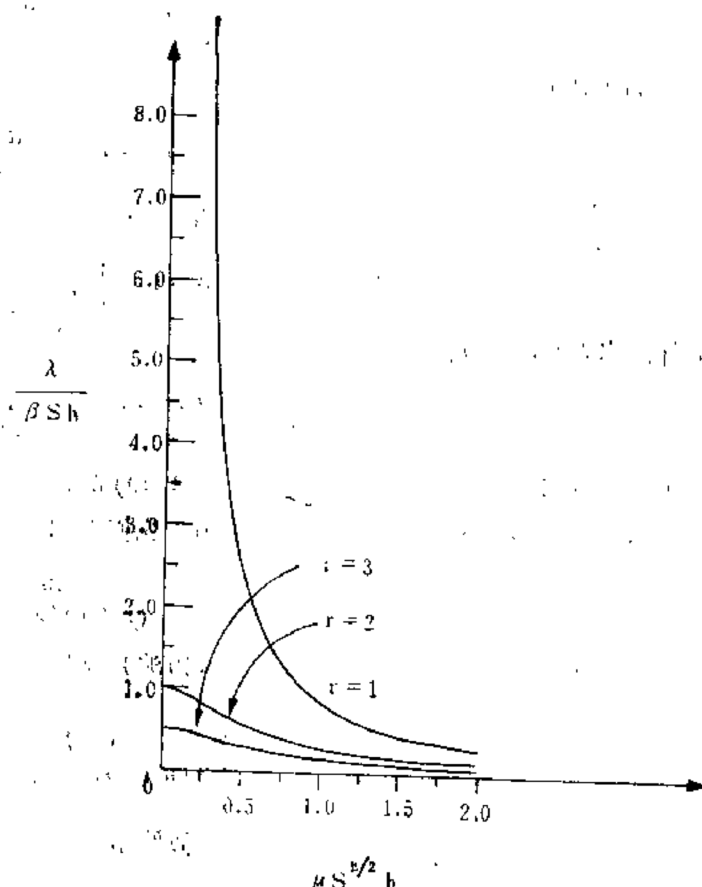


图7.8.3 $\lambda\mu$ 平面上整数 r 的曲线。

在这些曲线上 c_i 为零。注意，

$$\frac{\lambda}{\beta S h}=\frac{1}{\beta_0 h_*}\ \frac{\partial U_*}{\partial z_*}\ \frac{f_0^2}{N_s^2},$$

而 $\mu S^{1/2} h=\mu_*(N_s/f_0)h_*$，其中 h_* 是有量纲的密度标高，μ_* 是有量纲的全波数 μ/L，$\partial U_*/\partial z_*$ 是有量纲的垂直切变。因子

$$\frac{1}{\beta_0 h_*}\ \frac{\partial U_*}{\partial z_*}\ \frac{f_0^2}{N_s^2}$$

是垂直切变造成的位涡梯度与行星涡度梯度之比。

为了使上述多项式解是容许的标准波型，它们必须满足(7.8.25)式。例如对于 $r=1$，(7.8.25)式变为

$$\xi_0^2\left[\alpha_1-\frac{1}{2}\right]=0. \qquad (7.8.44)$$

既然 α_1 总大于1/2，所以上式意味着 ξ_0 必定为零，或者对于 $r=1$ 有

$$c=0. \qquad (7.8.45)$$

同样可以证明，对于所有的整数 r，c 或者必须为零（U_0 的极小值），或者必须为负数，即在 U_0 的范围以外，且相对于地面速度后退。所以，图7.8.3上每条整数 r 的曲线都对应于中性稳定的曲线，即在这些曲线上的波扰动不增长。简单的多项式解随高度没有位相变化，不能释放基本状态中的有效位能。最初以为整数 r 的曲线，尤其是曲线 $r=1$，代表稳定波和不稳定波之间的参数边界，所以图7.8.3或许意味着每一波数达到不稳定时所需切变之最小值。但情况并非如此，Burger(1962)最先指出，除了整数 r 的曲线以外，整个 $\lambda\mu$ 平面上的运动都是不稳定的。在每条整数 r 的曲线两侧，c_i 均不为零。这个非常微妙的结果可以直接用 Miles(1964a)最先给出的论证加以证明。

考虑 r 的非整数值，使得 $U(a,2,\xi)$ 是 $F(\xi)$ 的合理的解，但选 r 在整数 $n+1$ 附近，使得

$$1-r=a=-n+O(\varepsilon), \qquad (7.8.46)$$

为方便起见，用关系式

$$\varepsilon=-\frac{1}{\pi}\tan\pi a \qquad (7.8.47)$$

定义 ε。参数 ε 可正可负。现考虑在整数曲线上选择的接近零的 c（从而 ξ_0）值。既然 $\Gamma(x)$ 在负整数处有极点，所以（7.8.30）式中的 $\psi(a)$ 项当 $\varepsilon\to 0$ 时变为奇异项。特别是恒等式

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin \pi x} \tag{7.8.48}$$

使我们可把 $\psi(x)$ 写为

$$\psi(x)=\psi(1-x)-\frac{\pi}{\tan \pi x}. \tag{7.8.49}$$

在 $\xi=0$ 附近，（7.8.30）式中的主要项当 $\varepsilon\to 0$ 时由 ξ^{-1} 项以及该和中的第一项得出：

$$F(\xi)\sim\frac{1}{\xi}+\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-1)}\psi(a)\sim\frac{1}{\xi}+\frac{a-1}{\xi}\sim\frac{1}{\xi}-\frac{n+1}{\varepsilon}, \tag{7.8.50}$$

同样，当 $\xi\to 0,\varepsilon\to 0$ 时有

$$\frac{dF}{d\xi}\sim-\frac{1}{\xi^2}+\frac{1}{2}\frac{a(a-1)}{\varepsilon}=-\frac{1}{\xi^2}+\frac{n(n+1)}{2\varepsilon}, \tag{7.8.51}$$

这里为了得到（7.8.51）式，必须保留(7.8.30)式中 $m=1$ 的项。把(7.8.50)式和(7.8.51)式代入（7.8.25）式，且只保留最低阶项，我们得到

$$\xi_0^2=c^2\frac{4\alpha_1^2}{\lambda^2h^2}=\frac{2\varepsilon}{(n+1)(2a_1+n)}. \tag{7.8.52}$$

从（7.8.47）式可知，紧靠整数曲线左（短波）侧处 ε 为负，所以 ξ_0 和 c 是纯虚数，例如

$$\boxed{\frac{c_i}{\lambda}=\left(\frac{h}{2a_1}\right)\frac{(2\varepsilon)^{1/2}}{[(n+1)(2a_1+n)]^{1/2}}}. \tag{7.8.53}$$

另一方面，在每条整数曲线右侧，这一近似给出纯实数 c，例如

$$\xi_0=\pm\frac{(2\varepsilon)^{1/2}}{[(n+1)(2a_1+n)]^{1/2}}. \tag{7.8.54}$$

为了完成对 $\varepsilon>0$ 的论证，我们要注意，若在（7.8.54）式中选 ξ_0 的负根（即 $c_r>0$），则（7.8.30）式中 $\log\xi$ 项将在（7.8.25）式中产生一个小的复数项，因为当 ξ_0 为负时，

$$\log\xi_0=\log|\xi_0|-i\pi.$$

当保留含 log 项的这一高阶修正量时，（7.8.52）式在 $\varepsilon>0$ 时变为

$$\xi_0^2=\frac{2\varepsilon}{(n+1)(2a_1+n)}[1+i\varepsilon\pi]. \tag{7.8.55}$$

所以对于 $\varepsilon>0$，ξ_0 为负实数的根在第一近似上变为

$$\xi_0=-\frac{(2\varepsilon)^{1/2}}{\sqrt{(n+1)(2a_1+n)}}\left[1+i\varepsilon\frac{\pi}{2}\right]-c\frac{2a_1}{\lambda h} \tag{7.8.56}$$

所以，c_r 和 c_i 都是很小的正数。临界层现在处于运动区域内，且扰动是弱增长的，$c_i=O(\varepsilon^{3/2})$。注意，这种不稳定的产生是因为 c 在第一近似上是实数，且位于 U_0 范围内，所以现在有临界层。其次，（7.8.18）式以后的考虑成立，给出一个稍不稳定的波动。因为在（7.8.53）式（$\varepsilon<0$）和（7.8.56）式（$\varepsilon>0$）中 c_i 都是 n 的减函数，所以我们可以得出，主要的不稳定是与 $r=1(n=0)$ 的波型相联系的。尤其是在图 7.8.3 上，$r=1$ 的曲线左侧的参数区表现出较强的不稳定：$c_i\sim\varepsilon^{1/2}$，而曲线的长波一侧与此相反，在那里 $c_i\sim\varepsilon^{3/2}$，郭晓

岚对于 $h\to\infty$ 的极限情况下的标准波型问题，即对密度标高远大于（7.8.42）式给出的扰动垂直尺度的情况，作了详细计算。在该极限情况下，当 $a_1\to\infty$ 时，（7.8.25）式变为

$$\xi_0^2\left[\frac{dF}{d\xi}-\frac{1}{2}F\right]=0,\quad \xi=\xi_0\text{处}. \tag{7.8.57}$$

在关于 F 的问题中，唯一的参数是 r，因此 ξ_0 的根只是 r 的函数。图 7.8.4 给出郭的结果，使用了记号：

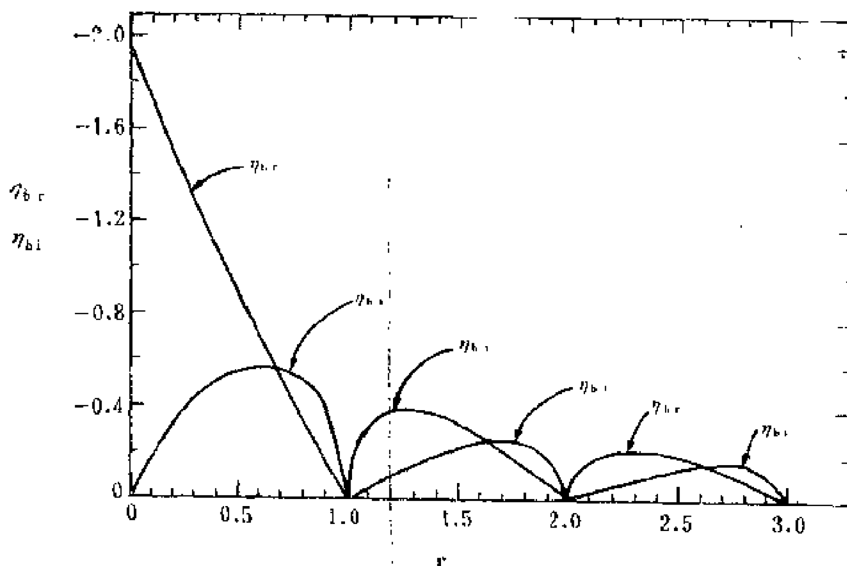


图7.8.4 郭(1973)所计算的c的实部和虚部。$\eta_{br}=Re\xi_0, \eta_{bi}=Im\xi_0$，式中$\xi_0=(-c/\lambda)(h^{-2}+4S\mu^2)^{1/2}$.

$$\eta_{br}=Re\xi_0,\quad \eta_{bi}=In\xi_0 \tag{7.8.58}$$

对于很大的 h，由（7.8.25）式得

$$-\xi_0=2\frac{c}{\lambda}\mu S, \tag{7.8.59}$$

所以频率和增长率分别与 $-\eta_{br}$ 和 $-\eta_{bi}$ 成正比。注意，在图 7.8.4 中，实际上最大增长率出现在 $r\sim0.55$ 的区域，而且从一个不稳定范围到另一个不稳定范围的过渡，出现在 r 的整数值上。如所预料的那样，具有较复杂垂直结构的、n 值较高的模态，其相应的增长率较低。

图 7.8.5 给出郭晓岚计算的最不稳定波的结构。甚至对这个波数最小的模态，其 z 方向结构也是复杂的，反映出波动在地面附近的增强，注意，波位相随高度增加；为了释放有效位能，这是必需的。

恰尼模式中的能量转换机制与伊迪模式相同，即由倾斜的对流释放有效位能。然而，基本位涡梯度的引进，强烈地影响了流体源的运动，产生了新的不稳定波型。在这种不稳定波型中，位涡梯度具有我们熟知的阻滞波型传播速度的作用。在恰尼模式中，不稳定波的相速度，非常接近于纬向气流的最小速度，而不象伊迪模式那样接近于纬向气流之平均速度。

有些遗憾的是，引进哪怕是比伊迪模式稍微逼真一些的模式，都会产生一些难点和分析上的微妙之处，因为还要深入考虑许多问题，如考虑摩擦、水平切变，较真实的垂直切变和非线性作用等，才能逼近于我们所希望达到的实际。为了讨论上述几种有明显物理意义的附

加特征，需要有一个比恰尼模式简单得多而又保留了位涡梯度之影响的模式。考虑不稳定的多层模式，可以达到上述目的。多层模式预先对运动场垂直结构的复杂性作了限制，因此多层模式滤去了通常与弱不稳定有关的垂直结构复杂的波型，使问题大为简化，而且易于考虑较复杂的物理效应。

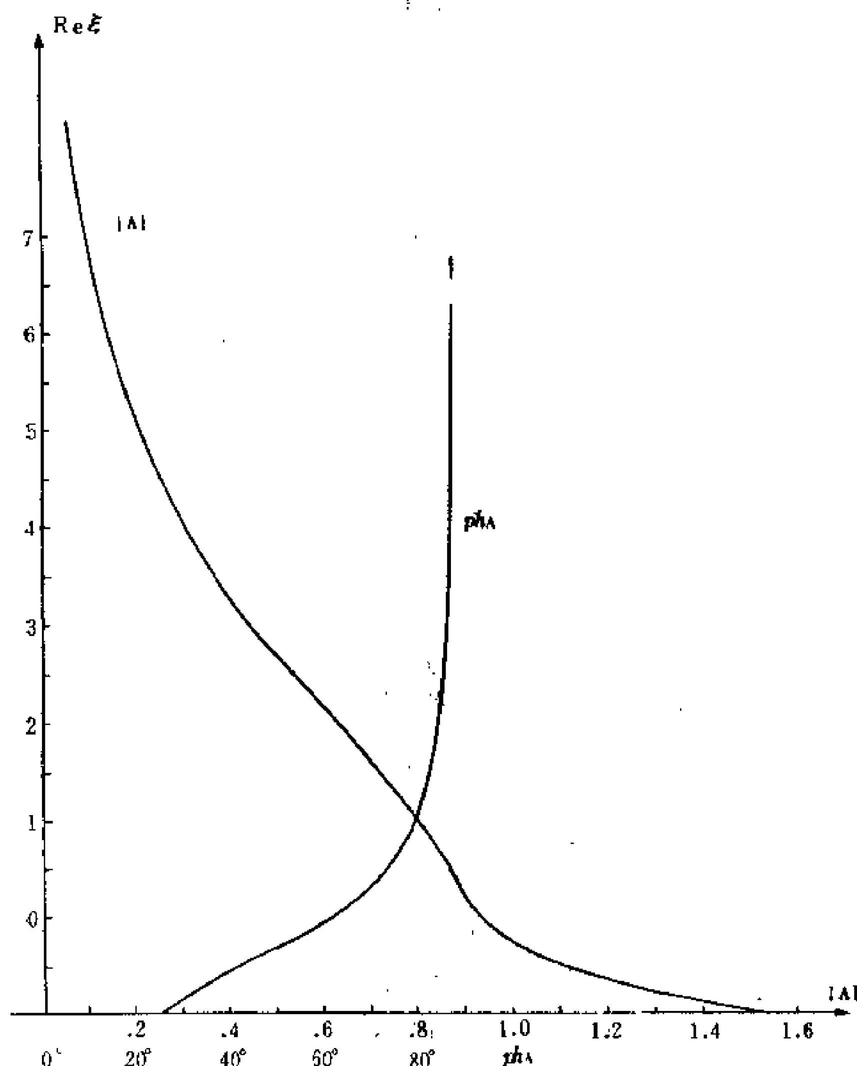


图7.8.5 最不稳定波（即在 $r=0.5$ 处）的振幅与位相。(郭晓岚，1973)

7.9 两层模式的不稳定：问题的提出

(6.16) 节描写的两层模式给运动不稳定性之研究，提供了一个有用而简单的模式，该模式通过限制扰动的垂直尺度，滤去了垂直尺度很小的波动。

在无摩擦和底地形时，两层模式的运动方程是 (6.16.34a,b)，它可改写为更简明的形式：

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial\psi_n}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial\psi_n}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right]\left[\nabla^2\psi_n-F_n(-1)^n(\psi_2-\psi_1)+\beta y\right]=0,\ n=1,2,\tag{7.9.1}$$

式中

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{7.9.2}$$

每层上的流函数与深度无关。关键参数是

$$\beta=\beta_0\frac{L^2}{U}, \tag{7.9.3}$$

$$F_n=\frac{f_0^2L^2}{g[(\rho_2-\rho_1)/\rho_0]D_n}.$$

下标是指层的标号；上层对应于 $n=1$，下层为 $n=2$。

考虑基本气流

$$\psi_n=\Psi_n(y), \tag{7.9.4}$$

它对应于纯纬向气流

$$U_n(y)=-\frac{\partial\Psi_n}{\partial y}. \tag{7.9.5}$$

如果 $U_1(y)\neq U_2(y)$，则两层之间的界面是倾斜的，因为根据（6.16.36）式有

$$\frac{\partial h_2}{\partial y}=\frac{\varepsilon D_2}{D}F_2[U_1-U_2]. \tag{7.9.6}$$

对扰动来说，倾斜内界面是一个有效位能源，而 $U_n(y)$ 的水平切变则是一个动能源。令 $\phi_n(x,y,t)$ 为扰动流函数，则

$$\psi_n=\Psi_n(y)+\phi_n(x,y,t). \tag{7.9.7}$$

将它代入（7.9.1）式得

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+U_n\frac{\partial}{\partial x}\right]q_n+\frac{\partial\phi_n}{\partial x}\frac{\partial\Pi_n}{\partial y}+\left[\frac{\partial\phi_n}{\partial x}\frac{\partial q_n}{\partial y}-\frac{\partial\phi_n}{\partial y}\frac{\partial q_n}{\partial x}\right]=0. \tag{7.9.8}$$

这里的扰动位涡 q_n 是

$$q_n=\nabla^2\phi_n-F_n(-1)^n(\phi_2-\phi_1), \tag{7.9.9}$$

而基本状态的位涡梯度是

$$\frac{\partial\Pi_n}{\partial y}=\beta-\frac{\partial^2U_n}{\partial y^2}-F_n(-1)^n(U_1-U_2). \tag{7.9.10}$$

在（7.9.8）式中略去 $O(\phi_n^2)$ 的项，得到线性稳定性问题：

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+U_n\frac{\partial}{\partial x}\right]q_n+\frac{\partial\phi_n}{\partial x}\frac{\partial\Pi_n}{\partial y}=0. \tag{7.9.11a}$$

和连续层结模式一样，线性扰动的侧边界条件是

$$\frac{\partial\phi_n}{\partial x}=0,\quad y=\pm1\text{ 处}. \tag{7.9.11b}$$

把（7.9.11a）乘以 $-(D_n/D)\phi_n$，并对 y 积分，然后把两层的方程相加，可得到扰动能量方程：

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-1}^{1}dy\left\{\frac{d_1}{2}\left[\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial y}\right)^2\right]+\frac{d_2}{2}\left[\left(\frac{\partial\phi_2}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi_2}{\partial y}\right)^2\right]\right.$$

$$+\frac{\overline{(\phi_1-\phi_2)^2}}{2}F_0\Big\}=\int_{-1}^{1}dy\Big\{d_1\overline{\frac{\partial\phi_1}{\partial x}\ \frac{\partial\phi_1}{\partial y}}\ \frac{\partial U_1}{\partial y}+d_2\overline{\frac{\partial\phi_2}{\partial x}\ \frac{\partial\phi_2}{\partial y}}\ \frac{\partial U_2}{\partial y}$$

$$+F_0(U_1-U_2)\overline{\frac{\partial\phi_2}{\partial x}\phi_1}\Big\}, \tag{7.9.12}$$

式中

$$d_n=D_n/D,$$

$$F_0=\frac{f_0^2L^2}{g[(\rho_2-\rho_1)/\rho_0]D}, \tag{7.9.13}$$

而上横线指在空间扰动场 x 方向一个波长上的平均值。

(7.9.12) 式的物理意义和 (7.3.11) 式类似，即各层动能（以其相对厚度为权重）之和加上扰动有效位能$(F_0/2)\ \overline{(\phi_1-\phi_2)^2}$的变化率，是由各层中作用于基本流水平切变上的雷诺应力与有效位能的转换之和所产生的。使用 (6.16.36) 式，可以把上式最后一项改写为更清楚的形式：

$$F_0(U_1-U_2)\overline{\frac{\partial\phi^2}{\partial x}\phi_1}=-\left[\varepsilon^{-1}\frac{\partial\bar{h}_2}{\partial y}\right][\overline{v^2(\phi_1-\phi_2)}]=-\varepsilon^{-2}\left[\frac{\partial\bar{h}_2}{\partial y}\right]\frac{\overline{v^2h_2'}}{F_0}$$

$$=-\varepsilon^{-2}\frac{\partial\bar{h}_2}{\partial y}\left[\frac{\overline{v_1h_2'}}{F_0}\right], \tag{7.9.14}$$

式中 $\bar{h}_2$ 和 h_2' 分别是基本场和扰动场的分界面高度。所以位能转换就是乘以基本状态界面坡度的界面高度的经向通量。因此，从动力学意义上说，分界面高度类似于连续模式中的位温场。作为练习，留给读者自己证明：与 (7.2.13) 式类似，在每一层中有

$$\frac{\partial\bar{u}_n}{\partial t}=\bar{v}_n^{(1)}-\frac{\partial}{\partial y}\overline{v_nu_n}, \tag{7.9.15a}$$

式中上标(1)表示对 x 平均的 v 是非地转运动。同样，对 (6.16.20a) 取 x 平均得

$$F_0\frac{\partial}{\partial t}\bar{\eta}_2=\bar{w}_2^{(1)}-F_0\frac{\partial}{\partial y}\overline{v_2\eta_2}, \tag{7.9.15b}$$

根据 (6.6.16) 式，其中

$$\overline{v_2\eta_2}=\overline{\frac{\partial\phi_2}{\partial x}(\phi_2-\phi_1)}=\overline{\frac{\partial\phi_1}{\partial x}(\phi_2-\phi_1)}=\overline{v_1\eta_2}. \tag{7.9.16}$$

根据 (6.16.13) 式，这里的 η_2 与 h_2 有关。

由每层连续方程的垂直积分得

$$d_1\frac{\partial\bar{v}_1^{(1)}}{\partial y}=\bar{w}_2^{(1)}, \tag{7.9.17a}$$

$$d_2\frac{\partial\bar{v}_2^{(1)}}{\partial y}=-\bar{w}_2^{(1)}, \tag{7.9.17b}$$

式中 $\bar{w}_2^{(1)}$ 是分界面处对 x 平均的垂直速度，可以得出，对 x 平均的位涡满足：

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left[-\frac{\partial\bar{u}_1}{\partial y}+F_1\bar{\eta}_2\right]&=\frac{\partial^2}{\partial y^2}\overline{u_1v_1}-F_1\frac{\partial}{\partial y}\overline{v_1\eta_2},\\ \frac{\partial}{\partial t}\left[-\frac{\partial\bar{u}_2}{\partial y}-F_2\bar{\eta}_2\right]&=\frac{\partial^2}{\partial y^2}\overline{u_2v_2}+F_2\frac{\partial}{\partial y}\overline{v_2\eta_2},\end{aligned} \tag{7.9.18}$$

这是与（7.2.22）式类似的两层模式之表达式。各层扰动位涡通量是

$$\overline{v_n q_n} = \overline{v_n\left[\frac{\partial^2\phi_n}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi_n}{\partial y^2}-F_n(-1)^n(\phi_2-\phi_1)\right]}; \tag{7.9.19}$$

所以

$$\begin{aligned}\overline{v_1 q_1} &= -\left[\frac{\partial}{\partial y}\overline{u_1 v_1} - F_1\overline{v_1\eta_2}\right],\\ \overline{v_2 q_2} &= -\left[\frac{\partial}{\partial y}\overline{u_2 v_2} + F_2\overline{v_2\eta_2}\right].\end{aligned} \tag{7.9.20}$$

故（7.9.18）式相当于表示，平均位涡的变化完全是由扰动位涡通量产生的，即

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{q}_n = -\frac{\partial}{\partial y}\overline{v_n q_n}. \tag{7.9.21}$$

平均纬向运动变化的一个特别重要的关系式可由两层相加得到，即

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\sum_{n=1}^{2} d_n\bar{u}_n\right] = -\frac{\partial}{\partial y}\sum_{n=1}^{2}\overline{u_n v_n}\,d_n, \tag{7.9.22}$$

这是因为根据质量守恒有

$$\sum_{n=1}^{2} d_n\,\bar{v}_n^{(1)} = 0.$$

利用（7.9.20）式我们得到

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left[\sum_{n=1}^{2} d_n\bar{u}_n\right] = \sum_{n=1}^{2} d_n\,\overline{v_n q_n}}. \tag{7.9.23}$$

因此，在任一纬度处，垂直求和的纬向运动之变化，可以完全用扰动位涡的调整通量（即对x平均的通量）来表示。对于（7.9.11a）成立的线性扰动，可以得出，

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\sum_{n=1}^{2} d_n\bar{u}_n\right] = -\frac{\partial}{\partial t}\sum_{n=1}^{2}\frac{d_n\overline{q}_n^2}{\partial\Pi_n/\partial y}. \tag{7.9.24}$$

于是，如 Held(1975) 所指出，若对于给定的y值，基本位涡梯度在两层中符号相同，则不稳定扰动（对它们来说正的确定量$\overline{q}_n^2$必随t增加）必定导致垂直平均纬向气流与基本位涡梯度反号的变化。

7.10 两层模式中的标准波型：不稳定的必要条件

可以寻找方程（7.9.11a）的形如

$$\phi_n = Re\,\Phi_n(y)e^{ik(x-ct)} \tag{7.10.1}$$

的标准波型解。把它代入（7.9.11a）式，得到关于Φ_n的两个联立常微分方程，即

$$(U_1-c)\left[\frac{d^2\Phi_1}{dy^2}-k^2\Phi_1-F_1(\Phi_1-\Phi_2)\right]+\Phi_1\frac{\partial\Pi_1}{\partial y}=0, \tag{7.10.2a}$$

$$(U_2-c)\left[\frac{d^2\Phi_2}{dy^2}-k^2\Phi_2-F_2(\Phi_2-\Phi_1)\right]+\Phi_2\frac{\partial\Pi_2}{\partial y}=0, \tag{7.10.2b}$$

根据（7.9.10）式，式中

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial y}=\beta-\frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2}+F_1(U_1-U_2), \tag{7.10.3a}$$

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial y}=\beta-\frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2}+F_2(U_2-U_1), \tag{7.10.3b}$$

函数 Φ_n 必须满足边界条件 (7.9.11b)，对于非零的 k，它为

$$y=\pm 1\text{处}, \quad \Phi_n=0, \quad n=1,2, \tag{7.10.3c}$$

从两层模式得到的主要数学简化是，用联立的常微分方程，代替了偏微分方程 (7.4.4)，后者是从连续层结模式中得到的。不稳定的波型，对应于它的相应本征值 c 有正虚部的那些本征解 $\Phi_n, n=1,2$。由于 (7.10.2a,b) 式的系数是实数，与本征值 c 相应的解 Φ_n 意味着存在一个本征值为 c_* 的复共轭解 Φ_n^*。所以在无粘问题中，若 $c_i\neq 0$ 的波型是可能的，则一定存在不稳定波。

把 (7.10.2a,b) 分别乘以 $[\Phi_1/(U_1-c)]d_1$ 和 $[\Phi_2/(U_2-c)]d_2$，则可以导出不稳定的必要条件。事实上，若把所得的方程对 y 从 -1 到 $+1$ 积分，然后将结果相加，我们得

$$\sum_{n=1}^{2}\int_{-1}^{1}dy\left\{\left|\frac{\partial \Phi_n}{\partial y}\right|^2+k^2|\Phi_n|^2\right\}d_n+F_0\int_{-1}^{1}dy|\Phi_1-\Phi_2|^2$$

$$=\sum_{n=1}^{2}\int_{-1}^{1}dy d_n\frac{|\Phi_n|^2}{U_n-c}\frac{\partial \Pi_n}{\partial y}. \tag{7.10.4}$$

(7.10.4) 式的实部和虚部必须分别为零。(7.10.4) 的虚部为零给出

$$\boxed{c_i\sum_{n=1}^{2}d_n\int_{-1}^{1}dy\frac{|\Phi_n|^2}{|U_n-c|^2}\frac{\partial \Pi_n}{\partial y}=0}. \tag{7.10.5}$$

如果 c_i 不为零，即若波型是不稳定的，则基本状态的位涡梯度必须在有的地方为正，有的地方为负，但不要求 $\partial\Pi_n/\partial y$ 在区间 $(-1,1)$ 上的所有 y 处均为零。相反地，如果位涡梯度在一层中为正，而在另一层中为负，则也可以满足 (7.10.5) 式。容易看出，多层模式和连续模式有一个重要区别。从 (7.10.3a,b) 可以看到，若 β 大到使 $\partial\Pi_1/\partial y$ 和 $\partial\Pi_2/\partial y$ 都为正值的程度，则运动肯定是稳定的。在 Charney 的斜压不稳定模式中，没有不稳定所要求的垂直切变的临界值。而滤掉了小垂直尺度的扰动之两层模式，却必须引进一个不稳定的最小临界切变。可以直接把此临界切变解释为一个判据，即若特定垂直尺度的波型为不稳定波，则需要有某个临界切变。

利用 (7.10.5) 式后，(7.10.4) 式的实部给出

$$\sum_{n=1}^{2}d_n\int_{-1}^{1}dy\left[U_n\frac{\partial \Pi_n}{\partial y}\frac{|\Phi_n|^2}{|U_n-c|^2}\right]=\sum_{n=1}^{2}d_n\int_{-1}^{1}\left[\left|\frac{\partial}{\partial y}\Phi_n\right|^2+k^2|\Phi_n|^2\right]dy$$

$$+F_0\int_{-1}^{1}dy|\Phi_1-\Phi_2|^2>0, \tag{7.10.6}$$

所以为了出现不稳定，乘积 $U_n\dfrac{\partial \Pi_n}{\partial y}$ 必须在有的地方为正。再次使用适用于各个 Φ_n 的不等式 (7.5.11)，可以得出

$$\sum_{n=1}^{2}d_n\int_{-1}^{1}dyU_n\frac{\partial \Pi_n}{\partial y}\frac{|\Phi_n|^2}{|U_n-c|^2}\geqslant\sum_{n=1}^{2}d_n\int_{-1}^{1}dy|\Phi_n|^2\left(k^2+\frac{\pi^2}{4}\right). \tag{7.10.7}$$

另一方面有

$$\sum_{n=1}^{2} d_n \int_{-1}^{1} dy U_n \frac{\partial \Pi_n}{\partial y} \frac{|\Phi_n|^2}{|U_n - c|^2} \leqslant \sum_{n=1}^{2} d_n \int_{-1}^{1} dy \frac{|\Phi_n|^2}{c_i^2} \left[U_n \frac{\partial \Pi_n}{\partial y} \right]_{\max}, \quad (7.10.8)$$

式中下标 max 指乘积 $U_n \partial \Pi_n / \partial y$ 在区间 $-1 \leqslant y \leqslant 1$ 上的极大值。把（7.10.7）和(7.10.8)式合并，得到作为增长率的界限有

$$\boxed{k^2 c_i^2 \leqslant \left[U_n \frac{\partial \Pi_n}{\partial y} \right]_{\max} \frac{k^2}{\pi^2/4 + k^2}}. \quad (7.10.9)$$

(7.10.9) 式是普遍成立的，而（7.5.25）式（(7.10.9) 式是它在两层模式中的类似表达式）则仅当地面速度与 y 无关时才成立。

作为习题留给读者证明，引进函数 $N_n = \Phi_n (U_n - c)^{-1}$ 后，两层模式可以重复使用导出（7.5.14）和（7.5.18）式的步骤，得出同样的关系式。因而（7.5.14）和（7.5.18）式对两层模式也同样适用，其中 $U_{\min}$ 和 $U_{\max}$ 是区间 $|y| \leqslant 1$ 上 U_n 的极小值和极大值。

扰动能量方程（7.9.12），可以用 Φ_n 来表示。这是因为

$$\overline{\left(\frac{\partial \phi_n}{\partial x} \right)^2} = -\frac{k^2}{4} \overline{\{ \Phi_n e^{ik(x-ct)} - \Phi_n^* e^{-ik(x-c^*t)} \}^2} = \frac{k^2}{2} |\Phi_n|^2 e^{2kc_i t}, \quad (7.10.10)$$

而

$$\overline{\frac{\partial \phi_n}{\partial x} \frac{\partial \phi_n}{\partial y}} = -\frac{ik}{4} \overline{\{ \Phi_n e^{ik(x-ct)} - \Phi_n^* e^{-ik(x-c^*t)} \} \left\{ \frac{d\Phi_n}{dy} e^{ik(x-ct)} \right.}$$

$$\overline{\left. + \frac{d\Phi_n^*}{dy} e^{-ik(x-c^*t)} \right\}} = \frac{ik}{4} \left\{ \Phi_n \frac{d\Phi_n^*}{dy} - \Phi_n^* \frac{d\Phi_n}{dy} \right\} e^{2kc_i t}, \quad (7.10.11)$$

类似地，

$$\overline{\phi_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial x}} = -\frac{ik}{4} \{ \Phi_1 \Phi_2^* - \Phi_2 \Phi_1^* \} e^{2kc_i t}.$$

故（7.9.12）式变为

$$\frac{kc_i}{2} \left\{ \sum_{n=1}^{2} d_n \int_{-1}^{1} dy \left[|\Phi_n|^2 k^2 + \left| \frac{d\Phi_n}{dy} \right|^2 \right] + F_0 \int_{-1}^{1} dy |\Phi_1 - \Phi_2|^2 \right\}$$

$$= \int_{-1}^{1} dy \sum_{n=1}^{2} d_n \left\{ \left(\frac{ik}{4} \right) \left[\Phi_n \frac{d\Phi_n^*}{dy} - \Phi_n^* \frac{d\Phi_n}{dy} \right] \right\} \frac{dU_n}{dy}$$

$$- \int_{-1}^{1} dy F_0 (U_2 - U_1) \frac{ik}{4} \{ \Phi_1 \Phi_2^* - \Phi_2 \Phi_1^* \}. \quad (7.10.12)$$

由于

$$2|\Phi_2||\Phi_1| \leqslant \frac{d_1 |\Phi_1|^2 + d_2 |\Phi_2|^2}{(d_1 d_2)^{1/2}},$$

$$2k \left| \frac{d\Phi_n}{dy} \right| |\Phi_n| \leqslant |\Phi_n|^2 k^2 + \left| \frac{d\Phi_n}{dy} \right|^2, \quad (7.10.13)$$

且

$$\left| \Phi_n \frac{d\Phi_n^*}{dy} - \Phi_n^* \frac{d\Phi_n}{dy} \right| \leqslant 2 |\Phi_n| \left| \frac{d\Phi_n}{dy} \right|,$$

$$|\Phi_1\Phi_2^* - \Phi_2\Phi_1^*| \leqslant 2|\Phi_2||\Phi_1| \ , \tag{7.10.14}$$

能量方程（7.10.12）意味着

$$kc_i \leqslant \frac{1}{2}\left[\left|\frac{dU_n}{dy}\right|_{max} + \frac{(F_1F_2)^{1/2}k|U_1-U_2|}{k^2+\pi^2/4}\right] \tag{7.10.15}$$

所以增长率又一次受到基本状态垂直切变和水平切变的限制。

7.11 两层模式中的斜压不稳定：菲利蒲斯模式

考虑基本状态 U_1 和 U_2 大小不等、但都与 y 无关的基本状态。这个简单而又能说明问题的模式，首先由 Phillips(1954)研究过。两层之间的分界面是倾斜的，而扰动有可能汲取这一有效位能。从（7.9.12）式可得，因 U_1 和 U_2 与 y 无关，故与界面倾斜有关的有效位能是扰动的唯一能源。U_1 和 U_2 与 y 无关这一事实，使（7.10.2a,b）的系数为常数，故可寻求如下形式的、满足（7.10.3c）的解：

$$\Phi_n = A_n \cos l_j y, \tag{7.11.1}$$

式中

$$l_j = \left(j+\frac{1}{2}\right)\pi, \quad j=0,1,2\cdots\cdots, \tag{7.11.2}$$

A_n 是常数，代表各层的波振幅。把（7.11.1）式代入（7.10.2）式得到 A_1 和 A_2 的两个联立代数方程，因为现在有

$$\frac{\partial \Pi_n}{\partial y} = \beta - (-1)^n F_n(U_1-U_2), \tag{7.11.3}$$

所以可知 A_1、A_2 满足：

$$A_1[(c-U_1)][K^2+F_1]+\beta+F_1(U_1-U_2)]-A_2(c-U_1)F_1=0, \tag{7.11.4a}$$

$$A_2[(c-U_2)[K^2+F_2]+\beta-F_2(U_1-U_2)]-A_1(c-U_2)F_2=0, \tag{7.11.4b}$$

式中 K 是全波数，

$$K^2 = k^2 + l_j^2 \, . \tag{7.11.5}$$

仅当（7.11.4）式中的系数行列式为零时，才有 A_1 和 A_2 的非零解。这个条件直接导出 c 的二次方程，其解是

$$c = U_2 + \frac{U_sK^2(K^2+2F_2)-\beta(2K^2+F_1+F_2)}{2K^2(K^2+F_1+F_2)}$$

$$\pm\frac{[\beta^2(F_1+F_2)^2+2\beta U_sK^4(F_1-F_2)-K^4U_s^2(4F_1F_2-K^4)]^{1/2}}{2K^2(K^2+F_1+F_2)}, \tag{7.11.6}$$

式中

$$U_s \equiv U_1 - U_2. \tag{7.11.7}$$

在无垂直切变时（即 U_s 为零时），（7.11.6）式简化为两个解：

$$c_1 = U_2 - \frac{\beta}{K^2},$$

$$c_2 = U_2 - \frac{\beta}{K^2+F_1+F_2}, \tag{7.11.8}$$

除了常值流 $U_2=U_1$ 产生的多普勒频移之外，（7.11.8）式等价于 6.17 节导出的正压和斜压

的罗斯贝波之频散关系式。在有切变时，根的性质有了显著的变化。首先考虑β为零的情形，即完全忽略地球球形效应的情形。此时，(7.11.6)式变为

$$c=\frac{U_1(K^2+2F_2)+U_2(K^2+2F_1)}{2(K^2+F_1+F_2)}\pm\frac{[-U_s^2(4F_1F_2-K^4)]^{1/2}}{2(K^2+F_1+F_2)} \quad (7.11.9)$$

故当

$$K^2<2(F_1F_2)^{1/2} \quad (7.11.10)$$

时，对一切U_s^2都出现不稳定。k为零时，K^2达到其最小值，所以为了对于某些$k>0$出现不稳定，要求

$$(F_1F_2)^{-1/2}<\frac{2}{l_j^2}=\frac{8}{\pi^2(2n+1)^2}, \quad (7.11.11)$$

这与伊迪模式的不稳定条件（7.7.23）在定性方面是类似的。也就是说，在两层模式以及伊迪模式中，波长足够短的波（与变形半径相比）不发展。然而，只要

$$L>\pi f_0^{-1}\left(g\frac{\Delta\rho}{\rho_0}\frac{D_1D_2}{8}\right)^{1/2}, \quad (7.11.12)$$

则在无β效应时，具有均匀垂直切变的两层模式是不稳定的，这与连续模式极为吻合。

其次考虑两层流体质量相等情况下的β效应，即在此情况下$D_1=D_2$，且$F_1=F_2=\hat{F}$。在这种情况下，(7.11.6)式变为

$$c=\frac{U_1+U_2}{2}-\frac{\beta(K^2+\hat{F})}{K^2(K^2+2\hat{F})}\pm\frac{[4\beta^2\hat{F}^2-K^4U_s^2(4\hat{F}^2-K^4)]^{1/2}}{2K^2(K^2+2\hat{F})}. \quad (7.11.13)$$

除非U_s^2足够大，否则（7.11.13）或根号中的值对任何K^2值均为正，运动将是稳定的。因此为了使全波数为K的波动不稳定，充分和必要条件是

$$U_s^2>U_c^2\equiv\frac{4\beta^2\hat{F}^2}{K^4(4\hat{F}^2-K^4)} \quad (7.11.14)$$

和

$$K^2<2\hat{F}. \quad (7.11.15)$$

所以，$\beta>0$的两层模式中的不稳定，首先要求$K^2<2\hat{F}$，此外要求U_s超过一个依赖于β的临界切变。在现在$F_1=F_2$的情况下，判据（7.11.14）与U_s的符号无关，即与热成风是东风还是西风无关。图7.11.1(a)给出不稳定所要求的U_s临界值U_c随K^2的变化。图上只给出$U_c>0$的正的一支，对于$U_s<0$的一支，可通过对K^2轴的反射得到。最小临界切变出现在

$$K^2=2^{1/2}\hat{F}, \quad (7.11.16)$$

其相应的最小临界切变是

$$\boxed{(U_c)_{\min}=\pm\frac{\beta}{\hat{F}}}. \quad (7.11.17)$$

观察（7.11.3）式可知，这个最小临界切变，恰好是满足不稳定必要条件（7.10.5）所需要的切变。因此，通过直接计算，只要（7.11.16）式成立，即只要

$$\frac{\pi^2}{4}<2^{1/2}\hat{F}, \quad (7.11.18)$$

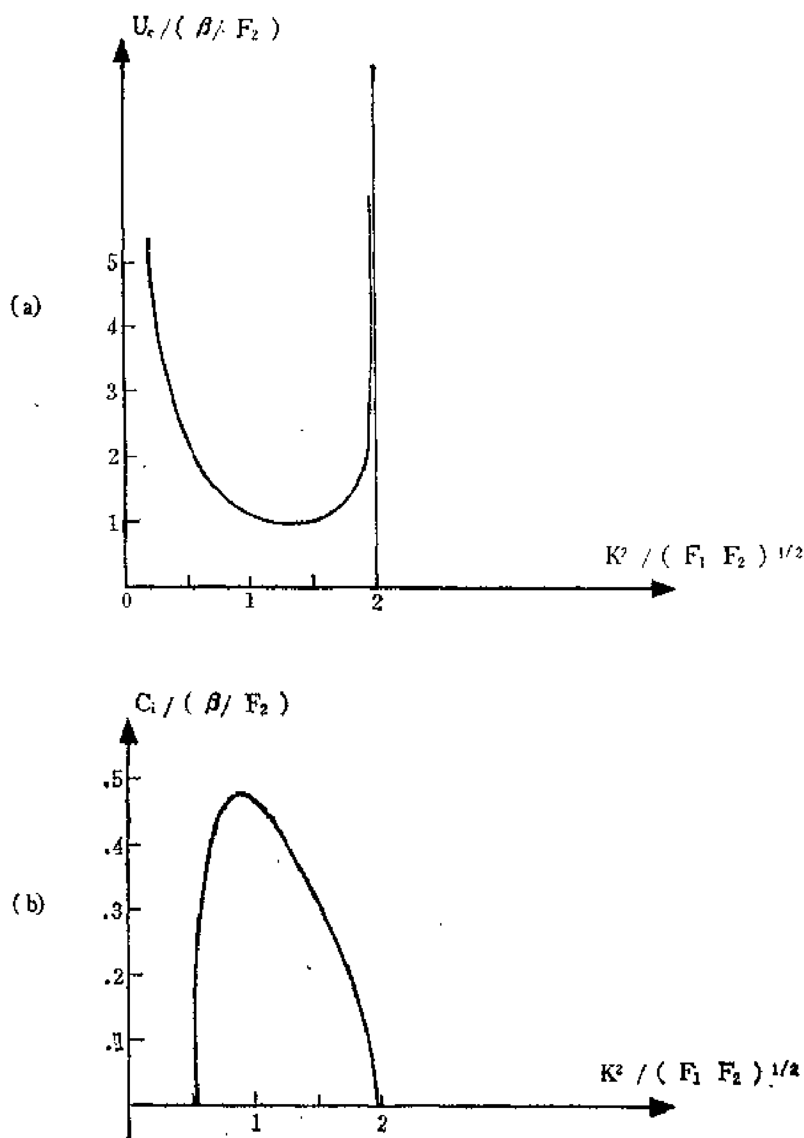


图7.11.1

(a) 在 $F_1=F_2$ 的情况下，作为波数之函数的临界切变 U_c。对于 $U_s>U_c$ 和 $K^2<2(F_1F_2)^{1/2}$ 的情况，c 是复数，其他地方 c 是实数。

(b) 对于 $U_s=2\beta/F_2$，即对于为最小临界切变值两倍的切变值，c 的虚部随波数的变化。

则必要条件（7.10.5）也是不稳定的充分条件。当 U_s 大于 $(U_c)_{min}$ 时，位涡梯度在一层中为正，而在另一层中为负。最小值则相当于在1层或2层中 $\partial\Pi_n/\partial y$ 均等于零的特殊切变。如果对任何 K 值，U_s 略大于 U_c，即若

$$U_s=U_c(K)+\Delta,\quad \Delta\ll U_c, \tag{7.11.19}$$

则由（7.11.13）式得

$$c_i=\pm\frac{2^{1/2}\beta\hat{F}}{K^2(K^2+2\hat{F})}\left(\frac{\Delta}{U_c}\right)^{1/2}+O(\Delta). \tag{7.11.20}$$

如果把（7.11.20）式与（7.8.53）式相比较，则容易看出，超过两层模式不稳定临界值时出

现的向不稳定的过渡，是和连续模式无临界层时的强不稳定相类似的。在连续模式中有无限多个这样的过渡，每一个都对应于图 7.8.3 上一条整数 r 的曲线，而且都对应于越来越复杂的垂直结构。两层模式只解决了相应于连续模式中 $r=1$ 的最低模态的强不稳定问题。比较图 7.11.1(b) 和图 7.8.4 可以进一步肯定对两层模式和连续模式之间关系的上述看法。图 7.11.1(b)上，对于为最小临界切变值两倍的 U_s 给出了虚相速 c_i。和连续模式的多波数带结构相对比，两层模式只有对应于最低模态的单个波数带是不稳定的。两层模式在它不能描写的较弱不稳定模态的范围内是不适宜的，但对于大多数不稳定模态来说，似乎是适宜的。

恰好在 $U_s=\beta/\hat{F}$ 的最小临界切变处，所有波数都是稳定的，且相速度是实数，它等于

$$c_r=U_2+\frac{\beta(K^4-2\hat{F}^2)}{2K^2\hat{F}(K^2+2\hat{F})}(1\pm1).\qquad(7.11.21)$$

对于一个模态来说，不论 K 值如何，c_r 均为 U_2；而对于另一模态则有

$$c_r=U_2+\frac{\beta(K^4-2\hat{F}^2)}{K^2\hat{F}(K^2+2\hat{F})}.\qquad(7.11.22)$$

在 (7.11.16) 式给出的波数处，c 的两个根接合在一起。在该点处运动是边缘稳定的，而且 c_r 等于 U_2(若 $U_s<0$，则在 $K^2=2^{1/2}F$ 处 $c_r\to U_1$)。在临界曲线处的接合发生在所有 $U_s>U_c$ 的切变情况下，它是稳定性临界值的标志。图7.11.2对 $U_s=2U_c$，给出 c_r 随 K^2 变化的函数关系，并给出对应于该切变下边缘不稳定的两个临界波数的两个接合点。在划定不稳定波数带范围的这两个波数之间的区间上，c_r是单值函数。需要再次注意，最不稳定的模态对应于 y 方向波长最长的模态，即 $j=0$ 的模态。

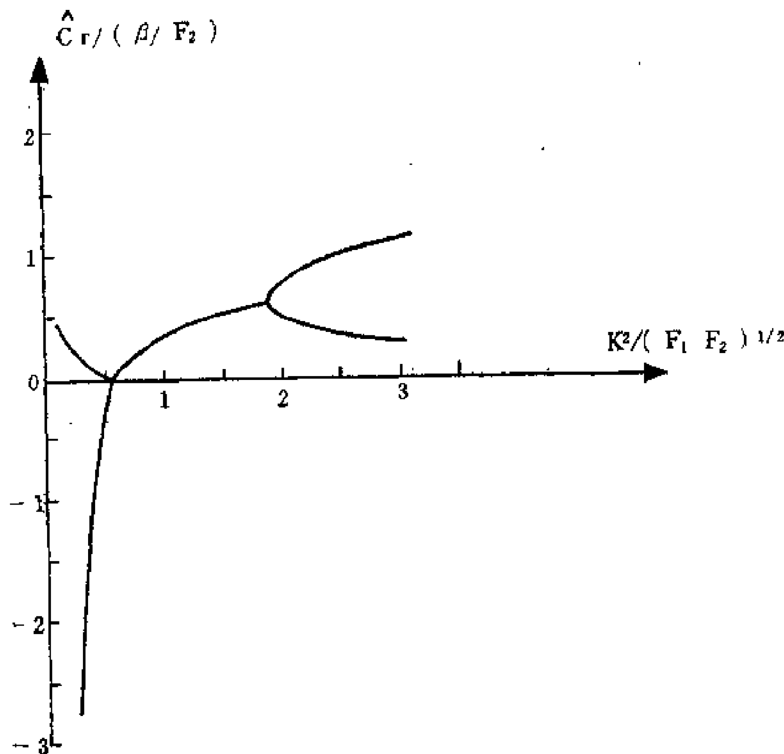


图7.11.2 当 $U_s=2\beta/F_2$ 时，作为波数之函数的 c 的实部。

一旦确定了 c，便可由比值 A_2/A_1 给出波动的垂直结构；该比值可以从（7.11.4a）或（7.11.4b）式得到

$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{K^2+F_1}{F_1}+\frac{\beta+F_1U_s}{F_1(c-U_1)}=\left[\frac{K^2+F_2}{F_1}+\frac{\beta-F_2U_s}{F_2(c-U_2)}\right]^{-1}. \quad (7.11.23)$$

例如，对于 $U_s>0$，在 $\beta=F_1U_s=F_2U_s$ 且 $K^2=2^{1/2}F$ 的最小临界切变处，我们有

$$\frac{A_2}{A_1}=\sqrt{2}-1\approx 0.414, \quad (7.11.24)$$

而若 $U_s<0$，则该比值在最小临界切变处是其倒数。当 U_s 大于 U_c，使得 $c_i>0$时，

$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{K^2+F_1}{F_1}+\frac{\beta+F_1U_s}{F_1|U_1-c|^2}(c_r-U_1-ic_i) \quad (7.11.25)$$

如果 $U_s>0$，则 $\beta+F_1U_s>0$，且 A_2 相对于 A_1 的位相在 $c_i>0$ 时为负值。象连续模式一样，不稳定波的位相随高度增加（对 $U_s>0$），因此在 $c_i>0$时，上层的波动滞后于下层波动的相角为

$$\alpha=\tan^{-1}\left[c_i\frac{(\beta+F_1U_s)/(F_1|U_1-c|^2)}{(K^2+F_1)/F_1+(c_r-U_1)(\beta+FU_s)/(F_1|U_1-c|^2)}\right] \quad (7.11.26)$$

从（7.10.11）式可直接得出，各层雷诺应力恒等于零，所以如我们所料，唯一的能量转换是斜压项，它由(7.10.11）式给出，即

$$\begin{aligned}U_s\overline{\phi_1\frac{\partial\phi_2}{\partial x}}&=-\frac{ik}{4}U_s\{\Phi_1\Phi_2^*-\Phi_2\Phi_1^*\}e^{2kc_it}\\&=\frac{kc_i}{2}U_s|A_1|^2\frac{\beta+F_1U_s}{|U_1-c|^2}\cos^2 l_jye^{2kc_it},\end{aligned} \quad (7.11.27)$$

当 $kc_i>0$时，上式显然为正，表示基本流的有效位能释放。

当两层厚度不等时，则 $F_1\neq F_2$，不稳定判据视 U_s 的符号而不相同[1]。从不稳定的必要条件（7.10.5）可以清楚地看出，当 $U_s>0$时，切变必须超过临界值

$$U_{c^+}=\frac{\beta}{F_2} \quad (7.11.28)$$

才能不稳定，而若 $U_s<0$，则 $-U_s$ 必须超过

$$U_{c^-}=\frac{\beta}{F_1}. \quad (7.11.29)$$

图7.11.3对 $D_1/D_2=F_2/F_1=0.2$ 的情况给出了临界切变随波数变化的函数关系。由图可见，对于 U_s 为正或为负这两种情况，最小临界切变实际上都是恰好使基本位涡梯度在其中一层内为零的切变。由于 $D_1<D_2$，对于 $U_s<0$ 的情况，它以较低的临界切变（由因子 D_1/D_2 表示切变之比）出现，因为

$$\frac{U_{c^+}}{U_{c^-}}=\frac{F_1}{F_2}=\frac{D_2}{D_1}. \quad (7.11.30)$$

在本例中，$F_1>F^2$，(7.11.6）式和图 7.11.3 指出，对于较高的波数，$U_s<0$ 时比 $U_s>0$时

（1）这种情况也发生于连续模式中。例如在 $z_T\to\infty$ 的恰尼模式中，只要由(7.8.6)式和(7.8.22)式我们有 $|\partial U/\partial z|>\beta hS$（这与(7.11.7)类似），则在 $\partial U/\partial z<0$ 时就可出现不稳定。

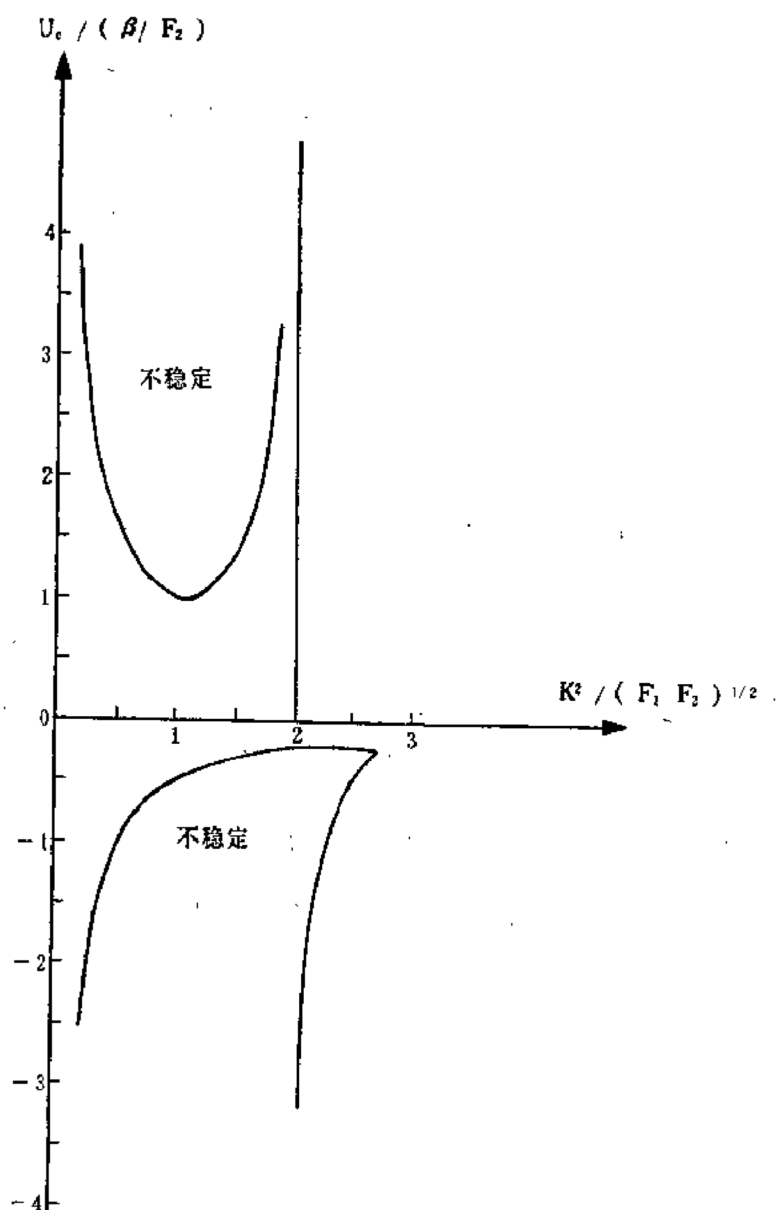


图7.11.3 $D_1/D_2=0.2$时的边缘稳定曲线。

更可容许出现不稳定。U_s之临界值曲线由以下条件给出：

$$\beta^2(F_1+F_2)^2+2\beta U_s K^4(F_1-F_2)-K^4U_s^2(4F_1F_2-K^4)=0. \tag{7.11.31}$$

把临界切变的最小值（7.11.28）或（7.11.29）式代入（7.11.31）式，容易算出边缘稳定波型的全波数，所以对于$U_s=\beta/F_2$，最小临界切变处的波数是

$$K_+^2=[F_2(F_1+F_2)]^{1/2}, \qquad U_s=\frac{\beta}{F_2}, \tag{7.11.32}$$

而若$U_s=-\beta/F_1$时，则相应的波数是

$$K_-^2=[F_1(F_1+F_2)]^{1/2}, \quad U_s=\frac{-\beta}{F_1}, \tag{7.11.33}$$

当 $F_1=F_2=\hat{F}$ 时，二者均化为 (7.11.16) 式。因

$$\frac{K_+^2}{K_-^2}=\left(\frac{F_2}{F_1}\right)^{1/2}=\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^{1/2}, \tag{7.11.34}$$

故在 $D_1<D_2$ 的条件下，$U_s>0$ 时的边缘不稳定波比 $U_s<0$ 时的边缘不稳定波更长。由于在最小临界切变处，(7.11.6) 中的根号下数值为零，U_s 和 K^2 均已知，所以计算边缘稳定波的 c_r 很简单，留给读者验证：

$$\begin{aligned}&\text{若 } U_s=\beta/F_2, K^2=K_+^2, \text{则 } c_r=U_2,\\&\text{若 } U_s=-\beta/F_1, K^2=K_-^2, \text{则 } c_r=U_1.\end{aligned} \tag{7.11.35}$$

7.12 摩擦效应

在迄今所讨论的例子中，稳定性临界值，不论是临界波数还是临界切变，都是无粘位涡约束关系的表现形式。在临界值的稳定侧，相速 c 是纯实数，越过临界值进入不稳定区时，出现两个复共轭解，这两个解的虚部大小相等但符号相反。在无粘问题中，不稳定波或者增长，或者衰减。一般地说，摩擦将使该特性发生变化，因为如果波动只是保持原状，则它必须吸取足够的能量以克服耗散而自身维持。如果波动是增长的，则它从基本流汲取的能量，必须大于其摩擦耗失。本节我们将考虑有艾克曼摩擦时不稳定的性质。为使讨论尽可能地简单，我们考察两层流体之环境深度相等、且忽略地球球形效应的两层模式中的斜压不稳定性质。为了便于讨论，在问题中尽量保持方程的对称性，假设上下边界均为刚性边界，所以利用 (6.16.29) 和 (6.16.31) 式，在不计 β 时，两层模式方程为

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right][\nabla^2\psi_1-\hat{F}(\psi_1-\psi_2)]=-\frac{r}{2}\nabla^2\psi_1,\\\left[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial\psi_2}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right][\nabla^2\psi_2-\hat{F}(\psi_2-\psi_1)]=-\frac{r}{2}\nabla^2\psi_2,\end{aligned} \tag{7.12.1}$$

式中

$$\begin{aligned}\hat{F}&=F_1=F_2,\\r&=\left(\frac{A_Vf_0}{2U}\right)^{1/2}\frac{L}{D_2}=\left(\frac{A_Vf_0}{2U}\right)^{1/2}\frac{L}{D_1}.\end{aligned} \tag{7.12.2}$$

基本状态是 U_1 和 U_2 与 y 无关的简单的切变流。于是，扰动 $\phi_n(x,y,t)$ 的线性稳定性问题变为

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+U_1\frac{\partial}{\partial x}\right][\nabla^2\phi_1-\hat{F}(\phi_1-\phi_2)]+\hat{F}(U_1-U_2)\frac{\partial\phi_1}{\partial x}=-\frac{r}{2}\nabla^2\phi_1, \tag{7.12.3a}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+U_2\frac{\partial}{\partial x}\right][\nabla^2\phi_2-\hat{F}(\phi_2-\phi_1)]-\hat{F}(U_1-U_2)\frac{\partial\phi_2}{\partial x}=-\frac{r}{2}\nabla^2\phi. \tag{7.12.3b}$$

可以寻求如下形式的标准波型解

$$\phi_n=ReA_ne^{ik(x-ct)}\cos l_jy, \tag{7.12.4}$$

式中

$$l_j=\left(j+\frac{1}{2}\right)\pi,\quad j=0,1,2,\cdots\cdots,$$

这种波型解满足 $y=\pm1$ 处 ϕ 为零的条件。

把 (7.12.4) 式代入 (7.12.3a,b) 中，可以得到两个关于 A_1 和 A_2 的线性齐次方程，即

$$
\begin{aligned}
&A_1\left[(c-U_1)[K^2+\hat{F}]+\frac{ir}{2}\frac{K^2}{k}+\hat{F}U_s\right]-A_2(c-U_1)\hat{F}=0,\\
&A_2\left[(c-U_2)[K^2+\hat{F}]+\frac{ir}{2}\frac{K^2}{k}-\hat{F}U_s\right]-A_1(c-U_2)\hat{F}=0,
\end{aligned}
\tag{7.12.5}
$$

和以前一样，式中

$$
\begin{aligned}
K^2&=k^2+l_j^2,\\
U_s&=U_1-U_2.
\end{aligned}
\tag{7.12.6}
$$

注意，(7.12.5) 式的系数由于摩擦的存在而变为复数，因此 c 和它的复共轭不再同时为标准波型问题的本征值了。其次，(7.12.5)式可以通过以 $irK^2/2k$ 代替 β 而从 (7.11.4a,b) 式直接得到，所以 c 的解也可以通过同样的代替而得到。最后，还可以明显地看到，现在 c 的问题既取决于 k 也取决于 K，这是因为艾克曼层产生的涡度衰减直接与涡度（即 $O(K^2)$）成正比，而其它无粘项则与位涡平流（从而与 kK^2 或 $k\hat{F}$）成正比。所以，如(7.12.5)所示，对于大的纬向波数，艾克曼层摩擦效应将起主导作用。

如果 A_1、A_2 不为零，则其系数行列式必须为零。这就给出关于 c 的二次方程，其解为

$$
c=\frac{U_1+U_2}{2}-\frac{irK^2/k}{2K^2(K^2+2\hat{F})}(K^2+\hat{F})
\pm\frac{i[K^4U_s^2(4\hat{F}^2-K^4)+r^2K^4/k^2\hat{F}^2]^{1/2}}{2K^2(K^2+2\hat{F})}
\tag{7.12.7}
$$

在无切变时，c_i 对两个根均为负值；对应于正压和斜压初始扰动之衰减，其衰减率为：

$$
kc_i=\begin{cases}-\dfrac{r}{2}\\[2ex] -\dfrac{r}{2}\dfrac{K^2}{K^2+2\hat{F}}.\end{cases}
\tag{7.12.8}
$$

当 $U_s^2>0$ 和 $K^4<4\hat{F}^2$ 时，(7.12.7) 中根式随 U_s 增加而增大，直到使平方根项与其前面的负虚部项平衡为止，此时临界值 U_s 为

$$
U_s=U_c(K,k)=\frac{r(K/k)}{(2\hat{F}-K^2)^{1/2}}=\frac{rK}{[(K^2-l_j^2)(2\hat{F}-K^2)]^{1/2}}.
\tag{7.12.9}
$$

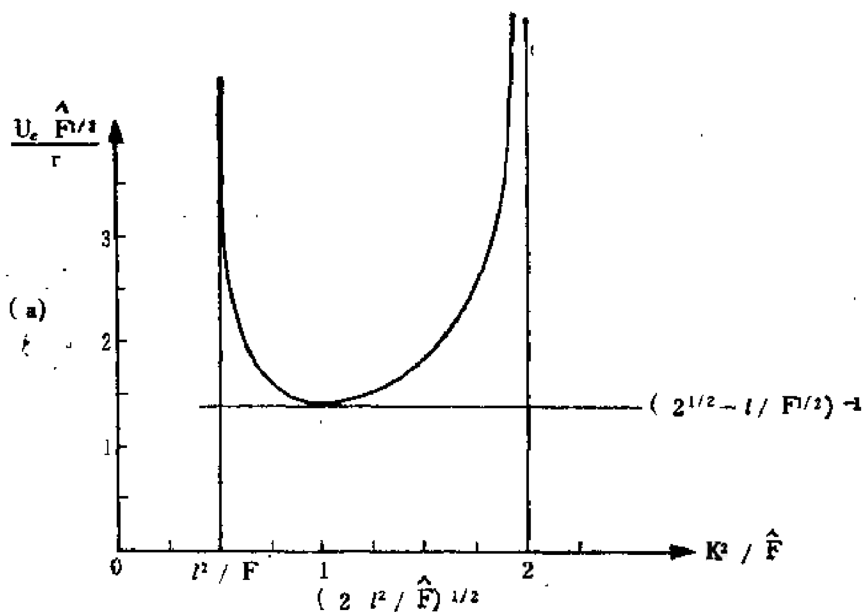
对一定的 l_j^2 来说，临界曲线如图 7.12.1 所示。短波截断和无粘理论一样，也由 $K^2=2\hat{F}$ 给出。$k\to0$ 的长波被艾克曼层的摩擦效应稳定化。对于一定的模态数 l_j，U_c 可看作 K 的函数，它在

$$
K^2=K_m^2=(2\hat{F}l_j^2)^{1/2}
\tag{7.12.10}
$$

处达到极小值，这等于短波截断 $K^2=2\hat{F}$ 和长波截断 $K^2=l_j^2(k\to0)$ 之间的几何均值。对应于 (7.12.10) 的最小临界切变是

$$
(U_c)_{\min}=\frac{r\hat{F}^{-1/2}}{2^{1/2}-l_j/\hat{F}^{1/2}}.
\tag{7.12.11}
$$

这又一次得到 y 方向波数最小的波 ($j=0$) 是最不稳定的波。图 7.12.1(b) 给出 $K=K_m$ 处



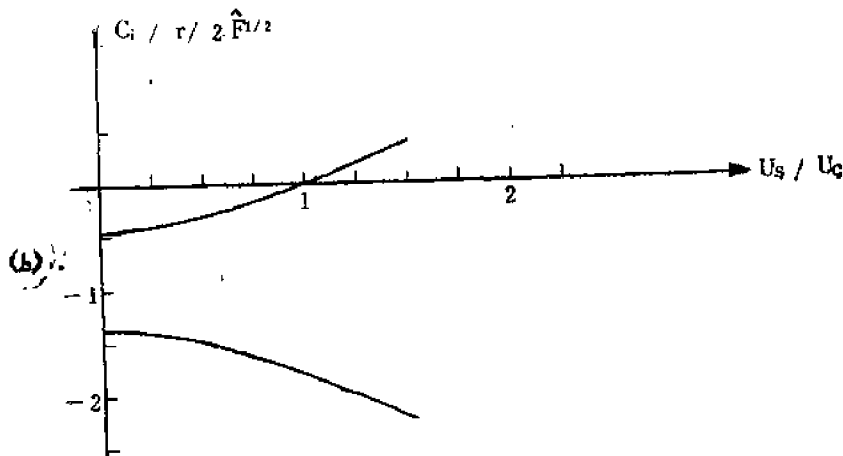


图7.12.1

(a) 边缘稳定曲线。当 $U_s<U_c$ 时，所有波都是衰减波。
(b) 在(7.10.12)式定义的 $K=K_m$ 处 c 的虚部对 U_s/U_c 的函数关系。注意 U_c只是其中一个根的过渡点。

c_i 随 U_s 变化的函数关系。当 $U_s<U_c$ 时，两个根都有 $c_i<0$，即两个标准模态都在 $O(r^{-1})$ 的时间尺度上衰减。当 $U_s\to U_c$ 时，只有一个波的 c_i 趋于零，而另一个波的 c_i 仍为负值，而且其量值实际上变得更大。对于

$$U_s=U_c+\Delta, \tag{7.12.12}$$

一个根是量级为 $O(\Delta)$ 的 c_i，另一个根仍为 $O(1)$ 且为负值。稳定性临界值仅对其中一个波是过渡曲线。这与无粘问题大不相同，在那里稳定性边界对两个波都是过渡曲线，在过渡曲线上，这两个波突然得到如（7.11.20）式所示的虚部 $c_i=\pm O(\Delta^{1/2})$。对无粘不稳定来说，c_i 作为 U_s 的函数在 U_c 处有一个分支点，但在粘性效应起主导作用时，在 U_c 处只有平滑的过渡。

注意，对于所有的 $K^2<2\hat{F}$，每个模态都有 $c_r=(U_1+U_2)/2$，即波动以两层之平均速度

运动。

由于 c 已知，所以可用（7.12.5）式得到波动的垂直结构，即

$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{K^2+\hat{F}}{\hat{F}}+\frac{U_s}{c-U_1}+\frac{irK^2/2k}{(c-U_1)\hat{F}}. \tag{7.12.13}$$

重要的是注意，c 为实数（且等于$(U_1+U_2)/2$）的边缘稳定波在两层之间的位相差不为零，即在边缘稳定曲线上，

$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{K^2}{\hat{F}}-1-i\frac{rK^2}{k\hat{F}U_s}=\frac{K^2}{\hat{F}}-1-i\frac{K(2\hat{F}-K^2)^{1/2}}{\hat{F}}. \tag{7.12.14}$$

通过直接计算可知，在稳定性边界上，

$$\frac{|A_2|}{|A_1|}=1; \tag{7.12.15}$$

所以

$$\frac{A_2}{A_1}=e^{-i\alpha}, \tag{7.12.16}$$

式中

$$\alpha=\tan^{-1}\left[\frac{K(2\hat{F}-K^2)^{1/2}}{K^2-\hat{F}}\right]. \tag{7.12.17}$$

在无粘问题中，除非 $c_i\neq0$，即除非是增长波，否则没有位相差。在有摩擦时，边缘波动既不增长也不衰减，为了得到基本流的能量并克服耗散而自身维持，必须有位相差。

从纬向流到边缘波动的能量转换，由（7.9.12）式给出，即，利用 $F_0=\frac{\hat{F}}{2}$ 有

$$\frac{\hat{F}}{2}U_s\overline{\frac{\partial\phi_2}{\partial x}\phi_1}=-\frac{\hat{F}}{2}U_s\frac{ik}{4}[A_1A_2^*-A_1^*A_2]\cos l_jy, \tag{7.12.18}$$

再用（7.12.14）式得到

$$\frac{\hat{F}}{2}U_s\overline{\frac{\partial\phi_2}{\partial x}\phi_1}=r\frac{K^2}{4}|A_1|^2\cos^2 l_jy. \tag{7.12.19}$$

对于边缘波动，下艾克曼层的能量耗散率是

$$\frac{r}{2}d_2\overline{(\nabla\phi_2)^2}=\frac{r}{4}\overline{(\nabla\phi_2)^2}=\frac{r}{8}|A_2|^2\cos^2 l_jy, \tag{7.12.20}$$

同样，上艾克曼层能量耗散率为

$$\frac{r}{2}d_1\overline{(\nabla\phi_1)^2}=\frac{r}{8}|A_1|^2\cos^2 l_jy. \tag{7.12.21}$$

总耗散率是（7.12.20）与（7.12.21）式之和，根据（7.12.15)式，它恰好等于(7.12.19)式所表示的基本状态给波动的能量供给率。当 U_s 大于 U_c 时，能量的转换率大于耗散率。在无粘模式中，稳定波没有能量的转换。

7.13 非纬向基本流的斜压不稳定

7.6 节所述的斜压不稳定的物理基础，强调由运动引起的在基本水平温度梯度方向上的

有效位能释放。由于热成风关系，这意味着释放能量的那部分流体元之轨迹与基本流的方向垂直，如前几节的计算所指出的那样，已知全波数K时，若k/l_j尽量大，则可使增长率趋于极大值。因为此时，从地转运动意义上说，轨迹能使能量最充分地释放。这正是垂直于基本流方向的波数最小的模态最易发展之原因。然而，扰动场的v对于u取极大值的过程，也加强了β的增稳效应，后者对涡度场的作用也是只与v成比例，若波矢量的x分量k为零，则β对该波的影响也将为零，但这时流体轨迹会垂直于纬向流的水平温度梯度，从而不能释放能量。但是，如果基本流的方向与纬圈呈一角度，严格的纬向扰动不受β效应的影响，但在基本温度梯度方向上仍有分量，所以仍能释放有效位能。因此，可以预料，在忽略摩擦的情况下，上述运动将没有最小的不稳定临界切变。

如果基本流不是严格在x方向上，那末与它相联系的地转压力场也不是无强迫位涡方程（如(7.9.1)式）的解。非纬向的基本运动意味着外界强迫场的存在。作为一个简单而重要的例子，我们考虑有风应力旋度的大洋运动的两层模式。在没有底摩擦的情况下，如果把(6.16.30)式的推导修改为包括(4.11.10)式和(6.16.20b)式给出的风应力旋度，则两层模式方程变为

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right][\nabla^2\psi_1-F_1(\psi_1-\psi_2)+\beta y]$$

$$=\left[\frac{\tau_0}{\rho_0 f_0 U D_1 \varepsilon}\right]\mathbf{k}\cdot\mathrm{curl}\boldsymbol{\tau}, \qquad (7.13.1\mathrm{a})$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial\psi_2}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right][\nabla^2\psi_2-F_2(\psi_2-\psi_1)+\beta y]=0, \qquad (7.13.1\mathrm{b})$$

这是(4.11.11)式的两层模式的推广形式。现考虑基本状态

$$\begin{aligned}\psi_1&=\Psi_1=-U_1y+V_1x,\\ \psi_2&=\Psi_2=0\end{aligned} \qquad (7.13.2)$$

式中U_1和V_1是常数。垂直于纬圈的运动速度是V_1。把(7.13.2)代入(7.13.1a,b)式，我们看到，第二个方程总是满足的，而第一个方程要求

$$\beta V_1=\left[\frac{\tau_0}{\rho_0 f_0 U D_1 \varepsilon}\right]\mathrm{curl}\boldsymbol{\tau} \qquad (7.13.3)$$

是这斯维尔德鲁普关系。$V_1\neq0$要求有一风应力旋度，在目前的例子中，风应力旋度为常数，但这是为了简化问题而作的一种选择。考察(7.13.2)式所代表的运动之稳定性，和以前一样我们记

$$\begin{aligned}\psi_1&=\Psi_1+\phi_1(x,y,t),\\ \psi_2&=\Psi_2+\phi_2(x,y,t),\end{aligned} \qquad (7.13.4)$$

把它代入(7.13.1a,b),经过线性化后得到

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+U_1\frac{\partial}{\partial x}+V_1\frac{\partial}{\partial y}\right][\nabla^2\phi_1-F_1(\phi_1-\phi_2)]+\frac{\partial\phi_1}{\partial x}[\beta+F_1U_1]$$

$$+\frac{\partial\phi_1}{\partial y}F_1V_1=0, \qquad (7.13.5\mathrm{a})$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}\right][\nabla^2\phi_2-F_2(\phi_2-\phi_1)]+\frac{\partial\phi_2}{\partial x}[\beta-F_2U_1]-\frac{\partial\phi_2}{\partial y}F_2V_1=0. \quad (7.13.5b)$$

必须注意，(7.13.3)式中风应力旋度被基本流所平衡，在扰动方程中并不出现风应力旋度。这是 7.1 节所讨论的稳定性理论的一般特征。也就是说，虽然有产生基本状态的强迫项，但对于稳定性问题，这种强迫作用只表现在基本流的结构中。或者从另一种观点说，不满足无强迫运动方程的基本流之稳定性，可以在无强迫的扰动方程中进行讨论，而无需显含地考虑产生基本状态所需要的外力。

现在我们来考察运动在 x 方向和 y 方向无界的情况下，由 (7.13.5a,b) 提出的稳定性问题。作这种无界假定的理由与以前的结果有关：斜压不稳定的优选尺度具有变形半径的量级，对我们所考虑的大洋来说，变形半径远小于大洋区域的范围。实际上，当所考虑的扰动长度尺度远远小于大洋循环流尺度时，把 U_1 和 V_1 取为常数也是适宜的。所以在本例中，我们考虑的理想模式适于远离大洋边界及其狭窄急流处的斜压洋中运动的稳定性问题。流体由大尺度的风应力旋度所驱动，由风应力局部强迫产生的基本流与纬圈有一交角。这一洋中温跃层的稳定性问题是一个相当中肯的海洋学模式，几个研究者（例如，Gill、Green 和 Simmos (1974) 以及 Robinson 和 McWilliams (1974)）在不同文章中都对该模式作过研究。

如果把平面波解

$$\phi_n=A_n\exp i[kx+ly-\sigma t], \quad n=1,2, \qquad (7.13.6)$$

代入方程 (7.13.5a,b)，则我们得到

$$A_1[(\sigma-U_1k-V_1l)(K^2+F_1)+\beta k+F_1(U_1k+V_1l)]-A_2(\sigma-U_1k-V_1l)F_1=0, \qquad (7.13.7a)$$

$$A_2[\sigma(K^2+F_2)+\beta k-F_2(U_1k+V_1l)]-A_1\sigma F_2=0, \qquad (7.13.7b)$$

式中

$$K^2=k^2+l^2.$$

以下的定义是很有用的：

$$\tilde\beta=\frac{\beta k}{K}=\beta\cos\theta,$$

$$\tilde U_1=\frac{U_1k+V_1l}{K}=(U_1^2+V_1^2)^{1/2}\cos(\alpha-\theta), \qquad (7.13.8)$$

$$c=\frac{\sigma}{K},$$

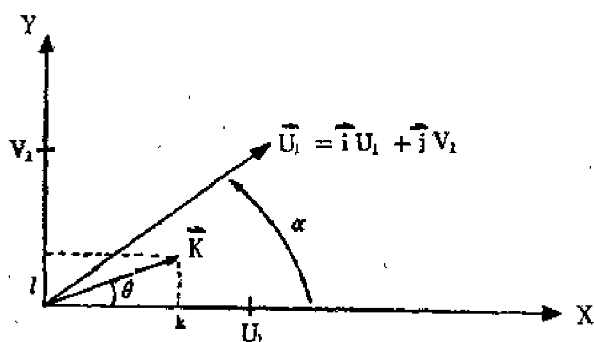


图7.13.1

基本流U的方向与 x 轴（等纬度线）的夹角是 α，而波矢量K与 x 轴的夹角是 θ

式中 θ 是波矢量 K 和 x 轴的夹角，而 α 是基本切变流与 x 轴的夹角，如图 7.13.1 所示。不失一般性，可以把 k 和 $\tilde\beta$ 取为正值。$\tilde U_1$ 和 $\tilde\beta$ 分别是基本流在波矢量方向上的投影和行星涡度梯度在扰动运动路径上的投影。(7.13.8) 式定义的相速度 c 可以是复数。若是复数，则与它有关的增长率是 Kc_i，而波峰在 K 方向上传播的速度为 c_r。(7.13.8) 式除以 K 后，可使(7.13.7a,b)式改写

为

$$A_1[(c-\tilde{U}_1)(K^2+F_1)+\tilde{\beta}+F\tilde{U}_1]-A_2(c-\tilde{U}_1)F_1=0, \tag{7.13.9a}$$

$$A_2[c(K^2+F_2)+\tilde{\beta}-F_2\tilde{U}_1]-A_1cF_2=0, \tag{7.13.9b}$$

这个方程与作了下述参数代换的纬向流稳定性方程（7.11.4a,b）完全一样：

$$\beta\longleftrightarrow\tilde{\beta}, \tag{7.13.10a}$$

$$U_s=U_1-U_2\longleftrightarrow\tilde{U}_1, \tag{7.13.10b}$$

$$U_2=0. \tag{7.13.10c}$$

于是 c 的解可以直接从（7.11.6）式得到

$$c=\frac{\tilde{U}_1K^2(K^2+2F_2)-\tilde{\beta}(2K^2+F_1+F_2)}{2K^2(K^2+F_1+F_2)}$$

$$\pm\frac{[\tilde{\beta}^2(F_1+F_2)^2+2\tilde{\beta}\tilde{U}_1K^4(F_1-F_2)-K^4\tilde{U}_1^2(4F_1F_2-K^4)]^{1/2}}{2K^2(K^2+F_1+F_2)}. \tag{7.13.11}$$

在7.11节中借助于 β 和 U_s 推导出的稳定性判据，利用（7.13.10）式的代换关系，可以直接用于我们现在讨论的情况中。关键的差别是，$\tilde{U}_1$ 和 $\tilde{\beta}$ 都是波矢量相对于 x 轴的方向和基本切变流的方向之函数。尤其是不稳定所需要的最小临界切变现在为

$$\tilde{U}_1>0;\quad \tilde{U}_{c+}=\frac{\tilde{\beta}}{F_2}, \tag{7.13.12a}$$

或者

$$\tilde{U}_1<0;\quad \tilde{U}_{c-}=-\frac{\tilde{\beta}}{F_1}, \tag{7.13.12b}$$

但是对于 $k=0$ 的情况，$\tilde{\beta}$ 将等于零，所以只要 $k=0, \tilde{U}_1\neq0$，则任何切变对这样的扰动都是不稳定的。这仅要求切变流在 y 方向的分量不等于零。也就是说，对于 $k=0$：

$$c_i=\frac{V_1}{2}\,\frac{[4F_1F_2-l^4]^{1/2}}{l^2+F_1+F_2}. \tag{7.13.13}$$

所以，只要 $l^2<2(F_1F_2)^{1/2}$，则基本流对 $k=0$ 的模态就是不稳定的，因此也就没有不稳定所要求的最小切变。当然如果基本流近于纬向，即若 V_1 非常小，则相应的增长率也是很小的。实际上，对于非纬向流来说，最适合发展的波矢量方向(即对应于最大增长率的方向)，不是严格的向北。在 $k=0$（它能消除 β 效应）和 $\theta=\alpha$（它使运动在基本温度梯度方向上的投影最大）之间的某个适中位置最有利。为便于说明问题，考虑 $F_1=F_2$ 的情况。此时若（7.13.11）式中的根式为负，则稍经代数运算可得，

$$\frac{Kc_i}{\beta/\hat{F}^{1/2}}=\frac{[U_s^2\cos(\alpha-\theta)a^4(4-a^4)-4\cos^2\theta]^{1/2}}{2a(2+a^2)}, \tag{7.13.14}$$

式中

$$a^2=\frac{K^2}{\hat{F}},\qquad U_s=\frac{(U_1^2+V_1^2)^{1/2}}{\beta/\hat{F}}, \tag{7.13.15}$$

所以 U_s 若视为纬向的话，它是运动超临界性的度量。也就是说，若 $U_s<1$，则当 U_s 完全沿纬向时，流动是稳定的。对于给定的 a^2 值，Kc_i 的的极大值对应于函数

$$I(\alpha,\theta)=W(\alpha)\cos^2(\theta-\alpha)-\cos^2\theta \tag{7.13.16}$$

的极大值，式中

$$W(\alpha)=\frac{U_s^2}{4}\alpha^4(4-\alpha^4)\geqslant 0. \tag{7.13.17}$$

对于固定的α，在

$$\frac{\partial}{\partial\theta}I(\alpha,\theta_m)=0 \tag{7.13.18}$$

处，或在

$$\tan 2\theta_m=\left[\frac{W(\alpha)\sin 2\alpha}{W(\alpha)\cos 2\alpha-1}\right] \tag{7.13.19}$$

处，I 和 Kc_i 有极大值。对于很大的 W（即 U_s 远超过纬向流不稳定的临界值），

$$\theta_m\to\alpha, \tag{7.13.20}$$

即在这种高切变情况下，β 效应较弱，而最不稳定波的方向平行于基本切变，以使能量的释放最多。另一方面，当$W\to 0$（即对于很弱的切变），有

$$\theta_m\to\frac{\pi}{2}, \tag{7.13.21}$$

以便在有β时保持不稳定。在这种极限情况下，扰动速度几乎近于纬向。图7.13.2对 $\alpha=45°$ 的基本流给出增长率随波矢量方向变化的函数关系。实线表示 $W(\alpha)=2.25$ 时的 Kc_i。这在临界波数 $K^2=2^{1/2}\hat{F}$ 处（见(7.11.16)式)对应于一个等于纬向流不稳定临界值的1.5倍的切变流 U_s，即这个切变流甚至为纬向时也是不稳定的。这一切变流对很宽范围的波矢量方向是不稳定的，且在 $\theta=57°$ 处达到其极大值，该方向稍微靠近基本切变的方向，而不是靠近向北的方向。在这里最不稳定波和基本流轴交成 12° 角，而与向北的方向成 33° 角。另一方面，图7.13.2 上的虚线表示，对于同样的 α，当 $W(\alpha)=0.25$ 时的增长率。在 $\alpha^2=2^{1/2}$ 时，对应于一个仅等于纬向流不稳定所要求的临界值之半的切变。但如图所示，这个非纬向流是不稳定的。然而，现在最不稳定扰动的波矢量方向更接近于向北的方向：θ_m 现在是 83°。最大增

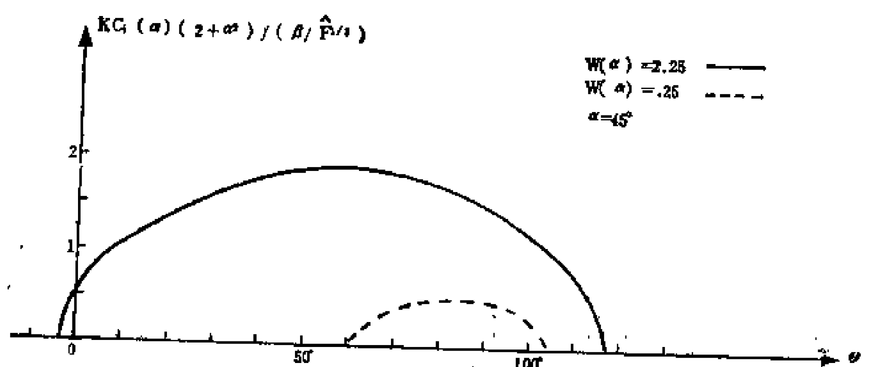


图7.13.2

基本流为 NE 方向（$\alpha=45°$）时，增长率随波矢量方向变化的函数关系。实线表示基本流切变等于纯纬向流不稳定所要求的切变值之 1.6 倍时的增长率。虚线表示基本切变仅为纯纬向流最小临界切变之半时的增长率

长率大约缩小到前一种情况的1/4，但仍与前者有相同的量级。所以，若不计摩擦可以使弱不稳定波衰减，那末不纯为纬向的斜压基本流几乎总是斜压不稳定的。

7.14 正压不稳定

两层模式的波动能量方程（7.3.11）或（7.9.12）揭示出，基本流的水平切变是扰动的可能的能源，该能源可以存在于没有垂直切变的基本流中，而且可以被与高度无关的扰动释放出来。正因为如此，所以，即使在更复杂的情况下，基本流和扰动均可有斜压结构，但是仍然把主要由基本流水平切变提供能量的不稳定称为正压不稳定。

为了研究纯正压不稳定，考虑与 z 无关的基本流，即

$$U_0=U_0(y).$$

于是标准波型方程（7.4.4）变为

$$(U_0-c)\left[\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\rho_s}{S}\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}-k^2\Phi\right]+\left[\beta-\frac{d^2U_0}{dy^2}\right]\Phi=0. \quad (7.14.1)$$

在没有摩擦和底坡度的情况下，下边界条件（7.4.8）式变为

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}=0,\quad z=0\text{处}. \quad (7.14.2)$$

为简单起见，还把 $z=z_T$ 处的上表面想像为刚性的，在这种情况下，若无摩擦存在，则

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}=0,\quad z=z_T\text{处}. \quad (7.14.3)$$

和6.12节一样，上边界条件的简单性，使我们可以寻找（7.14.1）的分离变量形式的解：

$$\Phi(y,z)=A(y)\chi(z), \quad (7.14.4)$$

式中 χ 是任意一个斯特姆—刘维尔问题（6.12.7）的离散本征函数族，即

$$\frac{1}{\rho_s}\frac{d}{dz}\frac{\rho_s}{S}\frac{d\chi}{dz}=-\lambda\chi, \quad (7.14.5a)$$

边条件是 $z=0$、z_T 处有

$$\frac{\partial\chi}{\partial z}=0, \quad (7.14.5b)$$

式中 λ 是有关的本征值。函数 $A(y)$满足正压不稳定方程：

$$(U_0(y)-c)\left[\frac{d^2A}{dy^2}-\mu^2A\right]+\left[\beta-\frac{d^2U_0}{dy^2}\right]A=0, \quad (7.14.6)$$

式中

$$\mu^2=k^2+\lambda. \quad (7.14.7)$$

注意 $\lambda=0$ 总是（7.14.5a,b)的本征值，它对应于一个纯正压模态。(7.14.6) 对每个 λ 所提出的稳定性问题，恰好等价于正压流对一个 x 波数为 μ 的正压扰动的稳定性问题。所以正压基本流的任何一个斜压扰动的动力学特性，可以完全用等价的正压模态来描述。

侧边界条件（7.4.6）变为

$$A(y)=0,\quad y=\pm1\text{处} \quad (7.14.8)$$

容易把不稳定的必要条件（7.4.22）简化为郭氏定理（1949)，

$$c_i\int_{-1}^{1} dy \frac{|A|^2}{|U_0-c|^2}\left[\beta-\frac{d^2U_0}{dy^2}\right]=0;\qquad(7.14.9)$$

所以，为了发生无粘正压流的不稳定，向北的绝对涡度梯度必须在某个纬度上为零。与斜压不稳定不同，该条件中没有边界项。所以足够大的β值总使基本流趋于正压稳定。因

$$\beta=\frac{\beta_0 L^2}{U},\qquad(7.14.10)$$

式中L是运动的特征尺度，故具有弱水平切变的足够宽的基本流，对正压不稳定来说是稳定的。在前几节中我们看到，当运动的水平尺度大于罗斯贝变形半径时，有利于斜压不稳定发生。因此可以假设，对L较大的宽基本流，有易于产生斜压不稳定模态的趋势，而很窄的基本流（宽度小于变形半径）可能会有正压不稳定的趋势。

(7.14.1) 的数学结构与U_0只是z的函数时出现的纯斜压不稳定问题的结构是类似的。由此可知，(7.14.6) 的通解具有 (7.8.9) 和 (7.8.10) 式给出的形式，即$A(y)$是$A_1(y)$和$A_2(y)$的线性组合，此处

$$A_1(y)=(y-y_c)[1+a_1(y-y_c)+a_2(y-y_c)^2+\cdots\cdots],\qquad(7.14.11a)$$

$$A_2(y)=A_1(y)\frac{(\beta-d^2U_0/dy^2)_{y_c}}{(dU_0/dy)_{y_c}}\log(y-y_c)-[1+b_1(y-y_c)$$
$$+b_2(y-y_c)^2+\cdots\cdots],\qquad(7.14.11b)$$

其中y_c是U_0-c为零的点。$A_2(y)$中的对数项与边界条件 (7.14.8) 的简单性一起有重要的含义。例如，考虑一个边缘稳定波，即在参数值上紧邻不稳定模态的波。如果c在U_0范围内，则对数项的存在将使解中单独引进一个虚数，该项在边界处不能被其他项平衡，所以将违背 (7.14.8) 式的条件。除非在y_c处涡度梯度为零，否则就会出现这种情况。这一点也可通过下述的另一种方式看到。雷诺应力$-\overline{u_0v_0}$可以写为

$$-\overline{u_0v_0}=\chi^2(z)\frac{ik}{4}\left[A\frac{dA^*}{dy}-A^*\frac{dA}{dy}\right]e^{2kc_it},\qquad(7.14.12)$$

且在$y=\pm1$处必须为零。把 (7.14.6) 除以U_0-c,其结果和它的复共轭形式为

$$\frac{d^2A}{dy^2}-\mu^2A+\left[\beta-\frac{d^2U_0}{dy^2}\right]\frac{A}{U_0-c}=0,\qquad(7.14.13a)$$

$$\frac{d^2A^*}{dy^2}-\mu^2A^*+\left[\beta-\frac{d^2U_0}{dy^2}\right]\frac{A^*}{U_0-c^*}=0.\qquad(7.14.13b)$$

把 (7.14.13b) 乘以A,然后减去 (7.14.13a) 和A^*的乘积，我们得到

$$\frac{d}{dy}\left[A\frac{dA^*}{dy}-A^*\frac{dA}{dy}\right]=2ic_i|A|^2\frac{\beta-d^2U_0/dy^2}{|U_0-c|^2}.\qquad(7.14.14)$$

所以 (7.14.12) 意味着

$$\boxed{-\frac{d}{dy}\overline{u_0v_0}=-\frac{kc_i}{2}|A|^2\chi^2\frac{\beta-d^2U_0/dy^2}{|U_0-c|^2}e^{2kc_it}},\qquad(7.14.15)$$

其中

$$|U_0-c|^2=(U_0-c_r)^2+c_i^2.\qquad(7.14.16)$$

(7.14.15) 式对 y 从 -1 到 1 积分得到 (7.14.9) 式，因为 v_0 在 $y=\pm1$ 处为零。现在考虑 $c_i\to0$ 时 (7.14.15) 的极限，即 (7.14.15) 式对于边缘稳定波的极限情况。在这种 c_i 趋于零的极限情况下，雷诺应力除了那些 $c_i\to0$ 时 U_0-c_r 为零的临界点处可能有不连续变化以外，将变得与 y 无关。在这些临界点处，$-\overline{u_0v_0}$ 的跃变可以象 (7.8.16) 式那样取 $c_i\to0$ 的极限而算出，因此，若 $(dU_0/dy)(y_c)>0$，则在 $y=y_c$ 处跃变可写为

$$\Delta(-\overline{u_0v_0})_{y_c}=-\frac{k\pi}{2}\frac{|A(y_c)^2|}{(dU_0/dy)(y_c)}\left(\beta-\frac{d^2U_0}{dy^2}(y_c)\right). \qquad (7.14.17)$$

若 $(dU_0/dy)(y_c)<0$，则 (7.14.17) 式取反号仍成立。注意 (7.14.17) 式的系数和 (7.14.11b) 式中对数项的系数一样。这种相似性并非是偶然的巧合，因为雷诺应力在 $c_i\to0$ 时的间断跃变，恰好是由于通过临界点时由对数项产生的 A 随 y 的不连续位相变化所产生的。正如我们已看到的，除了这些跃变以外，雷诺应力在 $c_i\to0$ 时不随 y 变化，而且实际上，在 $y=\pm1$ 处为零。所以，如果 U_0 使得 U_0-c 对不止一个 y 值为零，则这些跃变之和必须为零。若 $U_0(y)$ 随 y 单调变化或 $U_0(y)$ 关于中点对称，那末不可能有前一种情况。为了使雷诺应力的每个跃变为零，在 $c_i\to0$ 时，我们必须有

$$\beta-\frac{d^2U_0}{dy^2}(y_c)=0. \qquad (7.14.18)$$

所以紧邻不稳定波的边缘稳定波之相速 c 为

$$c=U_0(y_c), \qquad (7.14.19)$$

其中 y_c 由 (7.14.18) 式确定。当然，这里假定 c 位于 U_0 的区间内。中性波，即使是边缘稳定的，也可以预先存在于 U_0 范围以外，或存在于 U_0 范围的边界上。

作为一个例子，考虑郭 (1949, 1973) 研究过的一个问题，在此问题中，

$$U_0=\frac{1+\cos\pi y}{2}=\cos^2\frac{\pi y}{2}. \qquad (7.14.20)$$

基本流是对称的急流，在 $y=0$ 处达到其极大值；无量纲速度为1，而在 $y=\pm1$ 处，U_0 为零。绝对位涡梯度在区间某点处为零的条件要求在 $(-1,1)$ 区间的某个 y_c 处，

$$b\equiv\frac{\beta}{\pi^2}=-\frac{\cos\pi y_c}{2}, \qquad (7.14.21)$$

或因 U_0 是对称的，(7.14.21) 式一定在半区间 $(-1,\ 0)$ 上有一个解。β 为零时，上述情况发生在 $y_c=-\frac{1}{2}$ 处。当 β 从零增加时，y_c 从 $y=-0.5$ 向 $y=-1$ 移动。当 b 大于 0.5 时，y_c 位于该区间以外，绝对涡度梯度总是正的，且运动是稳定的。所以，不稳定要求 $b<\frac{1}{2}$，对于这样的 b，

$$\cos\pi y_c=-2b, \qquad (7.14.22)$$

可以找到 c 值为

$$c=U_0(y_c)=\frac{1}{2}+\frac{\cos\pi y_c}{2}=\frac{1}{2}-b \qquad (7.14.23)$$

的 (7.14.6) 式的解。用这个 c 值，可以得到：

$$\frac{\beta-d^2U_0/dy^2}{U_0-c}=\pi^2, \tag{7.14.24}$$

所以 (7.14.6) 式变为

$$\frac{d^2A}{dy^2}+(\pi^2-\mu^2)A=0. \tag{7.14.25}$$

当 $\mu^2\geqslant 0$时，(7.14.25) 式唯一的非零解是

$$A=\cos\frac{1}{2}\pi y, \tag{7.14.26}$$

故

$$\boxed{\mu^2=\mu_0^2=\frac{3\pi^2}{4}}. \tag{7.14.27}$$

现在考虑波长略有不同的波，即

$$\mu^2=\mu_0^2+\Delta\mu^2, \tag{7.14.28}$$

令

$$A=A_0(y)+\Delta A(y), \tag{7.14.29}$$

式中

$$A_0(y)=\cos\frac{1}{2}\pi y. \tag{7.14.30}$$

一般，相速 c 也可以写为

$$c=c_0+\Delta c, \tag{7.14.31}$$

式中 c_0 为 $b-\frac{1}{2}$. 若把 (7.14.28)、(7.14.29) 和 (7.14.31) 式代入 (7.14.6) 式，并使用 (A_0,μ_0^2,c_0)是 (7.14.6) 式的解这一事实，则精确到最低阶的其他项是

$$\begin{aligned}\left[\frac{d^2}{dy^2}+\frac{\pi^2}{4}\right]\Delta A&=A_0\Delta\mu^2+\frac{\Delta c}{U_0-c_0}\left[\frac{d^2A_0}{dy^2}-\mu_0^2A_0\right]\\&=A_0\Delta\mu^2-\frac{\Delta c\pi^2A_0}{U_0-c_0},\end{aligned} \tag{7.14.32}$$

其中已利用了 (7.14.25) 式. 把 (7.14.32) 式乘以 A_0(由(7.14.30)式给出)，从 $y=-1$ 到 $y=0$ 积分，经过重复的分部积分之后，我们得到

$$0=\Delta\mu^2\int_{-1}^{0}A_0^2dy-\Delta c\pi^2\int_{-1}^{0}\frac{A_0^2}{U_0-c_0}dy. \tag{7.14.33}$$

(7.14.33) 式中第一个积分是正实数且容易算出：

$$\int_{-1}^{0}A_0^2dy=\frac{1}{2}. \tag{7.14.34}$$

第二个积分比较难处理，因 U_0-c_0 在 $y=y_c$ 处为零。如果把 c_0 考虑为有正虚部的相速的极限值，则积分

$$I=\int_{-1}^{0}\frac{A_0^2}{U_0-c_0}dy \tag{7.14.35}$$

中被积函数的奇点如图7.14.1所示，它略高于实的y轴，并且图示的积分路径是适当的。在绕极点$y=y_c$的半圆上，积分值为

$$\pi i \mathrm{Res}(y_c)=\frac{A_0^2(y_c)\pi i}{(dU_0/dy)(y_c)}; \tag{7.14.36}$$

所以I可以写为

$$I=\mathscr{A}+i\mathscr{B}, \tag{7.14.37}$$

式中

$$\mathscr{B}=\frac{\pi A_0^2(y_c)}{(dU_0/dy)(y_c)}>0, \tag{7.14.38}$$

且

$$\mathscr{A}=\lim_{\delta\to 0}\left[\int_{-1}^{y_c-\delta}+\int_{y_c+\delta}^{1}\right]\frac{A_0^2}{U_0-c_0}dy, \tag{7.14.39}$$

$\mathscr{A}$是积分I的柯西主值，当然也是纯实数。从（7.14.33）式可以得出

$$\Delta c=\left(\frac{\Delta\mu^2}{2}\right)\frac{\mathscr{A}-i\mathscr{B}}{\mathscr{A}^2+\mathscr{B}^2}. \tag{7.14.40}$$

因为$\mathscr{A}$是正数，所以$\Delta\mu^2$为负时，Δc的虚部为正。又因

$$k^2=\mu^2-\lambda=\mu_0^2-\lambda+\Delta\mu^2, \tag{7.14.41}$$

所以它意味着波长略大于边缘稳定解（A_0,μ_0）的波动是不稳定的。



图7.14.1　计算(7.14.33)式中积分的积分路径，在$c_i\to 0$时，它从奇点$y=y_c$下方绕过。

郭(1973)对此"余弦急流"的稳定性作了详细的数值计算。他的结果如图7.14.2所示，其上给出的增长率kc_i的等值线对应于$\lambda=0$的正压模态。因为c(通过μ)只是k的函数，

$$kc_i(\mu)=(\mu^2-\lambda)^{1/2}c_i(\mu), \tag{7.14.42}$$

因此，最大增长率总是出现在$\lambda=0$时。也就是说，正压基本流对正压扰动是最不稳定的。在图7.14.2上，短波截断由$a\equiv\mu/\pi=\sqrt{3}/2$给出，这与（7.14.27)式一致，而较长的波则总是不稳定的。图7.14.2上，向右方倾斜且与短波截断线交于$b=0.5$、$\mu^2=3\pi/4$处的稳定性边界，是由以下的边缘稳定解所确定的：

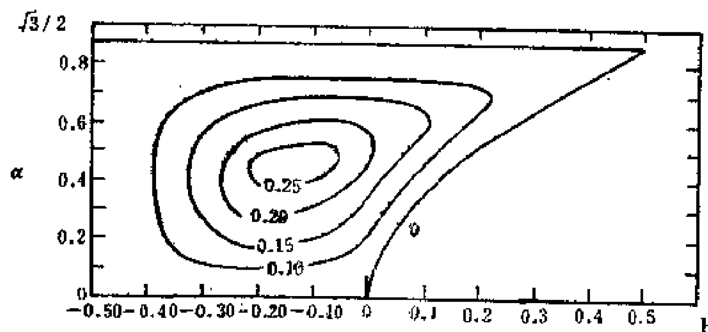


图7.14.2　郭(1973)对余弦急流所计算的ac_i随a和b变化的等值线。

$$A=\cos^{3r}\left(\frac{\pi y}{2}\right), \tag{7.14.43}$$

$c=0$,

其中

$$4r=1+(9-16b)^{1/2}, \tag{7.14.44}$$

且

$$\mu^2=\pi^2(1-r^2). \tag{7.14.45}$$

注意，当 $b>0$ 时，$\frac{1}{2}\leqslant r\leqslant 1$。下限对应于短波截断，而上限在 $b=0$ 处得到，在 $b=0$ 时，μ 为零。图 7.14.2 上，b 的负值对应于（在 β_0 为正时）自东向西的基本纬向流。解 (7.14.43) 仅当 $b>0$ 时才有可能，因为当 $b<0$ 时，或者 $r>1$(此时 $\mu^2<0$)，或者 (7.14.44) 式中根式取负的一支（在后一种情况下，A 如 (7.14.43) 所示在 $y=-1$ 处是奇异的)。这种西风急流和东风急流的解析不对称性，在增长率图上是明显的。由图可见，对于给定的 μ，向西的急流比与之相应的向东的急流更不稳定。

对于纯正压基本流，扰动能量方程 (7.3.11) 式简化为

$$\frac{\partial E(\phi)}{\partial t}=-\int_{-1}^{1}dy\int_{0}^{2r}dz\,\overline{u_0v_0}\frac{dU_0}{dy}. \tag{7.14.46}$$

由于

$$-\overline{u_0v_0}=\overline{v_0^2\frac{\phi_y}{\phi_x}}=-\overline{v_0^2\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_\phi}, \tag{7.14.47}$$

故可得出，为了使 $E(\phi)$ 增长，在 $dU_0/dy>0$ 的区域，ϕ 的位相必须随纬度增加而西倾，如图7.3.1(a) 所示；而在 $dU_0/dy<0$ 的区域，随 y 的增加而东倾。这种波场的倾斜，提供了从急流中心到急流两侧的调整动量通量，该通量使基本流廓线有变平的趋势，即使急流的水平切变减小。对于正压模态 ($\lambda=0$)，没有垂直速度，所以扰动并不驱动平均经向环流；西此平均流变化方程 (7.2.13) 式直接变为

$$\frac{\partial\bar{u}_0}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial y}\overline{v_0u_0}, \tag{7.14.48}$$

利用 (7.14.15) 式，它可写为

$$\frac{\partial\bar{u}_0}{\partial t}=-\frac{kc_i}{2}\frac{|A|^2\chi^2}{|U_0-c|^2}\left[\beta-\frac{d^2U_0}{dy^2}\right]e^{2kc_it}. \tag{7.14.49}$$

(7.14.49) 式表明，y 区间上的 $\bar{u}_0$ 的平均值不因扰动场而改变，而且对 x 平均的纬向动量只是随纬度重新分布。表达式 (7.14.49) 说明，对于 $kc_i>0$，在 $\beta-d^2U_0/dy^2>0$ 处 $\bar{u}_0$ 将减小，而在绝对涡度梯度为负处 $\bar{u}_0$ 增大。例如，在任一西风急流中心处，$d^2U_0/dy^2<0$，这个条件和 dU_0/dy 为零共同定义了最大风速点。所以在急流中心处，正压不稳定一定使 $\bar{u}_0$ 减小。在绝对位涡梯度变号的纬度 y_c 以南，若 $kc_i>0$，则我们有 $\partial\bar{u}_0/\partial t>0$，因此，来自急流中心处的西风动量输送使急流较慢的部分加速。因而正压不稳定有使狭窄的急流变宽减弱的趋势。

7.15 具有水平和垂直切变的基本流之不稳定性

在前几节中，为了分别说明正压不稳定和斜压不稳定的基本性质，我们考察了具有水平切变或者垂直切变的基本流之稳定性。但任何真实的流动，都在一定程度上既有水平切变也有垂直切变。所以，要精确地研究它们的稳定性，则需要同时考虑这两种切变。然而还有比

此更深刻的原因。当只有一种形式的切变时，扰动只能接受一种能源。对不稳定波来说，在波动能量方程中相应的能量转换机制必定为正。所以只具有垂直切变的基本流对某一类扰动是不稳定的，这类扰动平均说来必须递基本温度梯度方向输送热量，这种热量输送又趋于使纬向平均的径向梯度减弱。同样，只具有水平切变的基本流，则对另一类扰动是不稳定的，这类扰动平均说来必须顺基本动量（速度）梯度方向输送纬向动量，使对 x 平均的速度场变得更均匀。在上述各种情况下，扰动场的作用就好象是充当了大尺度混合的角色。当水平切变和垂直切变同时存在时，两种能量转换机制在（7.3.11）式中都起作用，每一个别项的符号事先并不知道。只要求它们的和对不稳定来说必须为正。实际上有三种可能性。扰动可以同时从基本温度梯度和基本动量梯度获得能量，所以动能的雷诺应力转换和有效位能的涡旋热通量转换都是正的。扰动也可能是斜压不稳定的，它释放基本状态的有效位能，同时产生雷诺应力，向基本流提供扰动能。这种可能性直接意味着，波动的调整动量通量与基本动量梯度相反，即意味着斜压急流中心有被扰动加速的趋势，而它的侧翼则被扰动减速。当然，对一个不稳定扰动来说，一种能量的汲取必须大于馈给基本平均流的能量。第三种可能性与第二种可能性适反，即在正压不稳定中，扰动雷诺应力释放动能，而扰动热通量使基本温度梯度加强。不管哪一种能量输送的能力，都暗示出这些扰动的动力学性质，关键取决于扰动场中微妙的位相关系，即取决于波位相随高度和纬度的倾斜。因此，作为与分子扩散简单类比的这些波动的概念，一般是过于简单的。当然，由（7.3.26）式可知，不稳定扰动的位涡通量必须递基本位涡梯度方向。

很久以来，上述考虑被公认为对大气环流问题特别重要。图7.15.1给出作为纬度和高度函数的纬向风剖面（风速在不同 y、z 处是对时间和经度作平均的）。在中纬度到处是西风。地面摩擦不断地使西风减速，同时可以预料，小尺度湍流混合作用从自由大气向地面输送西风动量。但是地面西风带和随高度增加的净西风运动，是永久性的大气环流的观测特征。向中

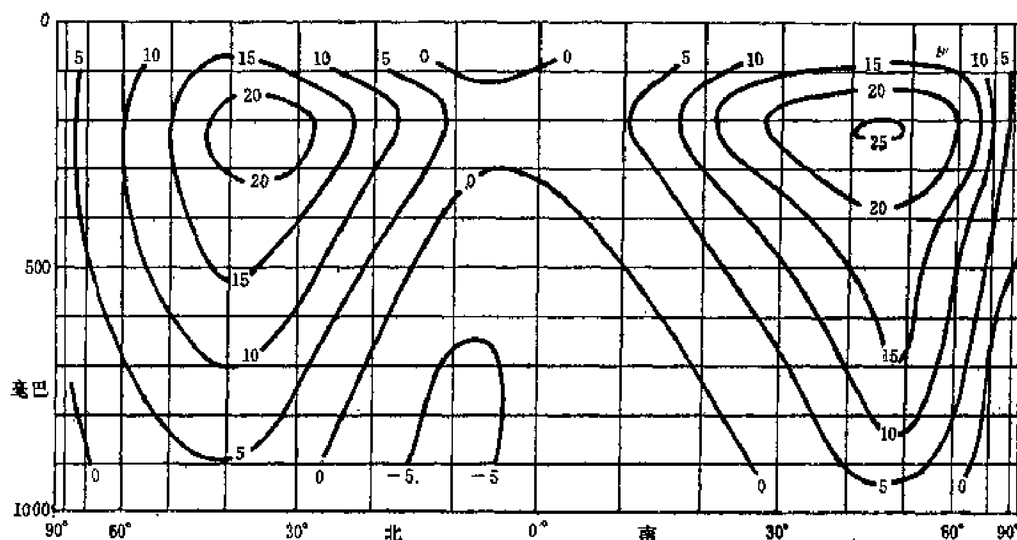


图7.15.1 在北半球冬季和南半球夏季所观测到的、对时间和经度平均的纬向风剖面。（根据Lorenz(1967)）

纬度大气不断地提供西风动量的原因何在？平均纬向运动方程（7.12.3）表明，平均经向速度的科氏加速度和雷诺应力的辐合，可以引起$\bar{u}_0$的变化。然而利用（7.3.26）式，对整个深度积分得

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty \rho_s \bar{u}_0 dz = -\frac{E_V^{1/2}}{2\varepsilon}\ \rho_s(0)\bar{u}_0(y,0) - \int_0^\infty \rho_s \frac{\partial}{\partial y}\overline{v_0 u_0}\, dz \tag{7.15.1}$$

其中假定了$z=\infty$处由摩擦驱动的艾克曼层没有贡献。假如象观测到的那样，$\bar{u}_0(y,0)>0$，则（7.15.1）式右边第一项将使平均西风减小。这一结果至少在符号上确实与大气和地面间摩擦相互作用的具体提法无关。因此，在中纬度西风带区域里，为了克服耗散而维持$\bar{u}_0$，必须有雷诺应力$\overline{u_0 v_0}$之辐合。Jeffreys (1933) 基本上沿这一思路推理，首先指出了"……气旋是大气环流的基本组成部分，没有它们，大气环流就不能存在。"正是Starr(1953) 及其合作者，相当鲜明地指出，实际上平均而言，中纬度的气旋波和强迫驻波，是急流维持的原因，即沿动量梯度方向的扰动动量输送，使得受摩擦耗散的纬向流得到能量补充。这一事实与中梯度气旋波扰动释放有效位能、并向极地输送热量的观测事实相吻合，它使人们把注意力集中于特殊的能量循环上，在此循环中，具有垂直切变的基本流之斜压不稳定释放有效位能，其水平切变产生雷诺应力，后者通过强西风区雷诺应力的辐合，把扰动能量输送给平均纬向运动。所以，具有水平和垂直切变的基本流不稳定性问题，对大气环流动力学的基本图像，以及象急流这样的快速流的存在来说，是十分重要的．这类过程在大洋环流中究竟起着何种程度的作用，目前尚不清楚。测量结果（Schmitz，1976）表明，在湾流附近区域，有很强的涡旋动量通量存在，但该通量在湾流动量平衡中的作用，尚未得到充分的阐明。

联合的不稳定问题，在求解方法上是复杂的，因为当U_0是y和z的函数时，标准波型方程（7.4.4）是不可分离的。在两层模式（7.10.2a,b）中，比较容易取得进展。例如，在等深（即$D_1=D_2$）的两层模式中，考虑无绝对涡度极大值的宽纬向流所给出的基本状态：

$$U_1=U_s(1-ay^2),\quad 0<a<1,$$
$$U_2=0. \tag{7.15.2}$$

当$a=0$时，问题简化为7.11节中讨论过的纯斜压不稳定问题。各层位涡梯度是(7.10.3a,b)，即

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial y}=\beta+\hat{F}U_s(1-ay^2)+2aU_s,$$
$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial y}=\beta-\hat{F}U_s(1-ay^2), \tag{7.15.3}$$

式中

$$F_1=F_2=\hat{F}. \tag{7.15.4}$$

在上层，位涡梯度总为正；而在下层，$U_2=0$.不稳定必要条件（7.10.5）和（7.10.6）意味着，无论如何，不稳定不可能只出现在一层中。若有不稳定发生，它一定是由取决于两层之间相互作用的斜压过程产生的。上层绝对涡度没有极大值，进一步说明正压不稳定是不可能的。不稳定的必要条件要求$\partial\Pi_2/\partial y$在某些地方为零。这意味着对不稳定来说，象菲利浦斯模式斜压不稳定的情况那样，必须有

$$U_s>\frac{\beta}{\hat{F}}. \tag{7.15.5}$$

若满足了 (7.15.5) 式，则对于

$$|y| \leqslant y_0 = a^{-1/2}\left[1-\frac{\beta}{FU_s}\right]^{1/2} \tag{7.15.6}$$

$\partial\Pi_2/\partial y$ 将为负值。对于 $|y|>y_0$，$\partial\Pi_1/\partial y$ 和 $\partial\Pi_2/\partial y$ 均为正值。因此由 (7.9.24) 式可知，对于 $|y|>|y_0|$，垂直"积分"的纬向流 $d_1\bar{u}_1+d_2\bar{u}_2$ 一定随时间减小。因为

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-1}^{1}(d_1\bar{u}_1+d_2\bar{u}_2)dy=0, \tag{7.15.7}$$

故可得出，在 $-y_0 \leqslant y \leqslant y_0$ 的纬度带内，纬向流一定是加速的。因此，基本流(7.15.2)的斜压不稳定必须在宽急流极大值附近产生纬向动量通量辐合，这有助于急流加强和增加其动能。

Pedlosky (1964) 曾对(7.15.2)式的稳定性作过详细的计算。注意，基本速度的常值曲率之存在，使上层中的 β 效应加强，这对位相的阻滞作用甚至比无切变情况下还强，所以 c 仍保持在 U_1 在的范围下，从而使标准波型方程是非奇异的。这时容易求出 Φ_1 和 Φ_2 的泰勒级数表达式，并通过对 Φ_1 和 Φ_2 在 $|y|=1$ 处为零的条件作直接但冗长的计算来确定稳定性特征。图 7.15.2 对 $a=0$(无水平切变)和 $a=0.5$ 的情况给出作为纬向波长函数的边缘稳定曲线。注意不稳定要求的最小临界切变，在这两种情况下是相同的。不稳定所要求的垂直切变临界值，恰好是使下层基本位涡梯度在某处为负，以满足不稳定必要条件的那个垂直切变值。因此直接计算表明，无论有没有水平切变，不稳定的必要条件是充分的。注意水平切变效应

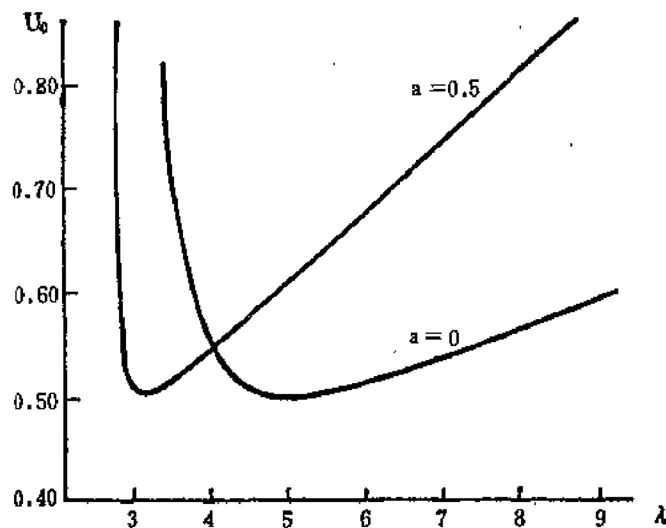
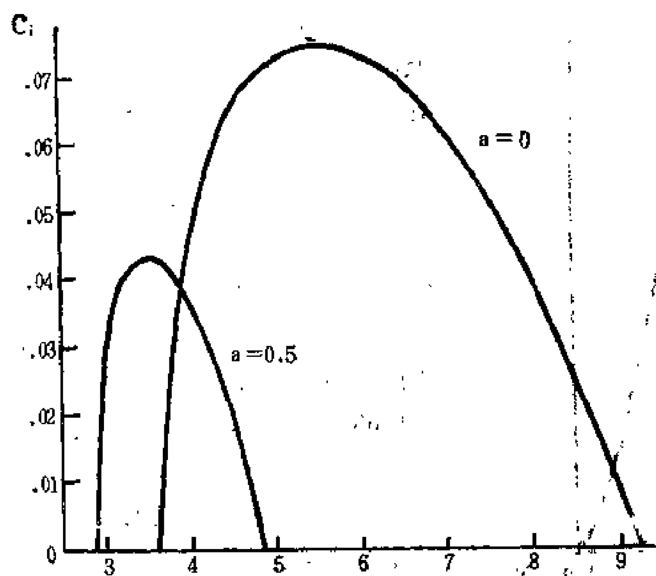


图7.15.2 作为纬向波长 $\lambda=2\pi/k_0$ 之函数的边缘不稳定曲线。基本状态速度廓线是 $U_1=U_s(1-ay^2)$，$U_2=0$。曲线 a=0 相当于无水平切变的情况。

使长波增稳，短波减稳。图7.15.3 (a, b)给出两种情况下的 c_r 和 c_i。水平切变使 c_i 减小，曲率 $2U_s a$ 起着 β 所起的作用，使 c_r 从 $a=0$ 的情况减小。图7.15.4表明 $y>0$ 的区域里雷诺应力的分布。雷诺应力关于 $y=0$ 是反对称的。对于 $U_s=0.6$、$\beta=1.5$、$\hat{F}=3$、$a=0.5$（计算时所用的数值），由(7.15.6)式得 y_0 的值是0.5773。注意对大于该值的 y，据图所示有

$$|y|>y_0, \quad -\frac{\partial}{\partial y}\overline{v_n u_n}<0.$$

所以在两层中纬向动量均减小。对于 $|y|<y_0$，雷诺应力梯度变号，所以在急流中心部分，西风由于扰动而加速。因此，计算证实了，纬向流的动能是由斜压不稳定（即释放基本有效位能）引起的扰动之雷诺应力来提供的。所以这些增长波提供了大气环流理论中所要求的适当的能量和动量输送，而且它们起着与实测气旋波相间的作用。



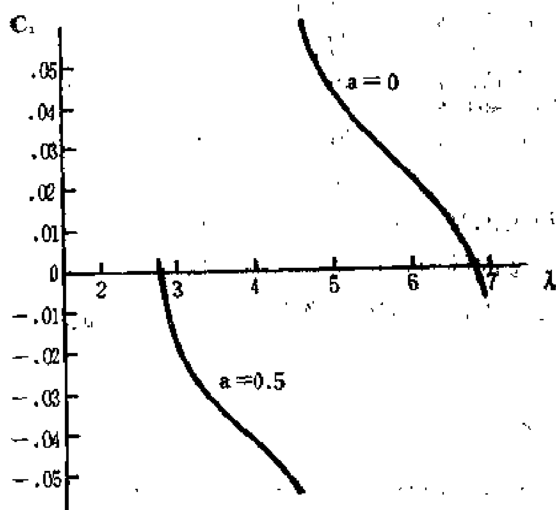


图 7.15.3

(a) c_r 与纬向波长的函数关系。$a=0$ 相当于7.11节水平切变为零的情况，而 $a=0.5$ 是热成风的抛物线速度廓线的情况。$U_1=U_s(1-ay^2)$，$U_2=0$，$U_s=0.6$，$\beta=1.5$，$\hat{F}=3$.

(b) c_r 与纬向波长的函数关系，参数值与（a）一样。

基本流在一层中具有位涡极大值的更复杂的基本状态，可以具有各种不稳定模态。Brown (1969) 用数值计算，考察了基本流

$$U_1=U_s(1+\cos\pi y), \tag{7.15.8}$$

$$U_2=0, \qquad \text{当}|y|\leqslant 1$$

的稳定性，其中，上层的速度廓线除了常系数外，等价于7.14节中对正压不稳定所考察过的廓线。位涡梯度为

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial y}=\beta+U_s\pi^2\cos\pi y+\hat{F}U_s(1+\cos\pi y). \tag{7.15.9}$$

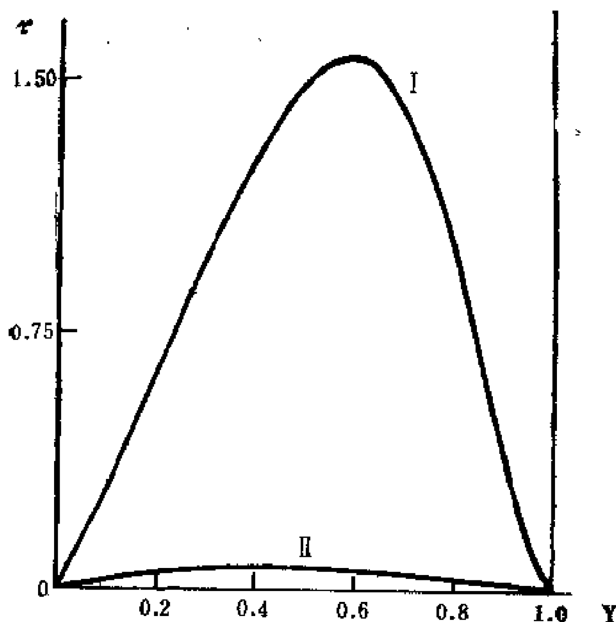


图 7.15.4

增长波的雷诺应力，$\alpha=0.5$，$\tau_n=\overline{-u_n^{(o)}u_n^{(o)}}$．对于 $-1\leqslant y\leqslant 0$，$\tau(y)=\tau(-y)$．曲线Ⅰ对应于 $n=1$，即上层的应力；而曲线Ⅰ对应于下层应力。注意，在基本流变得局部稳定的 $y=y_s\approx 0.5773$ 处，$\partial\tau_n/\partial y$ 为零。在 $|y|>y_s$ 区，由于西风动量的雷诺应力产生的向 $|y|<y_s$ 区的输送，使平均纬向动量减少，因此该输送趋于使基本急流廓线变陡。因线性波振幅是任意的，故 τ_n 的绝对值也是任意的，且取决于扰动场振幅的平方。

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial y}=\beta-\hat{F}U_s(1+\cos\pi y).$$

上层位涡梯度在由下式定义的点 y_c 处为零：

$$\cos\pi y_c=-\frac{\beta+\hat{F}U_s}{U_s\pi^2+\hat{F}U_s}. \tag{7.15.10}$$

所以对位于区间（$-1,1$）中的 y_c、β 必须不超过 $U_s\pi^2$，这一判据恰好是正压不稳定所要求的条件。Brown（1969）取参数：

$L=2000$公里，

$U_{s*}=30$米/秒，

对此作过详细的计算。他发现，纬向波长大于7,000公里的长波，既释放动能也释放位能，因而有使温度和纬向速度的水平梯度均趋平滑的趋势。但是，波长较短（大约4,500公里）的最不稳定波，和抛物线急流的情况一样，把动能由扰动输送给基本纬向流。

在可能同时有正压不稳定和斜压不稳定的基本流中，只要通过具体计算，便可确定最不稳定波的能量输送特征，它取决于基本状态的纬向速度和位涡的具体分布。急流参数的改变，对于究竟发生哪种不稳定（基本上是正压还是斜压不稳定）机制，以及最不稳定波的波长，都有重要的影响。

7.16 斜压不稳定的非线性理论

扰动场的能量方程表明，不稳定波必定具有调整的热通量和（或）动量通量。同时，平均运动方程，特别是纬向平均位涡方程表明，上述扰动通量的辐合将改变纬向速度、平均径向温度梯度和径向位涡梯度。但是，适用于无限小扰动的线性理论，忽略了上述变化，所以在线性理论范围内，迭加着正在发展的扰动的基本状态，在能量贮存上与初始状态相同，基本状态的能量不随时间变化。作为线性化和平均状态形式不变的一个结果，波动增长率也是常数，这就不可避免地导致扰动的指数增长。不论开始时扰动振幅多么小，这种指数增长最终都会使扰动振幅增大到不能再忽略非线性效应的程度。因此线性理论对一个增长扰动来说，不能随时间一致成立，仅能正确描写扰动的初始演变与结构。尤其是，基本流的超临界状态（即由切变大小来量度的不稳定程度，如超过其临界切变的程度），在基本流变化时，也将随时间变化，因而必将影响波动的进一步发展。

有一些基本问题，只能用非线性理论才能回答。例如，非线性效应最终将使波动的增长停止吗？如果是这样的话，那末它是怎样使波动增长停止的？如果振幅的极限存在的话，那

末它是怎样趋近于这一极限的？波动能保持这个最大振幅吗？如果耗散显著，我们容易想象到波动会达到一个新状态，在这一状态中，振幅定常的有限振幅波，不断地从平均流汲取能量，其速率与波动能量耗散率相平衡，且等于输入到基本流中的外界能量。但是大气和海洋中大多数不稳定模式的动力学特性是无粘的，故波动耗散作用是次要的。无耗散使物理过程基本上随时间可逆。在这种情况下，波动的振幅和结构在达到其极限值之后（当然我们假设存在着这样的极限），又如何演变？最后，当波动演变时，基本流实际上如何随时间变化？利用不稳定波计算基本状态变化的一个直接迭代方法，将给出由非线性的二次性质所造成的、指数 $\exp(2kc_i t)$ 式增长的变化。实际上，任何从线性波理论出发的这类直接摄动方法的第 n 项之量级都是 $\exp(nkc_i t)$，所以高阶修正量随时间增长很快，从而很快就使非线性效应的这种表示方法失效。

但当初始超临界性很小时，可以取得一些进展，因为在这种情况下，当波动增长时，只要基本流有很小的变化，就可以显著地影响波动场的动力学特征，以及它从基本状态汲取能量的能力。这又意味着，非线性效应对这样一种波动场变成显著的影响因子，这种波动场的振幅尽管有限，但仍然小到可以使用振动方法的程度。其次，很小的超临界状态意味着增长缓慢，这使得在波振幅的演变时间和其位相的平流时间之间存在着时间尺度的可分性。物理上时间尺度的可分性，使得在确定波动结构问题和确定波振幅演变问题之间有重要的数学上的可分性。

例如，考虑 7.11 节所讨论的问题之非线性推广，即两层模式描述的 β 平面上初始为纯斜压纬向流的非线性不稳定问题。对于由（7.11.5）式定义的全波数为 K 的波状扰动，不稳定要求的临界切变由（7.11.14）式给出，即

$$U_c(K)=\frac{2\beta\hat{F}}{K^2(4\hat{F}^2-K^4)^{1/2}}, \tag{7.16.1}$$

为简单起见，我们已在其中假设了未受扰动的各层厚度是相同的，所以

$$\hat{F}=F_1=F_2. \tag{7.16.2}$$

假定基本状态（即初始基本流）具有与 y 无关的速度 U_n，使得

$$U_s=U_1-U_2=U_c(K)+\Delta, \tag{7.16.3}$$

式中

$$\Delta\ll U_c. \tag{7.16.4}$$

也就是说，基本流的切变略大于波数为 K 的个别波（我们旨在描述它的非线性动力学性质）不稳定的临界值(图 7.16.1)。根据（7.11.20）式，该波动的线性增长率是 $O(\Delta^{1/2})$；所以至少在初始时，波振幅将象 $\exp(\Delta^{1/2}t)$ 那样，呈指数增长。这就暗示出波振幅演变的自然时间尺度是 $O(\Delta^{-1/2})$。因此，描写振幅演变的合适的时间变量是“慢”时间

$$T=|\Delta|^{1/2}t. \tag{7.16.5}$$

在定义中使用 Δ 的绝对值，可以使我们考察稍低于临界值的状态。当 Δ 为零时，波动频率和相速实部的量级为 1，所以波动位相是“快”时间

$$\tau=t \tag{7.16.6}$$

的函数。因而扰动流函数 ϕ_n 可以考虑为双时间变量 τ 和 T 的函数，即

$$\phi_n=\phi_n(x,y,\tau,T). \tag{7.16.7}$$

所以

$$\frac{\partial \phi_n}{\partial t}=\frac{\partial \phi_n}{\partial \tau}+|\Delta|^{1/2}\frac{\partial \phi_n}{\partial T}. \tag{7.16.8}$$

若 U_1、U_2 和 Δ 与 y 无关，则关于扰动的非线性问题（7.9.8）式，利用（7.16.3）和（7.16.8）之后变为

$$\left[\frac{\partial}{\partial \tau}+|\Delta|^{1/2}\frac{\partial}{\partial T}+(U_2+U_c+\Delta)\frac{\partial}{\partial x}\right]\times[\nabla^2\phi_1-\hat{F}(\phi_1-\phi_2)]+(\beta+\hat{F}U_c+\hat{F}\Delta)\frac{\partial \phi_1}{\partial x}=-J(\phi_1,q_1), \tag{7.16.9a}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial \tau}+|\Delta|^{1/2}\frac{\partial}{\partial T}+U_2\frac{\partial}{\partial x}\right][\nabla^2\phi_2-\hat{F}(\phi_2-\phi_1)]+(\beta-\hat{F}U_c-\hat{F}\Delta)\frac{\partial \phi_2}{\partial x}=-J(\phi_2,q_2), \tag{7.16.9b}$$

图7.16.1　在选定的波数 K 处，斜压切变流 U_s 超过临界值一个小量：$\Delta=U_s-U_c(K)\ll 1$。

式中，

$$q_n=\nabla^2\phi_n-\hat{F}(-1)^n(\phi_2-\phi_1), \tag{7.16.10a}$$

$$J(\phi_n,q_n)=\frac{\partial \phi_n}{\partial x}\frac{\partial q_n}{\partial y}-\frac{\partial \phi_n}{\partial y}\frac{\partial q_n}{\partial x},\quad n=1,2. \tag{7.16.10b}$$

扰动的特征振幅由预先给定的条件确定：即调整波通量造成的基本流之变化，具有超临界值 Δ 的量级。由于波通量是振幅的二阶项，因此这表明波振幅的量级为 $O(|\Delta|^{1/2})$。因为 $|\Delta|^{1/2}$ 作为（7.16.9a,b）式中的参数出现，所以 ϕ_n 将是 $|\Delta|^{1/2}$ 的函数。对于小量 Δ 来说，这种估计和上述对波振幅的估计，暗示我们可以寻找用以下渐近级数形式表示的扰动场的解：

$$\phi_n(x,y,t,T,\Delta)=|\Delta|^{1/2}\phi_n^{(1)}+|\Delta|\phi_n^{(2)}+|\Delta|^{3/2}\phi_n^{(3)}+\cdots\cdots,\qquad n=1,2, \tag{7.16.11}$$

式中各个 $\phi_n^{(i)}$ 与 Δ 无关。扰动位涡 q_n 也有类似的展开式，即

$$q_n(x,y,T,\tau,\Delta)=|\Delta|^{1/2}q_n^{(1)}+|\Delta|q_n^{(2)}+|\Delta|^{3/2}q_n^{(3)}+\cdots\cdots. \tag{7.16.12}$$

如果我们假设运动在 $y=0$ 和 $y=1$ 处有刚性边界，则因在此处经向速度为零，故我们要求

$$y=0,1\ \text{处},\quad \frac{\partial \phi_n}{\partial x}=0. \tag{7.16.13}$$

发展中的扰动场部分，也一定表示波动诱发的纬向流变化。对于流场与 x 无关的部分，(7.2.15）式必定适用于各层，即

$$\frac{\partial^2\overline{\phi}}{\partial y\partial t}=0, \tag{7.16.14}$$

式中上横线表示扰动场的纬向平均。

把（7.16.11）式代入（7.16.9a,b）中，令 $\Delta^{1/2}$ 的同阶项相等，于是得到一系列线性问题，其中第一个是 $O(\Delta^{1/2})$ 问题，即

$$\left[\frac{\partial}{\partial \tau}+(U_2+U_c)\frac{\partial}{\partial x}\right][\nabla^2\phi_1^{(1)}-\hat{F}(\phi_1^{(1)}-\phi_2^{(1)})]+(\beta+\hat{F}U_c)\frac{\partial \phi_1^{(1)}}{\partial x}=0, \tag{7.16.15a}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial\tau}+U_2\frac{\partial}{\partial x}\right]\left[\nabla^2\phi_2^{(1)}-\hat{F}(\phi_2^{(1)}-\phi_1^{(1)})\right]+(\beta-\hat{F}U_c)\frac{\partial\phi_2^{(1)}}{\partial x}=0. \tag{7.16.15b}$$

若扰动形式为

$$\begin{aligned}\phi_1^{(1)}&=ReA_1e^{ik(x-c\tau)}\sin m\pi y,\\ \phi_2^{(1)}&=ReA_2e^{ik(x-c\tau)}\sin m\pi y,\end{aligned} \tag{7.16.16}$$

式中 m 是任意整数，使得

$$K^2=k^2+m^2\pi^2, \tag{7.16.17}$$

则方程（7.16.15a.b）对等于 $U_c(K)$ 的切变 U_S 提出了边缘中性波问题。若用 U_c 代替 U_s，则可从（7.11.13）式和（7.11.23）式直接得到其解为

$$\frac{A_2}{A_1}=\gamma=\frac{K^2+\hat{F}}{\hat{F}}+\frac{\beta+\hat{F}U_c}{\hat{F}(c-U_2-U_c)}=\left[\frac{K^2+\hat{F}}{\hat{F}}+\frac{\beta-\hat{F}U_c}{\hat{F}(c-U_2)}\right]^{-1}, \tag{7.16.18}$$

而且

$$c=U_2+\frac{U_c}{2}-\frac{\beta(K^2+\hat{F})}{K^2(K^2+2\hat{F})}. \tag{7.16.19}$$

γ 和 c 都是实数。精确到 $|\Delta|^{1/2}$ 的量级，上下层波振幅之大小不等，但位相相同。因为波动是无粘的，在线性理论中两层间的位相差与 c_i 成正比，而对于边缘波 c_i 为零。真正关键的问题是，方程（7.16.15a，b）是只含"快"时间 τ 的微分方程，所以 A_1 和 A_2 可认为是"慢"时间 T 的任意函数，即

$$\begin{aligned}A_1&=A(T),\\ A_2&=\gamma A(T)\end{aligned} \tag{7.16.20}$$

以下分析的目的是确定 A 随 T 变化的函数关系。对分析来说，最重要的简化是，由（7.16.16）式和（7.16.18）式给出的 $O(\Delta^{1/2})$ 波场的空间结构，可以在确定 $A(T)$ 之前，就被独立地确定出来。

从（7.16.15a，b）可以得出，

$$\begin{aligned}q_1^{(1)}&=-\frac{\beta+\hat{F}U_c}{U_2+U_c-c}ReAe^{ik(x-ct)}\sin m\pi y=-\frac{\beta+\hat{F}U_c}{U_2+U_c-c}\phi_1^{(1)},\\ q_2^{(1)}&=-\frac{\beta-\hat{F}U_c}{U_2-c}Re\gamma Ae^{ik(x-c\tau)}\sin m\pi y=-\frac{\beta-\hat{F}U_c}{U_2-c}\phi_2^{(1)}\end{aligned} \tag{7.16.21}$$

由此可得

$$J(\phi_1^{(1)},q_1^{(1)})=J(\phi_2^{(1)},q_2^{(1)})\equiv0, \tag{7.16.22}$$

这是因为每个 $q_n^{(1)}$ 只是 $\phi_n^{(1)}$ 的常数倍，由于 γ 是实数，即由于精确到 $O(\Delta^{1/2})$ 时，波动是中性波，所以波动场的位涡通量必定为零。实际上，和罗斯贝波的情况一样，若 Δ 恰好为零，则边缘波是非线性方程的精确解。当然，全部问题在于 Δ 很小，但又不恒等于零。

二阶问题由（7.16.9a，b）、（7.16.11）和（7.6.12）式中出现的 $O(\Delta)$ 项组成，即

$$\left[\frac{\partial}{\partial\tau}+(U_2+U_c)\frac{\partial}{\partial x}\right]\left[\nabla^2\phi_1^{(2)}-\hat{F}(\phi_1^{(2)}-\phi_2^{(2)})\right]$$

$$+(\beta+\hat{F}U_c)\frac{\partial\phi_2^{(2)}}{\partial x}=-\frac{\partial}{\partial T}q_1^{(1)}, \tag{7.16.23a}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial \tau}+U_2\frac{\partial}{\partial x}\right][\nabla^2\phi_2^{(2)}-\hat{F}(\phi_2^{(2)}-\phi_1^{(2)})]$$

$$+(\beta-\hat{F}U_c)\frac{\partial \phi_2^{(2)}}{\partial x}=-\frac{\partial}{\partial T}q_2^{(1)}, \tag{7.16.23b}$$

推导过程中已用到（7.16.22）式。右端的非齐次项中都有形如 $e^{ik(x-c\tau)}\sin m\pi y$ 的因子，这是（7.16.23a,b）的自由解的形式，而（7.16.23a,b）的齐次部分与（7.16.15a,b）完全一样。这似乎会在 $\phi_n^{(2)}$ 中引起强迫共振，然而这是假象，通过寻找（7.16.23a,b）的如下形式的特解就可以看清这点，

$$\phi_n^{(2)}=ReA_n^{(2)}e^{ik(x-c\tau)}\sin m\pi y. \tag{7.16.24}$$

把（7.16.21）和（7.16.24）式代入（7.16.23a,b）中，借助于（7.16.18）式，容易得到

$$-\gamma A_1^{(2)}+A_2^{(2)}=\frac{1}{ik\hat{F}}\ \frac{dA}{dT}\ \frac{\beta+\hat{F}U_c}{(U_2+U_c-c)^2}, \tag{7.16.25a}$$

$$-A_2^{(2)}+\gamma A_1^{(2)}=\frac{\gamma^2}{ik\hat{F}}\ \frac{dA}{dT}\ \frac{\beta-\hat{F}U_c}{(U_2-c)^2}. \tag{7.16.25b}$$

两个方程相加得到条件：

$$\frac{dA}{dT}\left[\frac{\beta+FU_c}{(U_2+U_c-c)^2}+\gamma^2\frac{\beta-FU_c}{(U_2-c)^2}\right]=0. \tag{7.16.26a}$$

如果振幅在与斜压不稳定有关的时间尺度上变化，则与 dA/dT 相乘的方括号中各项的集合必为零。对于这里讨论的基本流，线性不稳定的必要条件（7.10.5）就是

$$c_i\left\{\int_{-1}^{1}dy\left[|\Phi_1|^2\frac{\beta+\hat{F}U_s}{|U_1-c|^2}+|\Phi_2|^2\frac{\beta-\hat{F}U_s}{|U_2-c|^2}\right]\right\}=0. \tag{7.16.26b}$$

边缘稳定波对应于极限 $U_1-U_2=U_s\to U_c$，同时 Φ_2/Φ_1 趋于 γ。所以，对边缘稳定波来说，满足 c_i 略不为零的(7.16.26b）式，又意味着（7.16.26a）式中的括号项为零。c_i 略不等于零的条件，直接类似于 A 随时间缓慢变化（即 $dA/dT\neq 0$）的条件。事实上，满足（7.16.26a)，可以把边缘中性波与 $U_s=U_c$ 时波数 K^2 取其他值的中性波区别开。只有波数为 K^2 的边缘稳定波才满足（7.16.26a)，因为只有这个波，在参数值上直接与不稳定波邻接，如果愿意的话，读者可用（7.16.1)、(7.16.18）和（7.16.19）式，通过直接计算（7.16.26a）中的各项来验证方括号项为零。

因此，(7.16.25a,b）的两个方程中有一个是多余的。求解 $A_2^{(2)}$ 得

$$A_2^{(2)}=\gamma A_1^{(2)}+\frac{dA}{dT}\ \frac{\beta+\hat{F}U_c}{(U_2+U_c-c)^2}(ik\hat{F})^{-1}. \tag{7.16.27}$$

比较（7.16.27）和（7.16.20）式可看出，(7.16.27）式右边第一项代表对 $O(\Delta^{1/2})$ 基本模态的补充。如果我们认为（A,γA）表示具有边缘中性结构的波的全振幅，则可令 $A_1^{(2)}$ 等于零。这时精确到 $O(|\Delta|)$ 的波动形式为：

$$\begin{aligned}\phi_1&=|\Delta|^{1/2}\phi_1^{(1)}+|\Delta|\phi_1^{(2)}+\cdots\cdots\\&=|\Delta|^{1/2}Re[Ae^{ik(x-c\tau)}\sin m\pi y],\end{aligned} \tag{7.16.28a}$$

$$\begin{aligned}\phi_2&=|\Delta|^{1/2}\phi_2^{(1)}+|\Delta|\phi_2^{(2)}+\cdots\cdots\\&=|\Delta|^{1/2}Re\left[\gamma+\frac{|\Delta|^{1/2}}{ik\hat{F}}\ \frac{\beta+\hat{F}U_c}{(U_2+U_c-c)^2}\ \frac{1}{A}\ \frac{dA}{dT}\right]Ae^{ik(x-c\tau)}\sin m\pi y.\end{aligned} \tag{7.16.28b}$$

如果$A^{-1}\,dA/dT$有非零的实部，则上下层之间将有位相差。若 $Re(A^{-1}\,dA/dT)$ 为正，则上层波动将滞后于下层波动，即假定有一个满足扰动有效位能增长的位相结构。如果$A^{-1}\,dA/dT=kc_i$（即如果波动象线性理论那样增长），那末（7.16.28b）中的括号项只表示与（7.16.18）稍有不同的γ，它起因于c有很小的虚部即$c_i=O(|\Delta|^{1/2})$。到此量级为止，多时间尺度方法，实际上只是重新得出了线性理论的关系。该理论最主要的成果在于，这些微妙而重要的位相关系是用迄今未知的振幅随时间变化的特性来表达的，完全不需要把注意力局限于最终要失效的指数增长的解上。

我们现在对特解（7.16.28a,b）加上（7.16.23a,b）的齐次解：

$$\phi_n^{(2)}=\Phi_n^{(2)}(y,T). \tag{7.16.29}$$

这些解表示纬向流的$O(\Delta)$修正量，而且明显地满足（7.15.23a,b）的齐次部分，因为它们只是y和慢时间变量T的函数。在展开式的每一阶段上，这类解都可以加上去，但是(正如我们很快就要看到的那样)，(7.16.29）式是波动的非线性自相互作用所要求的首阶附加项。在前一阶段上的这类附加项，只会改变我们所要研究的基本状态的廓线。为清晰起见，把精确到$O(|\Delta|)$的总的扰动流函数改写如下：

$$\begin{aligned}\phi_1&=|\Delta|^{1/2}Re\,Ae^{ik(x-cT)}\sin m\pi y+|\Delta|\,\Phi_1^{(2)}(y,T)+\cdots\cdots,\\ \phi_2&=|\Delta|^{1/2}Re\left[\gamma A+\frac{|\Delta|^{1/2}}{ik\hat{F}}\frac{\beta+\hat{F}U_c}{(U_2+U_c-c)^2}\frac{dA}{dT}\right]\\ &\quad\times e^{ik(x-cT)}\sin m\pi y+|\Delta|\,\Phi_2^{(2)}(y,T)+\cdots\cdots,\end{aligned} \tag{7.16.30}$$

而相应的扰动位涡是

$$q_n=|\Delta|^{1/2}q_n^{(1)}+|\Delta|\,q_n^{(2)}, \tag{7.16.31}$$

式中$q_n^{(1)}$由（7.16.21）式给出，而

$$q_1^{(2)}=Re\left[\frac{\beta+\hat{F}U_c}{(U_2+U_c-c)^2}\frac{dA}{d_T}\frac{e^{ik(x-cT)}}{ik}\sin m\pi y\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2\Phi_1^{(2)}}{\partial y^2}-\hat{F}(\Phi_1^{(2)}-\Phi_2^{(2)}),\right. \tag{7.16.32a}$$

$$q_2^{(2)}=Re\left[-\frac{K^2+\hat{F}}{ik\hat{F}}\frac{\beta+\hat{F}U_c}{(U_2+U_c-c)^2}\frac{dA}{dT}e^{ik(x-cT)}\sin m\pi y\right]$$
$$+\frac{\partial^2\Phi_2^{(2)}}{\partial y^2}-\hat{F}(\Phi_2^{(2)}-\Phi_1^{(2)}). \tag{7.16.32b}$$

为了确定$A(T)$和纬向气流的变化$\Phi_n^{(2)}(y.T)$，必须考虑$O(|\Delta|^{3/2})$问题。合并（7.16.9a,b）中的$O(|\Delta|^{3/2})$项，可得三阶问题，即

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\partial}{\partial\tau}+(U_2+U_c)\frac{\partial}{\partial x}\right]\left[\nabla^2\phi_1^{(3)}+\hat{F}(\phi_2^{(3)}-\phi_1^{(3)})\right]+\frac{\partial\phi_1^{(3)}}{\partial x}(\beta+\hat{F}U_c)\\ &\quad=-\frac{\partial}{\partial T}q_1^{(2)}-\frac{\Delta}{|\Delta|}\hat{F}\frac{\partial\phi_1^{(1)}}{\partial x}-\frac{\Delta}{|\Delta|}\frac{\partial}{\partial x}q_1^{(1)}\\ &\qquad-J(\phi_1^{(1)},q_1^{(2)})-J(\phi_1^{(2)},q_1^{(1)}),\end{aligned} \tag{7.16.33a}$$

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\partial}{\partial\tau}+U_2\frac{\partial}{\partial x}\right]\left[\nabla^2\phi_2^{(3)}+\hat{F}(\phi_1^{(3)}-\phi_2^{(3)})\right]+\frac{\partial\phi_2^{(3)}}{\partial x}(\beta-\hat{F}U_c)\\ &\quad=-\frac{\partial}{\partial T}q_2^{(2)}+\frac{\Delta}{|\Delta|}\hat{F}\frac{\partial\phi_2^{(1)}}{\partial x}-J(\phi_2^{(1)},q_2^{(2)})-J(\phi_2^{(2)},q_2^{(1)}).\end{aligned} \tag{7.16.33b}$$

(7.16.33a,b) 右边各项已用低阶场、即用$A(T)$和$\Phi_n^{(2)}(y,T)$项表示为已知项。非齐次项分为两类。第一类由与 x 和 τ 无关的项组成。这些项来自含纬向修正的 $(\partial/\partial T)q_n^{(2)}$项。此外，雅可比项包括 $O(|\Delta|^{1/2})$波场及其 $O(|\Delta|)$修正量的乘积。这些正弦项的二次积含有与 x 和 τ 无关的因子。如果用横线表示纬向平均，则读者可以验证：

$$\overline{-J(\phi_1^{(1)},q_1^{(2)})-J(\phi_1^{(2)},q_1^{(1)})}=\frac{\beta+\hat{F}U_c}{4(U_2+U_c-c)^2}\frac{d|A|^2}{d_T}m\pi\sin 2m\pi y,$$

$$\overline{-J(\phi_1^{(2)},q_2^{(2)})-J(\phi_2^{(2)},q_2^{(1)})}=-\frac{\beta+\hat{F}U_c}{4(U_2+U_c-c)^2}\frac{d|A|^2}{dT}m\pi\sin 2m\pi y.$$

(7.16.33a,b) 的每个方程右边与 x 和 τ 无关的项必须为零，否则 $\phi_n^{(3)}$ 将随 τ 或 x 线性增长，最后使展开式 (7.16.11) 的渐近性破坏，且当$|\Delta|^{3/2}\tau$ 变得和 $|\Delta|$ 一样大时，即对于$O(1)$的$|\Delta|^{1/2}\tau$ 或T,展开式将失效。这恰好是有意义的时间尺度，即有限振幅波的演变时间(尺度)。所以，与 x 和 τ 无关的项，必须通过波动产生的扰动位涡自平流和纬向平均位涡(与 x 无关的位涡) 变化之平衡来消去，即

$$\frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{\partial^2\Phi_1^{(2)}}{\partial y^2}-\hat{F}(\Phi_1^{(2)}-\Phi_2^{(2)})\right]=\frac{d}{dT}|A|^2\frac{\beta+\hat{F}U_c}{4(U_2+U_c-c)^2}m\pi\sin 2m\pi y, \qquad (7.16.35a)$$

$$\frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{\partial^2\Phi_2^{(2)}}{\partial y^2}-\hat{F}(\Phi_2^{(2)}-\Phi_1^{(2)})\right]=-\frac{d}{dT}|A|^2\frac{\beta+\hat{F}U_c}{4(U_2+U_c-c)^2}m\pi\sin 2m\pi y, \qquad (7.16.35b)$$

这正是对于我们所讨论的情况计算得到的(7.9.18)式。这些斜压波中的雷诺应力恒等于零，每层的位涡只由分界面高度向北的平流（即向北的热通量）所改变。在无雷诺应力时，纬向流只由作用在平均经向环流上的科氏力所改变。从质量守恒考虑，平均经向环流在两层中必须大小相等方向相反，即对 x 求平均时，一层中向北运动的质量必须等于另一层中向南运动的质量。实际上，由 (7.16.35) 式和边界条件 (7.16.14)，显然有

$$\frac{\partial^2\Phi_n^{(2)}}{\partial y\partial T}=0, \qquad y=0,1, \qquad (7.16.36)$$

由此得出

$$\Phi_1^{(2)}=-\Phi_2^{(2)}=\frac{-[|A|^2-|A(0)|^2]m\pi(\beta+\hat{F}U_c)}{4(4m^2\pi^2+2\hat{F})(U_2+U_c-c)^2}$$

$$\times\left[\sin 2m\pi y-\left(\frac{2m\pi}{(2\hat{F})^{1/2}}\right)\frac{\sinh\left[(2\hat{F})^{1/2}\left(y-\frac{1}{2}\right)\right]}{\cosh(\hat{F}/2)^{1/2}}\right]. \qquad (7.16.37)$$

上式中含有双曲函数，它是作为满足条件 (7.16.36) 所要求的 (7.16.35) 式的齐次解而得到的，式中还有$T=0$ 时的振幅 $A(T)$,这是因为$T=0$时，对 x 平均的运动是由 U_1 和 U_2 给出的基本初始纬向流。纬向垂直切变的修正量是

$$U_1^{(2)}-U_2^{(2)}\equiv-\frac{\partial}{\partial y}[\Phi_1^{(2)}-\Phi_2^{(2)}]=\frac{|A|^2-|A(o)|^2}{4m^2\pi^2+2\hat{F}}\frac{m^2\pi^2(\beta+\hat{F}U_c)}{(U_2+U_c-c)^2}$$

$$\times\left[\cos 2m\pi y-\frac{\cosh\left[(2\hat{F})^{1/2}\left(y-\frac{1}{2}\right)\right]}{\cosh(\hat{F}/2)^{1/2}}\right], \qquad (7.16.38)$$

同时各层 $O(|\Delta|)$位涡梯度的修正是

$$\frac{\partial q_2^{(2)}}{\partial y}=-\frac{\partial q_1^{(2)}}{\partial y}=-\frac{\beta+\hat{F}U_c}{2(U_c+U_2-c)^2}\left[|A|^2-|A(o)|^2\right]m^2\pi^2\cos 2m\pi y. \qquad (7.16.39)$$

$|A|^2>|A(o)|^2$ 时的垂直切变修正量的空间结构，是由 Phillips (1954) 最先算出来的，图 7.16.2(a)给出最不稳定波 $m=1$ 的计算结果。当波振幅由其初值增加时，在 y 区间的大部

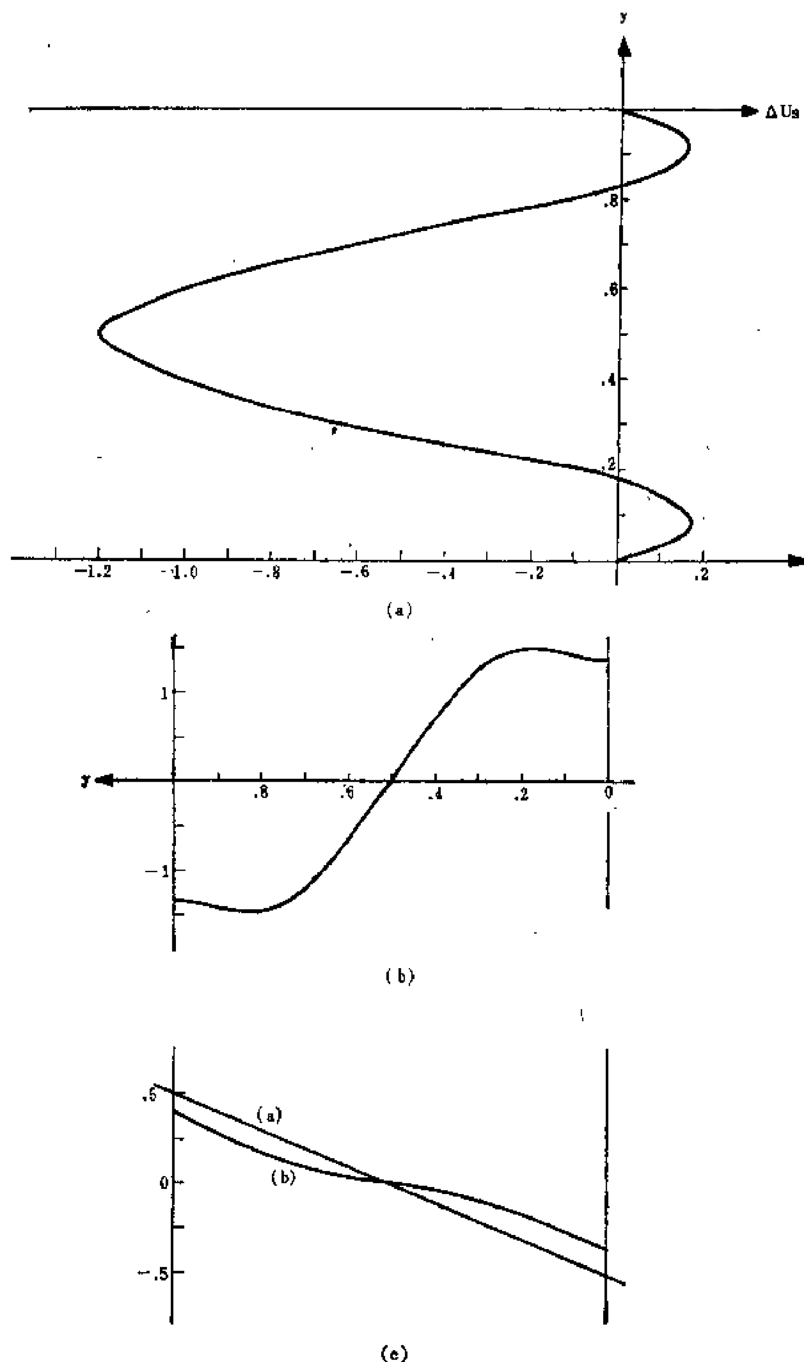


图7.16.2

(a) 在$|A|^2>|A(o)|^2$、$m=1$的情况下，作为增长斜压波调整位涡输送之结果产生的基本纬向垂直切变的修正量。
(b) 由 $m=1$ 的波动场造成的内界面高度的修正量。(c) 曲线 (a) 表示内界面的初始坡度，曲线 (b) 表示当 $\frac{|A|^2-|A(o)|^2}{2(4\pi^2+2\hat{F})}\cdot\frac{\pi(\beta+\hat{F}U_c)}{(U_2+U_c-c)^2}=0.1$时，内界面变化后的形状。

分地方，尤其是波场振幅最大的地方，作用于经向环流上的科氏力使垂直切变减小。这是在增长波汲取平均流有效位能时，对 x 平均的内界面坡度减小的表现形式。图7.16.2(b)给出内界面高度的变化。如果相应的垂直切变减到足够小，则波动增长将停止。虽然平均垂直切变的这种变化仅是 $O(|\Delta|)$，但这恰好是基本状态初始超临界值的量级。位涡梯度的修正，对增长波有比较直接的影响。对 $m=1$ 的波，在下层中这一梯度修正量在通道中心处为正，而且若其足够大，则可抵消基本位涡梯度的 $O(|\Delta|)$ 超临界值。若 $|A|^2<|A(o)|^2$，上述修正量的符号适反，则超临界值增加。因此，有一种内在机制，一方面阻止波动无限增长，另一方面也限制波振幅下降到它的初始值以下。

现在 $A(T)$ 和 $\Phi_n^{(2)}$ 之间的关系式已确定出来。取决于 x 和 τ 的（7.16.33a,b）右边的非齐次项，可以只用 $A(T)$ 来表示。这些非齐次项的一部分与 $e^{ik(x-c\tau)}\sin m\pi y$ 成比例，这是（7.16.33a,b）齐次部分自由解的形式，除非加以适当的限制，否则将对 $\phi_n^{(3)}$ 引起共振响应。我们用以下记号把（7.16.33a,b）改为

$$\mathscr{L}_1(\phi_1^{(3)},\phi_2^{(3)})=M_1(x,y,\tau,T), \tag{7.16.40a}$$

$$\mathscr{L}_2(\phi_2^{(3)},\phi_1^{(3)})=M_2(x,y,\tau,T). \tag{7.16.40b}$$

式中 $\mathscr{L}_n$ 是（7.16.33a,b）左边的线性算子，而 M_n 是每个方程右边的非齐次项。把（7.16.40a,b）式的每个方程乘以 $e^{-ik(x-c\tau)}\cos m\pi y$，并在一个纬向波长和 y 区间上积分，利用 $\phi_n^{(3)}$ 在 x 方向的周期性，经过重复分部积分可得

$$\begin{aligned}
&ik(U_2+U_c-c)[-\gamma\phi_{1,m,k}^{(3)}+\phi_{2,m,k}^{(3)}]\hat{F}\\
&\quad=\int_0^1 dy\int_0^{2\pi/k}dx M_1(x,y,\tau,T)e^{-ik(x-c\tau)}\sin m\pi y\\
&\quad=I_1(T),
\end{aligned} \tag{7.16.41}$$

$$\begin{aligned}
&ik(U_2-c)[-\phi_{2,m,k}^{(3)}+\gamma\phi_{1,m,k}^{(3)}]\hat{F}\\
&\quad=\int_0^1 dy\int_0^{2\pi/k}dx M_2(x,y,\tau,T)e^{-ik(x-c\tau)}\cdot\sin m\pi y\\
&\quad=I_2(T),
\end{aligned}$$

式中

$$\phi_{n,m,k}^{(2)}\equiv\int_0^1 dy\int_0^{2\pi/k}dx e^{-ik(x-c\tau)}\sin m\pi y\,\phi_n^{(3)} \tag{7.16.42}$$

是 $O(|\Delta|^{3/2})$ 波场的振幅，它与 $O(|\Delta|^{1/2})$ 基本波有相同的 x 波数和 y 波数。为了使 $\phi_{n,m,k}^{(3)}$ 保持有限，我们必须要求

$$\frac{I_1(T)}{U_2+U_c-c}+\frac{I_2(T)}{U_2-c}=0. \tag{7.16.43}$$

由于（7.16.33a,b）中的非齐次项取决于 A 和它的导数，故（7.16.43）是求振幅演变的方程，即描写有限振幅波之振幅变化的微分方程。导出（7.16.41），（7.16.42）和（7.16.43）式这几步，必须作大量简单和直接的代数运算——尤其是 M_1 和 M_2 的计算。这一分析所得结果是

$$\frac{d^2A}{dT^2}=k^2C_{0i}^2A-k^2NA[|A|^2-|A(o)|^2], \tag{7.16.44}$$

式中

$$C_{0i}^2=\frac{2\beta^2\hat{F}^2}{K^4(K^2+2\hat{F})^2}\frac{\Delta}{|\Delta|U_c} \tag{7.16.45a}$$

$$N=\frac{(\beta+\hat{F}U_c)U_c m^2\pi^2}{8(U_2+U_c-c)^2(2m^2\pi^2+\hat{F})(K^2+2\hat{F})K^2}\times\Big\{(K^2-\hat{F})(4m^2\pi^2+2\hat{F})$$

$$+(2\hat{F}^2-K^4)\left[1+\frac{4m^2\pi^2\tanh(\hat{F}/2)^{1/2}}{(\hat{F}/2)^{1/2}(2m^2\pi^2+\hat{F})}\right]\Bigg\}. \tag{7.16.45b}$$

注意,(7.16.44) 式右边含 A 的线性项给出线性增长率 kc_{0i},这恰好和弱不稳定波的线性理论结果 (7.11.20) 式相一致。也就是说,(7.16.44) 式中的线性项单独给出如下形式的 A 的解答:

$$A(T)\sim A(0)\exp(kc_{0i}T)=A(0)\exp(kc_{0i}|\Delta|^{1/2}\tau). \tag{7.16.46}$$

然而,随着 A 对初始值 $A(0)$ 的偏离增大,非线性项变得越来越重要。常数 N 是主要的计算结果。若 N 为正,则当 A 增长时,有效增长率

$$\left[\frac{1}{A}\frac{d^2A}{dT^2}\right]^{1/2}=k[C_{0i}^2-N(|A|^2-|A(0)|^2)]^{1/2} \tag{7.16.47}$$

减小,并且增长最终将停止。在所讨论的情况下,N 对边缘曲线上的几乎所有的点都为正,尤其是在最小临界切变(即在 $K^2=\sqrt{2}F$)处,

$$N=\frac{m^2\pi^2(\sqrt{2}-1)^2}{4}>0. \tag{7.16.48}$$

上述非线性稳定指标和波动的最后平衡只是描述振幅动力学性质的一部分。振幅方程 (7.16.44)的形式与一个弹簧力在小振幅时为斥力、大振幅时为恢复力的弹簧谐振子的运动方程一样。利用这一相似性,显然,当 A 达到其极大值时,它不能保持在该点不动,而是开始减小,直到达到与小振幅时的排斥力相一致的最小值为止,然后开始新循环。为了更定量地掌握其特性,记

$$A=R(T)e^{i\alpha(T)}, \tag{7.16.49}$$

式中 R 是实数。把 (7.16.49) 式代入 (7.16.44) 式,分别令实部和虚部为零,首先由虚部为零得到

$$\frac{d}{dT}\left(R^2\frac{d\alpha}{dT}\right)=0, \tag{7.16.50}$$

然后由实部为零得到

$$\frac{d^2R}{dT^2}-R\left(\frac{d\alpha}{dT}\right)^2=k^2c_{0i}^2R-k_2NR[R^2-R^2(0)]. \tag{7.16.51}$$

(7.16.50) 式意味着

$$R^2\frac{d\alpha}{dT}=\mathscr{L}, \tag{7.16.52}$$

其中 $\mathscr{L}$ 是常数;从而使 (7.16.51) 式变为

$$\frac{d^2R}{dT^2}-\frac{\mathscr{L}^2}{R^3}-k^2c_{0i}^2R+k^2NR(R^2-R^2(0))=0. \tag{7.16.53}$$

仍仿谐振子问题,把 (7.16.53) 式乘以 dR/dT 可以得到 (7.16.53) 式的"能量"方程或首积分。于是立即可证明

$$\boxed{E=\frac{1}{2}\left(\frac{dR}{dT}\right)^2+V(R)} \tag{7.16.54}$$

是常数,式中

$$V(R)=-\frac{k^2}{2}[c_{0i}^2+NR^2(0)]R^2+\frac{k^2N}{4}R^4+\frac{\mathscr{L}^2}{2R^2}. \tag{7.16.55}$$

约束关系（7.16.54）完全类似于一个质点的能量方程，该质点位置坐标是 $R(T)$，具有力势 $V(R)$ 和总能量 E，E 由 $T=0$ 时刻 dR/dT 和 R 的值确定。一个特别重要的情况发生在 $A^{-1}dA/dT=kc_{0i}$ 的初始时刻。这相当于使波动的初始结构与线性理论不稳定波之结构一样，随后开始它的演变。因

$$\frac{d\alpha}{dT}=ImA^{-1}\frac{dA}{dT}, \tag{7.16.56}$$

故可以得知 $T=0$ 时，$d\alpha/dT$ 为零。所以 $\mathscr{L}$ 为零，从而 $d\alpha/dT$ 保持为零，且 A 可考虑为实数，并等于 R。在此情况下，

$$V(R)=-\frac{k^2}{2}[c_{0i}^2+NR^2(0)]R^2+\frac{k^2NR^4}{4}, \tag{7.16.57}$$

如图7.16.3所示。振幅演变的许多定性特征可以直接从该图看出。图7.16.3上叉号所示的初始振幅 $R(0)$，总是位于自 $dV/dR=0$ 的“平衡”点算起的“坡”上。这直接反映了波动初始时不稳定并将增长这一事实。dV/dR 为零的点 $R_1=(R^2(0)+c_{0i}^2/N)^{1/2}$ 对应于(7.16.47)式给出的有效增长率为零的点。与一个无摩擦的质点从坡上滑下的情况类似，惯性使振幅通过 R_1 点，并且 R 将继续增大到 $R\max$ 点时为止，在该点处 $V(R_{\max})=E$，即 dR/dT 为零。对于我们所讨论的情况，

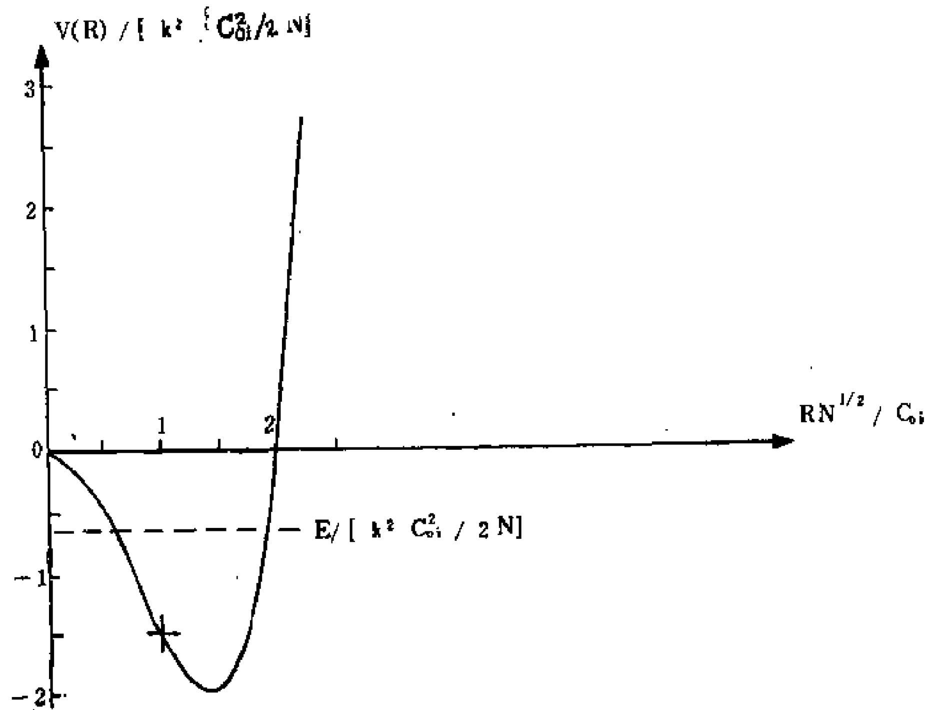


图7.16.3

支配斜压波振幅 R 振荡的“位势” $V(R)$. 在此例中，$R(0)=c_{0i}/N^{1/2}$. dV/dR 为零的“平衡”点在 $R=(2/N)^{1/2}c_{0i}$ 处。相当于一个初始线性增长斜压波的“能量”水平线 E，也在图上给出。E 和 $V(R)$ 的交点确定出振幅振荡中 R 所达到的极大值和极小值。

$$E=\frac{1}{2}\left(\frac{dR}{dT}\right)^2_{T=0}+V(R(0))=-\frac{k^2N}{4}R^4(0), \tag{7.16.58}$$

且如图所示为负值。$V(R)$等于E的点 R_{max} 由

$$R^2_{max}=R^2(0)+\frac{c^2_{0i}}{N}+\frac{c^2_{0i}}{N}\left[1+\frac{2N}{c^2_{0i}}R^2(0)\right]^{1/2} \tag{7.16.59}$$

给出。循环中达到的极小值 R_{min} 由$V(R)-E=0$的较小的根给出。图7.16.3 指出这个极值小于 $R(o)$，实际上它是

$$R^2_{min}=R^2(0)+\frac{c^2_{0i}}{N}-\frac{c^2_{0i}}{N}\left[1+\frac{2N}{c^2_{0i}}R^2(0)\right]^{1/2}. \tag{7.16.60}$$

最初上层波动滞后于下层波动，有效位能释放，波动开始象线性理论所描述的那样增长。当振幅大于其初始值时，纬向流和平均位涡梯度，由于波动产生的热量和位涡之调整输送而发生变化，有效位能减小且平均有效位涡梯度发生改变，直到 $R=R_1$ 时为止，根据线性理论，在那里纬向流变成稳定的。也就是说，在 $R=R_1$ 时，平均纬向流（和初始基本状态相反）的结构，如果与波动场分开考虑的话，那末恰好对无限小扰动是边缘稳定的。诚然，这种情况的出现，只是因为有增长的有限振幅扰动，而且它说明，利用一个实测纬向流的瞬时"拍摄"，来决定它是否能通过不稳定过程而使波动场发展，是不合适的。实际上，在 R_1 处，$A^{-1}dA/dT$ 仍是正值，所以两层波动间仍有位相差。当有有效位能时，波动继续汲取能量而发展，但是在一个根据线性理论为稳定的平均流中增长较慢。在缓慢地减小两层位相差的同时，波动增长到达到 R_{max} 时为止。这时增长停止，位相差为零，不可能再汲取能量。随后波动位相差变号（$dR/dT<0$）且振幅减小，把有效位能馈给纬向流。振幅再次越过平衡点和初始值，直到达到最小值的点，此时波动不再能释放能量。在该点处平均流甚至比初始基本流更不稳定，波动开始在此不稳定基本流上重新增长，摆荡过程继续重复出现。必须再次注意，波动是在平均流稳定（与初始基本流相反）的地方达到其极大振幅的。为了强调这一点，考虑一个最小临界切变处的波动（即$K^2=\sqrt{2}\hat{F}$ 且 $\hat{F}U_c=\beta$）对下层纬向平均位涡梯度的修正量。由（7.16.39）式得

$$|\Delta|\frac{\partial q^{(2)}_2}{\partial y}=-m^2\pi^2\hat{F}\ \frac{|\Delta|}{U_c}[R^2-R^2(0)]\cos 2m\pi y. \tag{7.16.61}$$

在 $R=R_1$ 处，由（7.16.45a）和（7.16.48）式得出

$$R^2-R^2(0)=\frac{c^2_{0i}}{N}=\frac{2U_c\Delta}{m^2\pi^2|\Delta|}. \tag{7.16.62}$$

所以现在有

$$|\Delta|\frac{\partial q^{(2)}_2}{\partial y}=-2\hat{F}\Delta\cos 2m\pi y. \tag{7.16.63}$$

上层纬向流的位涡梯度是 $O(1)$且为正。在下层中，开始时位涡梯度为 $-\hat{F}\Delta$，略小于零。故在点$R=R_1$ 处，总的纬向平均位涡梯度是

$$\frac{\partial\overline{\Pi}_2}{\partial y}=\beta-\hat{F}(U_c+\Delta)-2\hat{F}\Delta\cos 2m\pi y=-\hat{F}\Delta(1+2\cos 2m\pi y). \tag{7.16.64}$$

如 (7.10.5) 式所示，不稳定的必要条件要求，该位涡梯度乘以$|\Phi_2/U_2-c|^2$之后给出负的积分。在本例中，精确到最低阶时，U_2-c是常数且Φ_2与$\sin m\pi y$成正比，不稳定的线性条件要求

$$\int_0^1 \frac{\partial \overline{\Pi}_2}{\partial y}\sin^2 m\pi y dy<0. \tag{7.16.65}$$

然而，利用 (7.16.64) 式得到的结果说明，在$R=R_1$处积分是零，而且实际上对于$R_1<R\leqslant R_{max}$变为正值。所以在波动增长期间，当波动达到有限振幅时，瞬时流速廓线不满足不稳定的必要条件 (7.10.5)。象本章第1节所指出的那样，正是在无波动场时出现的基本状态的稳定性特征，对于解释波动是不稳定的结果来说，才是决定性的判据。

首积分 (7.16.54) 可改写为

$$\left(\frac{dR}{dT}\right)^2=\frac{k^2N}{2}[(R^2_{max}-R^2)(R^2-R^2_{min})], \tag{7.16.66}$$

这启发我们引进变量

$$\xi=\frac{R}{R_{max}},$$

$$\theta=\frac{kN^{1/2}}{2^{1/2}}R_{max}T, \tag{7.16.67}$$

借助于ξ、θ,(7.16.66) 式变为

$$\left(\frac{d\xi}{d\theta}\right)^2=(1-\xi^2)(\xi^2-\kappa'^2), \tag{7.16.68}$$

式中

$$\kappa'^2=\frac{R^2_{min}}{R^2_{max}}. \tag{7.16.69}$$

同样地,(7.16.68) 式可以改写为

$$d\theta=\frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(\xi^2-\kappa'^2)}}. \tag{7.16.70}$$

在振荡中，ξ从κ'增加并增大到1。因此振荡周期是振幅ξ从κ'变到1所需要的时间间隔的两倍；所以T_p由下式给出，

$$T_p=\frac{2^{3/2}}{kN^{1/2}R_{max}}\int_{\kappa'}^1\frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi)^2(\xi^2-\kappa'^2)}}=\frac{2^{3/2}}{kN^{1/2}R_{max}}K(\kappa), \tag{7.16.71}$$

式中$K(\kappa)$是第一类全椭圆积分，即

$$K(\kappa)=\int_0^1\frac{d\mu}{\sqrt{(1-\mu^2)(1-\kappa^2\mu^2)}}, \tag{7.16.72}$$

而

$$\kappa^2=1-\kappa'^2. \tag{7.16.73}$$

当R_{max}增加时，T_p减小（但是当$\kappa\to1$时，$K(\kappa)$呈对数增加)。

振幅本身可从解 (7.16.70) 式并通过椭圆函数得到，即

$$\frac{R}{R_{max}}=dn[(\theta-\theta_0),\kappa], \tag{7.16.74}$$

式中选择θ_0,使得$T=0$时，$R=R(0)$．$R(T)$的构造，取决于κ的大小，即取决于比值R_{min}/R_{max}.用θ表示的振荡周期是$2K(\kappa)$，图7.16.4对几种κ值，给出R随T变化的函数关系。对接近于1的κ,即对$c_{0i}^2/N\gg R^2(0)$，波振幅在其周期的大部分时间上很小，极大值附近的上升和下降比较快。振荡虽是周期性的，但是在较长的时间间隔内是受扰很小的流动，而在较短的时间间隔内出现加强的波动活动。对于$C_{0i}^2/N\ll R^2(0)$波振幅在整个振荡中较均匀（且较小)。

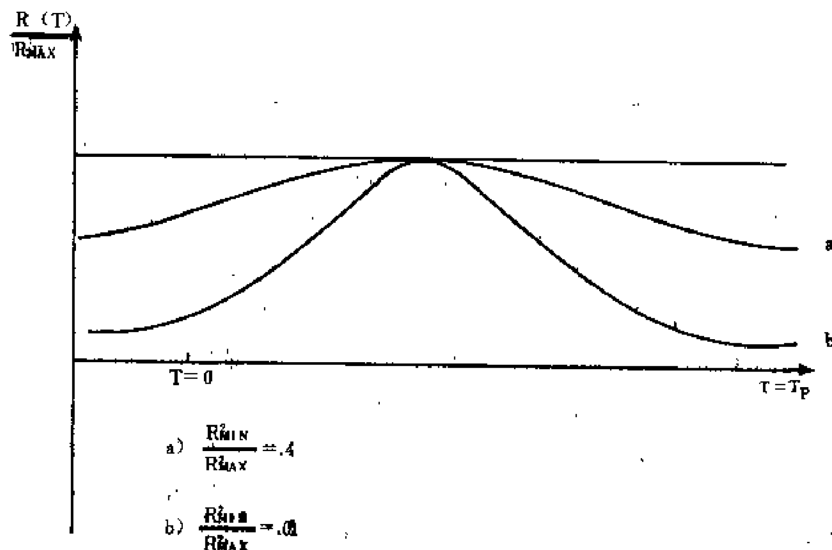


图7.16.4 振幅在一个周期上的振荡形式
(a) $R^2_{min}/R^2_{max}=0.4$，(b) $R^2_{min}/R^2_{max}=0.01$。注意该形式是振幅的函数。

这里的计算结果表明，当不计耗散时，不稳定波的有限振幅和平均流在强度上都有振荡趋势。当时间足够长时（即在远大于振幅的振荡周期时),摩擦必然变成重要项。考虑摩擦之后使问题复杂化。详细讨论有摩擦的情况，超出了本书范围。Pedlosky (1970, 1971) 和 Smith与Reilly (1977) 的计算揭示出下述的一般性质。对于与线性不稳定的e折时间同量级的旋转加强时间$E_V^{-1/2}f^{-1}$，波振幅经过一些初始振荡后，稳定在一个定常值上，此时，从基本流汲取的能量与耗散相平衡。当耗散减小时，或等价地说，当线性增长率增加时（例如增加基本状态的超临界性),波振幅振荡的时间也较长，直到对于足够弱的耗散，振幅在一个极限环中重复不停地振荡。也就是说，在这种耗散很弱的情况下，振幅的振荡具有本节讨论的无粘振荡的形式，而摩擦作用只是把有关初始状态的信息耗散掉。在这种动力平衡状态中，波动本身周而复始地增大与减小，并从基本流中汲取少量的能量，以平衡在一个振荡循环上的耗散。

第八章　非地转运动

8.1　各向异性尺度

前几章中建立的准地转运动理论要求满足几个条件。当然，主要的条件是运动的时间尺度远大于f^{-1}。象3.9节中讨论凯尔文波时所指出的那样，这个条件并不总是充分的。当凯尔文波的波长远比变形半径长时，频率远小于f。但是沿边界方向上的运动方程并不化为地转平衡。沿岸的(1)压力梯度是存在的，它被沿岸速度的加速度所平衡，而且向岸运动恒等于零。这个结果并非不满足以前建立的准地转理论，因为在迄今所讨论的准地转动力学中，我们假定运动只存在一个水平尺度，即运动尺度在水平方向上是各向同性的。低频的凯尔文波在水平方向上不是各向同性的，因为它离岸方向的尺度为变形半径，该尺度对低频运动来说远小于波长。本章中我们考虑对准地转理论作某些改进，在运动是强各向异性时必须作这些改进。

在某些情况（如第五章的惯性边界流理论）下，两种水平尺度的不同，主要影响涡度平衡，而动量平衡在一个可以允许的程度上仍是地转的。然而，如果尺度差异太悬殊，并且压力梯度在一个方向上变得太弱，那末，当那个方向上的压力梯度弱到不能平衡科氏力时，该方向的力的平衡就会改变。此时，根据不同情况，摩擦力或惯性力等其他力就会在力的平衡中起作用。

为了用一个确定的方式说明上述设想，我们来讨论均质不可压流体的运动。首先考虑可以忽略摩擦的最简单的情况，其次只考虑地球球形效应对运动影响不大的运动，即f可取为常数的运动。后一假定要求行星涡度梯度远比其他影响运动的位涡梯度弱，而且这经常表示运动范围较狭窄的情况。

我们把x_*轴选在速度场和压力场速变的方向上，所以，y_*方向上的变化缓慢。令L表示运动在y_*方向上的尺度，l为x_*方向上的尺度，由假设得

$$\frac{l}{L}\ll 1. \tag{8.1.1}$$

同样地，令U是x_*方向的速度尺度，V是y_*方向的速度尺度。引入下述无量纲变量：

$$\begin{aligned} u_* &= Uu, & x_* &= lx,\\ v_* &= Vv, & y_* &= Ly,\\ w_* &= Ww, & z_* &= \delta Lz,\\ & & t_* = t/\sigma. \end{aligned} \tag{8.1.2}$$

(8.1.2)式中带星号的变量是有量纲变量。运动的垂直尺度是δL，其中δ也是小量，时间尺度σ^{-1}满足假设：

$$\frac{\sigma^{-1}}{f}\ll 1. \tag{8.1.3}$$

（1）　沿岸的=平行于边界的。

均质不可压缩流体的连续方程是

$$\frac{V}{L}\ \frac{\partial v}{\partial y}+\frac{U}{l}\ \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{W}{\delta L}\ \frac{\partial w}{\partial z}=0. \tag{8.1.4}$$

我们可以预先假定，无论在水平面内还是在垂直面内，质量通量都可以平衡，(8.1.4)式中各项的量级必须相同。有了这个假定，便可得出熟知的关于相对速度振幅的几何约束：

$$W=\delta V, \tag{8.1.5a}$$

$$U=\frac{l}{L}V\ . \tag{8.1.5b}$$

我们期望快速的 $O(V)$ 运动产生的科氏加速度与 x 方向上的压力梯度的量级相同，所以气压尺度选为

$$p_*=-\rho_0 g z_*+\rho_0 fVlp. \tag{8.1.6}$$

注意，这等价于

$$p_*=-\rho_0 g z_*+\rho_0 fULp. \tag{8.1.7}$$

用无量纲单位表示，y 和 x 方向的运动方程变为

$$\left(\frac{\sigma}{f}\ \frac{L}{l}\right)\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{V}{fl}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\ \frac{\partial v}{\partial z}\right)+u=-\frac{\partial p}{\partial y}, \tag{8.1.8a}$$

$$\left(\frac{\sigma}{f}\ \frac{l}{L}\right)\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{V}{fl}\ \frac{l^2}{L^2}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\ \frac{\partial u}{\partial z}\right)-v=-\ \frac{\partial p}{\partial x}. \tag{8.1.8b}$$

有两种不同的非线性量度。在 x 动量方程中，平流罗斯贝数[利用(8.1.5b)]为

$$\varepsilon_L=\frac{V}{fl}\ \frac{l^2}{L^2}=\frac{U}{fL}=\frac{U}{fl}\ \frac{l}{L}, \tag{8.1.9a}$$

而 y 动量方程中相应的罗斯贝数是

$$\varepsilon_l=\frac{V}{fl}. \tag{8.1.9b}$$

这两个罗斯贝数大小很不一样，因为

$$\frac{\varepsilon_L}{\varepsilon_l}=\frac{l^2}{L^2}\ll 1. \tag{8.1.10}$$

尽管 ε_L 是小量，但若 l/L 足够小的话，ε_l 有可能是$O(1)$量。同样地，由(8.1.8a、b)式可知，适用于局部时间导数的两个罗斯贝数，显然也和平流罗斯贝数有同样的比值（即 l^2/L^2）。σ/f 为小量并不能保证$\sigma L/fl$也是小量。如果ε_L和$(\sigma/f)(l/L)$是小量（即若时间尺度远长于 f^{-1}，而且 l/L 也是小量），则v将处于地转平衡中，即精确到最低阶时，速度的快速分量满足

$$v=\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{8.1.11}$$

若V/fl 或$\sigma L/fl$中有一个为 $O(1)$，则与快速分量垂直的速度就不是地转平衡的。为使第三章和第五章讨论的准地转边界流成立，要求 V/fl 是小量，且在此量级上，理论有一定的误差。对均质流体而言，(8.1.11) 式加上流体静力近似，意味着 v 与 z 无关。这使我们可以使用方程(8.1.8a)，通过 p 来求出 u，即用(8.1.11)式有

$$u=\frac{-\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\sigma}{f}\frac{L}{l}\frac{\partial^2 p}{\partial x\partial t}-\varepsilon_l\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial^2 p}{\partial x\partial y}}{1+\varepsilon_l\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}} \tag{8.1.12}$$

其意义可作如下解释。当 l 是 $O(L)$，且所有时间尺度大于 f^{-1} 时，与 u 产生的加速度相平衡的主要项是 y 方向的压力梯度。对于固定的 l，当L增加时，这一压力梯度减弱，直到 ε_l 或 $(\sigma/f)(L/l)$为 $O(1)$。此时，y 方向压力梯度变得和该方向上非地转的惯性加速度同样弱，而且，这惯性加速度项对该运动分量的 $O(1)$ 动量平衡有贡献。例如，对 y 方向上传播的线性凯尔文波，u 恒等于零，而且若 $\sigma/f\sim l/L$，则对 y 方向弱的压力梯度，低频平衡只能出现在(8.1.12)式分子中的前两项之间。因为 σ 是 $O((gD)^{1/2}/L)$(其中 L 是波长)，所以若l是 $O((gD)^{1/2}/f)$(这正是罗斯贝变形半径，而且实际上是凯尔文波在x方向上的尺度)，则上述项的平衡是成立的。只有一个速度分量为地转平衡的运动被称为半地转运动(Hoskins,1975)。在以下几节中，我们考察某些具有这种半地转性质的动力学现象。有两个普遍问题需要记住。第一，地转平衡在一个方向上的破坏，并不一定意味着惯性加速度是重要的。例如，假若运动完全定常且与 y 无关，则(8.1.12)式括号中量级为$(\sigma/f)(L/l)$ 和 ε_l 的两项恒等于零。在这种情况下，弱耗散的摩擦力可以作为非地转项而参与平衡。我们在 8.3 节中将给出一个例子。第二，动力学问题的处理方法仍与准地转理论相同。这就是说，仔细的尺度分析将得到适当简化的动力学方程组，而且，一个运动分量的地转性质使它与较简单的准地转理论定性相似。对许多过程来说，有益的是首先假设 ε_L 和 ε_l 是小量，并构造简单的准地转模式，然后用它的结果作为 ε_L 为小量、而 ε_l 是 $O(1)$的动力学现象的讨论导引。

8.2 大陆架波

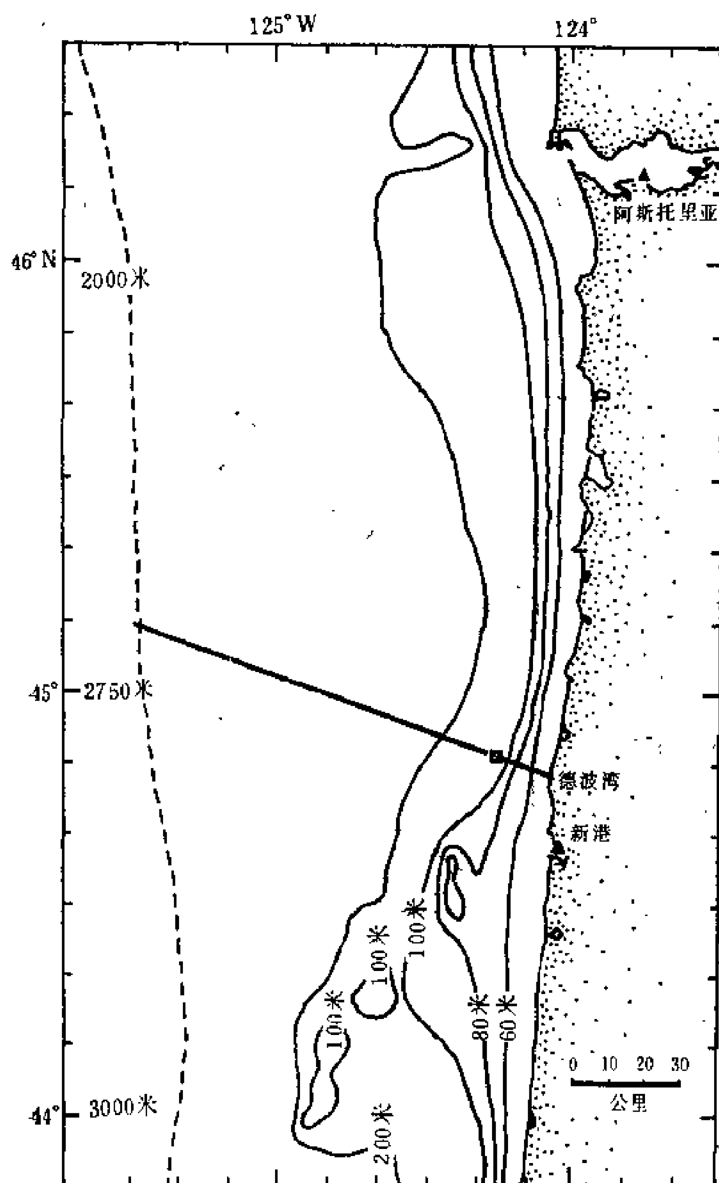
在3.15节中曾导出均质流体准地转地形罗斯贝波的频散关系式，用有量纲形式表示，频率-波数关系式可以写为

$$\sigma_*=-\frac{f\mathbf{K}_*\cdot(\mathbf{Z}\times\nabla_* H_0/D)}{K_*^2+R^{-2}}. \tag{8.2.1}$$

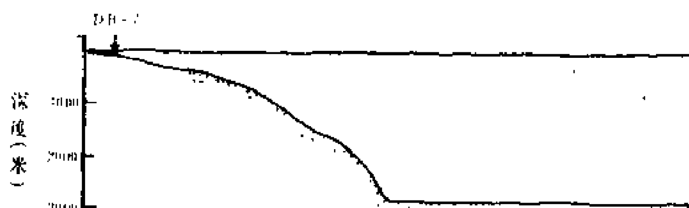
其中 $\mathbf{K}_*$ 是有量纲波矢量，而 R 是(未受扰的)自由面的变形半径$(gD)^{1/2}/f$。在没有运动时，流体层厚度为 H_0，在准地转理论中，我们要求在罗斯贝波长尺度上，H_0 相对于常值 D 的偏差为小量。这后一条件的提出是为了使 σ_*/f 可以为小量。如果 H_0 在波长尺度上的变化量是 $O(1)$，则我们可以根据(8.2.1)式推论，仅当波矢量几乎平行于 $\nabla_* H_0$ 时，σ_*才保持为小量。在那种情况下，流体运动方向很近于沿地形等值线，而只发生很小的涡管伸长，对于有位移的涡管的恢复机制相应也很弱。如果波矢量近于和 $\nabla_* H_0$ 平行，则沿等深线方向的运动之长度尺度远长于与等深线垂直方向上的变化尺度。当流体层厚度变化很大时，这是一个存在低频振荡的有关长度尺度的条件，它恰好满足8.1节所讨论的范畴。

低频地形波理论对地形变化很大的情况之推广，可以直接应用于大陆架波的动力学性质。这些波动沿大陆边缘传播，并存在于大陆架地区。美国俄勒冈近海直接的波动观测(Cutchin 和 Smith,1973)表明，σ_*/f 值的量级为0.2的这种沿岸拦截波是存在的。这些波按其动力学性质来说，基本上是正压的，并且存在于大陆架地形上，如图8.2.1所示。流体层深度在海岸附近很小，且坡度陡降，所以在离岸10或20公里范围内深度就达到 100 米的量级。在那里，

大陆架"坡折"，且更陡地倾斜到几千米的深度上。在垂直于海岸方向出现的运动之特征长度尺度是几十公里，而且由观测资料推断，沿海岸方向振荡之波长如果不是几千公里的话，那就是几百公里。大陆架和大陆坡的陡坡，使准地转理论所要求的、深度变化只是偏离常值之小量的假设不再成立。但正如我们即将看到的那样，显然可应用8.1节的概念得到关于这些波动的理论，它们与准地转理论很相似。



(a)



(b)

图8.2.1

(a) 俄勒冈海岸附近的实测海深，该图表明海洋深度随离岸之距离迅速增加。虚线指出大陆坡基。深度沿粗实线的变化如(b)所示（取自 Cutchin 和 Smith，1973）。

考虑如图8.2.2所示的、以直海岸为其侧边界、且仅在 x 方向上有显著地形变化的海域中的运动。令 L 是沿岸方向波动之特征波长，l 是离岸方向上的尺度。若 x_* 和 y_* 分别由 l 和 L 无量纲化，而 u_* 和 v_* 如(8.1.2)式那样无量纲化，则波动场的线性运动方程就是(8.1.8a,b)的线性形式，它们和连续方程是：

$$\left(\frac{\sigma}{f}\frac{L}{l}\right)\frac{\partial v}{\partial t}+u=-\frac{\partial p}{\partial y}, \tag{8.2.2a}$$

$$\left(\frac{\sigma}{f}\frac{l}{L}\right)\frac{\partial u}{\partial t}-v=-\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{8.2.2b}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

运动是静力的，因为甚至 l 也比大陆架区的特征深度大得多，所以(8.2.2a,b)式中的 u、v 和 p 也与深度无关。根据(8.2.1)式我们预料，波

频率的特征尺度σ满足量级关系：

$$\frac{\sigma}{f}=\frac{l}{L}\ll 1.\tag{8.2.3}$$

所以精确到$O\left(\frac{l^2}{L^2}\right)$时有

$$v=\frac{\partial p}{\partial x},\tag{8.2.4a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u=-\frac{\partial p}{\partial y},\tag{8.2.4b}$$

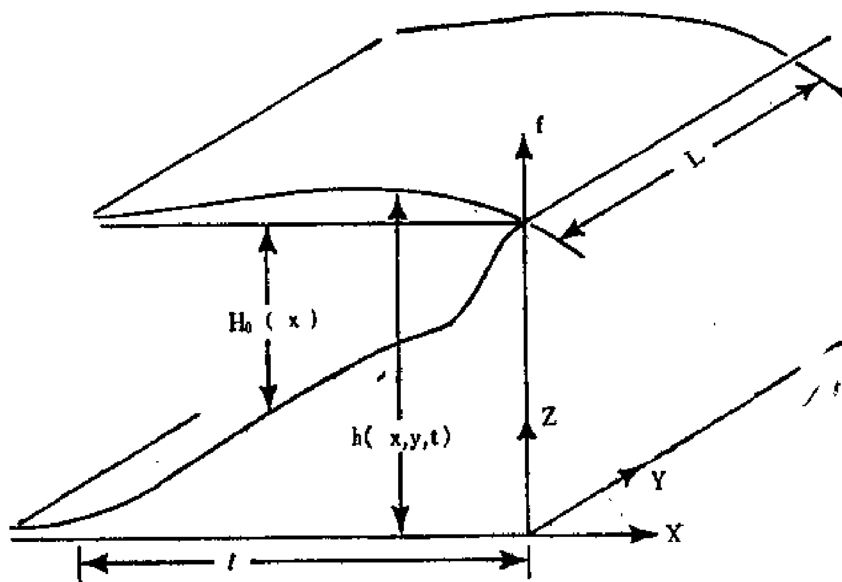


图8.2.2 波动方程(8.2.13)所适用的地形变化很大的区域

二者结合起来得涡度方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)=-\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{\partial w}{\partial z}.\tag{8.2.5}$$

涡度ζ完全由沿岸运动给出，因为

$$\zeta=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}+O\left(\frac{l^2}{L^2}\right).\tag{8.2.6}$$

令η_*是上自由面的位移。显然，要求沿岸运动是与静力平衡匹配的地转运动，意味着

$$\frac{g\eta_*}{l}=O(fV),\tag{8.2.7}$$

所以η_*的尺度分析如下：

$$\eta_*=\frac{V}{fl}\,\frac{f^2l^2}{gD}D\eta(x,y,t)=D\varepsilon_l F\eta,\tag{8.2.8}$$

式中D是该区域的特征深度，且$F=f^2l^2/gD$。注意，$F^{1/2}$是离岸尺度l与变形半径之比。根据线性理论，在上表面处有

$$w_* = \frac{D}{L} V w = \frac{\partial \eta_*}{\partial t_*} = \frac{\sigma}{f} \frac{V}{l} DF \frac{\partial \eta}{\partial t}, \tag{8.2.9a}$$

或者，利用(8.2.3)式有

$$w = F \frac{\partial \eta}{\partial t}, \tag{8.2.9b}$$

而在下边界处有

$$w = \frac{u}{D} \frac{\partial H_0}{\partial x}, \tag{8.2.10}$$

式中 H_0 是无运动时该区流体的有量纲厚度。在流体深度 H_0/D 上，(8.2.5)式的积分给出

$$\left(\frac{H_0}{D}\right) \frac{\partial \zeta}{\partial t} = F \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{u}{D} \frac{\partial H_0}{\partial x}. \tag{8.2.11}$$

由 (8.2.4a)、(8.2.4b)和(8.2.6)式及静力平衡条件有：

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \tag{8.2.12a}$$

$$u = -\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial t}, \tag{8.2.12b}$$

$$\eta = p. \tag{8.2.12c}$$

由此得出，(8.2.11)式可以完全用p来表示：

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{1}{H_0} \frac{\partial H_0}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} - F \frac{D}{H_0} p\right] + \frac{1}{H_0} \frac{\partial H_0}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} = 0. \tag{8.2.13}$$

在准地转理论中，当 H_0 以非微分形式出现时，就可以用 D 代替。在所讨论的情况下，保留 H_0 的全变化，这是由于 H_0 在波动尺度上变化量级是 $O(1)$。

波动方程(8.2.13)可存在 y 方向上行波形式的解答，即

$$p = Re\,\phi(x) e^{i(\alpha y - \omega t)}, \tag{8.2.14}$$

这里 α 是 y 方向上的波数，ω是相应的无量纲频率。把(8.2.14)代入(8.2.13)式得到关于$\phi(x)$的方程，即

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{1}{H_0} \frac{dH_0}{dx} \frac{d\phi}{dx} - \frac{\phi}{H_0}\left[FD + \frac{\alpha}{\omega} \frac{dH_0}{dx}\right] = 0. \tag{8.2.15}$$

现在考虑如图8.2.3所示的理想化的大陆架地形，其表达式为

$$H_0 = \begin{cases} D, & \text{若} x_* < -l, \\ -\gamma D \dfrac{x_*}{l} = -\gamma D x, & \text{若} -l \leqslant x_* \leqslant 0. \end{cases} \tag{8.2.16}$$

对于平坦底的 $x < -1$ 的情况，(8.2.15)式的通解为

$$\phi(x) = A e^{-F^{1/2}(\xi - 1)} + B e^{+F^{1/2}(\xi - 1)}, \tag{8.2.17}$$

式中

$$\xi = -x.$$

为了使 ϕ 在远离海岸的地方有界(即对于很大的正ξ)，(8.2.17) 式中第二个解必须舍弃，故

$$\phi = A e^{-F^{1/2}(\xi - 1)}, \quad \xi > 1. \tag{8.2.18}$$

在该区域中，离岸运动尺度就是变形半径。因为底是平坦的，故可得到波动位涡守恒，即

$$\frac{\partial}{\partial t}(\xi-F\eta)=0, \qquad \xi>1, \tag{8.2.19}$$

若适当注意到(8.2.6)式，可直接由此式得到(8.2.18)式。在倾斜的大陆架上，运动振幅受到地形坡度的显著影响，(8.2.15)式变为

$$x\frac{d^2\phi}{dx^2}+\frac{d\phi}{dx}-\phi\left[\frac{a}{\omega}-\frac{E}{\gamma}\right]=0, \tag{8.2.20}$$

或用 ξ 表示：

$$\xi\frac{d^2\phi}{d\xi^2}+\frac{d\phi}{d\xi}+\phi\left[\frac{a}{\omega}-\frac{F}{\gamma}\right]=0. \tag{8.2.21}$$

(8.2.21)式的通解可以直接用零阶贝塞尔函数写为[1]

$$\phi=aJ_0(2\mu^{1/2}\xi^{1/2})+bY_0(2\mu^{1/2}\xi^{1/2}), \tag{8.2.22}$$

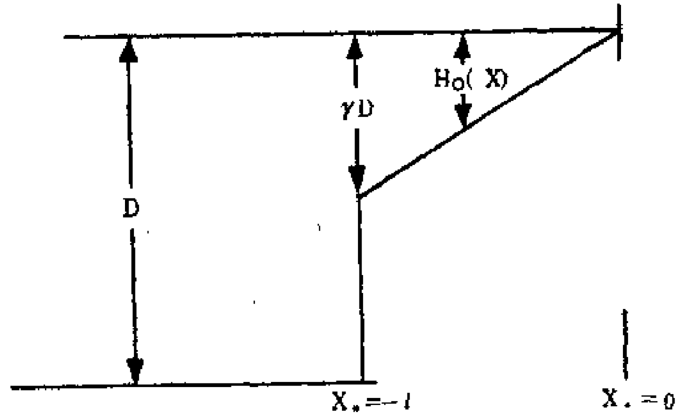


图8.2.3 一个理想化的深度廓线。深海大洋之深度为D。大陆架深度的极大值是γD。

式中

$$\mu=\frac{a}{\omega}-\frac{F}{\gamma}. \tag{8.2.23}$$

上式中第二个解$Y_0(2\mu^{1/2}\xi^{1/2})$在岸边为对数奇点，为了使η在$\xi=x=0$处保持有界而必须把它舍弃。于是

$$\phi(x)=aJ_0(2\mu^{1/2}\xi^{1/2}), \quad 0\leqslant\xi\leqslant1. \tag{8.2.24}$$

在$\xi=1$处两个解必须接合。使解匹配所要求的两个条件是：(i)压力连续；(ii)向岸输送连续。第一个条件要求在$\xi=1$处ϕ是连续的，即

$$aJ_0(2\mu^{1/2})=A。 \tag{8.2.25}$$

用无量纲单位表示的向岸输送是

$$uH_0=-H_0\left[\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial^2 p}{\partial x\partial t}\right]=-H_0\left[\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial^2 p}{\partial\xi\partial t}\right], \tag{8.2.26}$$

它在$\xi=1$处的连续性要求

$$\left[\phi+\frac{\omega}{a}\frac{d\phi}{d\xi}\right]H_0$$

在$\xi=1$处连续，所以在现在的情况下，

$$A\left[1-\frac{\omega}{a}F^{1/2}\right]=a\gamma\left[J_0(2\sqrt{\mu})+\mu^{1/2}\frac{\omega}{a}J_0'(2\sqrt{\mu})\right], \tag{8.2.27}$$

式中J_0'是贝塞尔函数J_0对其辐角的导数。利用恒等式

$$J_0'(x)=-\frac{x}{2}[J_0(x)+J_2(x)] \tag{8.2.28}$$

(1) 可参见附录A1.7节。

并借助(8.2.25)式，可把(8.2.27)式改写为

$$J_0(2\mu^{1/2})\left\{1-[F^{1/2}+F]\frac{\omega}{\alpha}\right\}=-\gamma\left[1-\frac{F}{\gamma}\frac{\omega}{\alpha}\right]J_2(2\mu^{1/2}). \qquad (8.2.29)$$

它和(8.2.23)式的定义共同表示大陆架波的频散关系。注意，

$$\frac{F}{\gamma}=\frac{f_0^2l^2}{g(\gamma D)}$$

同 l 与由大陆架坡折处深度 γD 算出的变形半径之比成正比。对于一个在100米等深线上宽度

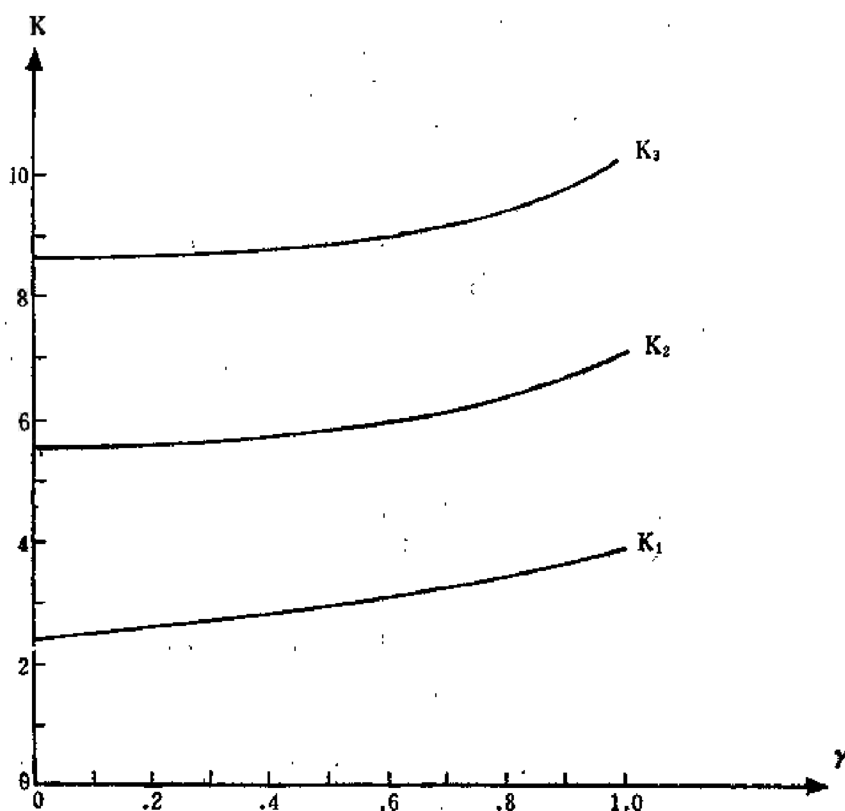


图8.2.4 (8.2.30)式的前三个本征值对 γ 的依赖关系，其中 $K=2\mu^{1/2}$。

为20公里的典型的大陆架，F/γ 是 $O(2\times10^{-3})$。当然，F 甚至会更小，所以在相当好的近似程度上，对于 ω/α 是 $O(1)$ 的波，频散关系式简化为

$$\gamma=-\frac{J_0(2\mu^{1/2})}{J_2(2\mu^{1/2})}. \qquad (8.2.30)$$

对于每个 γ 值，(8.2.30)式有无数个根。把 K_n 定义为满足(8.2.30)式的 $2\mu^{1/2}$ 的第 n 个值。于是，对于小 γ 值，根趋于 $J_0(k)$ 的零点，而且 γ 增长时，相应的根也增加。图 8.2.4 给出(8.2.30)式对于在有物理意义的 γ 区间（即 $0\leqslant\gamma\leqslant1$）上的前三个模态的解。给定模态之频率由(8.2.23)式得出，对于小的 F 值有

$$2\left(\frac{\alpha}{\omega_n}\right)^{1/2}=K_n, \qquad (8.2.31)$$

或者

$$\boxed{\omega_n=\frac{4a}{K_n^2}}, \quad n=1,2,3,\cdots\cdots. \tag{8.2.32}$$

用有量纲单位表示：

$$\omega_{*n}=4f\frac{(a_*l)}{K_n^2}, \tag{8.2.33}$$

式中 a_* 是有量纲的南北向波数 a/L，l 是从海岸到大陆架边缘的距离。注意，在大陆架坡折处，K_n 只是深度的弱函数。

在大陆架区域，每个模态的动力场由以下表达式给出

$$p=\eta=a\cos(\alpha y-\omega t+\theta)J_0(K_n\xi^{1/2}), \tag{8.2.34a}$$

$$v=-\frac{aK_n}{2\xi^{1/2}}\cos(\alpha y-\omega t+\theta)J_1(K_n\xi^{1/2}), \tag{8.2.34b}$$

$$u=-a\alpha\sin(\alpha y-\omega t+\theta)J_2(K_n\xi^{1/2}), \tag{8.2.34c}$$

其中 θ 是任意位相角。根据(8.2.25)和(8.2.30)式；大陆架以外的运动振幅是$O(\gamma)$。所以，对于适当小的 γ 值，运动主要局限于大陆架；而对于大的 γ 值，公海也发生振荡。这有助于解释为什么K 是 γ 的如此弱的函数。对于小的 γ 值，涡管伸缩恢复机制是弱的，但是参加振荡的系统之质量相应也是小的；而对于较大的坡度，虽然恢复机制较强，但系统的有效惯性也较大。

对于小的 γ，在$x_*=-l$ 处的向岸运动几乎为零，且运动实际上与公海隔离开来。在$x=-1$处可以很好地放置一垂直边界而不影响波型之结构。

地形波的相速为正，所以象准地转罗斯贝波那样，位相的传播使得一个跟随波峰运动的观察者看到其右方的环境位涡值较高。大陆架波是非频散波，即对于每个模态来说，频率线性地依赖于 α，所以相速度为常数且等于群速度。用有量纲单位表示：

$$C_{*y}=\frac{4fl}{k_n^2}=\frac{\partial\omega_*}{\partial\alpha_*}. \tag{8.2.35}$$

这个特征相当于罗斯贝波的长波极限情况。大陆架波和罗斯贝波都有这些定性特征，因为它们的波场之基本物理性质是相同的，即恢复机制直接与行星涡度场中的涡管伸长有关。但二者有重要的差别。虽然沿岸速度是地转的，但向岸速度 μ 却不是地转的。我们把地转速度定义为

$$u_g=-\frac{\partial p}{\partial y}=a\alpha\sin(\alpha y-\omega t+\theta)J_0(K_n\xi^{1/2}). \tag{8.2.36}$$

因此，

$$\frac{u_g}{u}=-\frac{J_0(K_n\xi^{1/2})}{J_2(K_n\xi^{1/2})}. \tag{8.2.37}$$

当接近岸边时，即$\xi\to 0$时，有

$$u=O(\xi), \tag{8.2.38}$$

式中 u_g 趋于一个常值。在陆架坡折处，根据(8.2.30)式有 $u_g/u=\gamma$。所以地转向岸速度在海岸附近太大，而在陆架坡折处太小，以至精确度很差。因此，即使

$$\frac{\omega_*}{f}=O(a_*l)\ll 1, \tag{8.2.39}$$

运动的向岸分量的地转偏差也是$O(1)$。

现在我们可以更好地评价忽略行星涡度梯度的理由。在大陆架区，行星涡度梯度对波动的涡度平衡的贡献，和由地形造成的涡管伸长之比为：

$$\frac{v_*\beta_0}{u_* f H_0^{-1}\partial H_0/\partial x}=O\left(\frac{\beta_0 L/l}{f\Delta H/Hl}\right)=O\left(\frac{\beta_0 L/f}{\Delta H/H}\right). \tag{8.2.40}$$

若$\Delta H/H$是$O(1)$，则比值对小于从赤道到极地之距离的南北长度尺度是小量，因为若$\Delta H/H$是$O(1)$，则由深度变化引起的位涡变化是$O(f/H)$，而由南北向运动引起的位涡变化则只是$O(\beta_0 L/H)$。所以当$\Delta H/H$是$O(1)$时，在与β平面近似成立的同样程度上，应当略去大陆架上的β效应。对于大陆架以外的运动，当然应该保留β效应，但是大陆架波在那里的能量可以忽略不计，而且该区的动力学性质对这些拦截模态来说关系不大。

8.3 有耗散的层结流体中的慢环流

上一节讨论的大陆架波之狭窄尺度是由陆架本身的尺度决定的。但是在有的情况下，狭窄尺度l是由流体动力学性质本身固有的动力过程所决定的，而不是由外界影响决定的。这种情况常常出现在边界层理论的范畴内，其中适当的边界层厚度是短尺度。若边界层厚度足够小，则会出现非地转效应。其次，第四章和第五章的讨论说明，边界层区可以同时由几种不同的尺度组成，即可以在较宽的层中包含窄边界层，地转偏差的大小依区域而变。

为了说明上述设想，我们考虑如图8.3.1所示的由应力驱动的风生定常环流。设层结流的厚度D是均匀的，并在平行于y轴的风应力驱动下运动。流体层是半无界的，占据着$-\infty\leqslant x\leqslant 0$的区域。$y$方向应力的存在，意味着在上艾克曼层中有$x$方向的质量通量，而$x=0$处的边界或海岸之存在意味着，为了使流体在接合处或岸边进入艾克曼层，在流体层主要的内区中必须有垂直运动。5.12节曾用一个简单的均质模式讨论过这种过程。层结的存在引入我们感兴趣的新的动力学成分。尤其是，诱生的垂直运动和随之而来的密度异常之间的密切关系，以及与此相关联的热成风场，大大地改变了动力学性质。为了使我们的讨论尽可能简单，象5.12节一样，我们把注意力集中在强度足够弱、以至可忽略非线性效应的相对运动上。此外，我们还假设f是常数。象在5.12节中我们所看到的，这个假定对讨论窄边界层是合适的，在

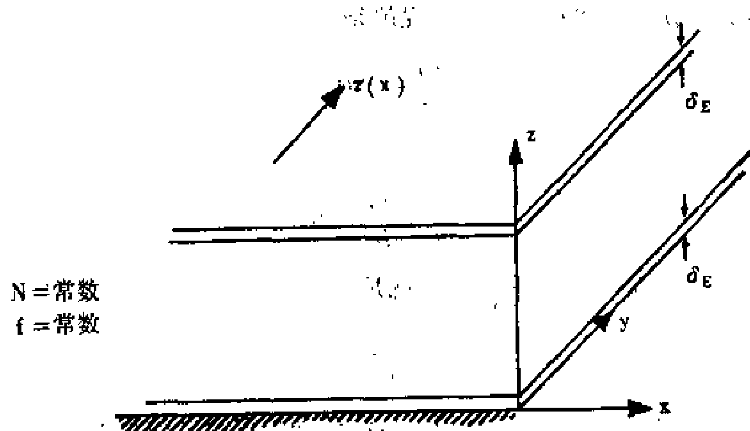


图8.3.1 环流问题的要点。应力$\tau(x)$在上艾克曼层中产生x方向的艾克曼通量、科氏参数f和布伦特-维赛拉频率N是常数。

该边界层中有垂直环流，我们在此把注意力集中在这个边界层上。我们还假定流体是液体，其密度标高远大于流体深度，所以如6.8节所述，在动量方程中除了提供浮力的地方以外，密度的变化可以忽略。令 L 是风应力 τ_* 空间变化的特征尺度，用 L 把水平长度无量纲化。风应力写为

$$\tau_* = \mathrm{j}\tau_0\tau(x), \tag{8.3.1}$$

式中 j 是 y 方向的单位向量，τ_0 是 τ_* 的特征尺度.水平速度尺度的选择，应使上艾克曼层的速度是 $O(1)$ .4.10节的结果表明，速度尺度为

$$U = \frac{2\tau_0}{\rho f D E_V^{1/2}}, \tag{8.3.2}$$

式中

$$E_V = \frac{2A_V}{fD^2}, \tag{8.3.3}$$

且 A_V 是 z 方向的湍流动量混合系数。

若 τ 和 y 无关，那末假定 τ 所产生的环流也与 y 无关似乎是合理的。若假定所有的变量都与 y 无关，则根据(4.5.6a,b)式，线性化的水平动量方程是

$$-v = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{E_V}{2}\mathscr{L}u, \tag{8.3.4a}$$

$$u = \frac{E_V}{2}\mathscr{L}v, \tag{8.3.4b}$$

式中的算子 $\mathscr{L}$ 是：

$$\mathscr{L} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \tag{8.3.5a}$$

而

$$\lambda = \frac{A_V}{A_H}\frac{L^2}{D^2}, \tag{8.3.5b}$$

A_H 是侧向湍流动量混合系数。密度场如(6.8.1)式那样分成两部分。如果 D/L 足够小，则静力近似将始终保持成立，即垂直运动方程就是

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho, \tag{8.3.4c}$$

而连续方程为

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{8.3.4d}$$

ρ 的方程是(6.8.2)式，其线性化形式就是

$$w\left[\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial \rho_s}{\partial z}\right] = -H_*\frac{L}{U}. \tag{8.3.6}$$

H_* 所表示的热量输送可作如下模拟。与湍流动量混合之简单模式相类似，我们写

$$H_* = -\left[\frac{K_V}{D^2}\frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} + \frac{K_H}{L^2}\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}\right](\varepsilon F_s), \tag{8.3.7}$$

该式与(8.3.6)式结合得

$$-wS=\frac{E_V}{2\sigma_V}\frac{\partial^2\rho}{\partial z^2}+\frac{E_V}{2\sigma_H\lambda}\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2},\tag{8.3.8}$$

式中的 S 与以前一样，

$$S=\left[-\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial\rho_s}{\partial z}g\right]\frac{D^2}{f^2L^2}=\frac{N_S^2D^2}{f^2L^2},\tag{8.3.9}$$

而且

$$\sigma_V=\frac{A_V}{K_V},$$

$$\sigma_H=\frac{A_H}{K_H},\tag{8.3.10}$$

分别是垂直方向和水平方向动量输送系数与热量输送系数之比。

在流体上表面处有吸收外加风应力的艾克曼层，这就得出 x 方向的质量通量，根据4.10节的讨论，该通量是

$$M_E^{(x)}=\frac{E_V^{1/2}}{2}\tau(x),\tag{8.3.11}$$

其散度给出艾克曼层以下流体之边界条件，即

$$w=\frac{E_V^{1/2}}{2}\frac{\partial\tau}{\partial x},\quad z=1\text{处},\tag{8.3.12}$$

同样，在流体底部的水平刚性边界上，艾克曼层之存在意味着在下艾克曼层顶处有

$$w=\frac{E_V^{1/2}}{2}\frac{\partial v}{\partial x},\quad z=0\text{处}.\tag{8.3.13}$$

在流体边界处还需规定热力学条件，我们选如下的条件：

$$\frac{\partial\rho}{\partial z}=0,\quad z=0\text{处},\tag{8.3.14a}$$

$$\rho=\rho_T(x),\quad z=1\text{处},\tag{8.3.14b}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial x}=0,\quad x=0\text{处},\tag{8.3.14c}$$

以上第一式表示，运动造成的密度异常不引起穿过下边界的垂直热通量。把上边界的密度给定，并认为在 $x=0$ 处的岸边没有侧向热通量。u 和 v 在岸边必须为零，以满足没有法向运动和无滑动的条件。但是，静力近似使动力学性质得到如此充分的简化，以至不能满足关于 w 的无滑动条件。为此需要有一个极薄的层，在该层中动力学性质是非静力的，且要求其宽度为

$$l_B=\left(\frac{\delta}{\lambda}\right)^{1/2}\frac{E_V^{1/2}}{(\sigma_HS)^{1/4}}.\tag{8.3.15}$$

可以证明，该层（当 $\delta\to0$ 时其相对宽度趋于零）所携运的垂直质量通量可以忽略，而且对于其他主要动力学性质完全是无关紧要的。为了避免这种不必要的麻烦，可以放宽 w 的无滑动条件。

以上提出的问题说明两个要点。当压力场与一个水平坐标无关时，在 p 有变化的那个方

向上，水平速度一定是非地转的。在所讨论的情况下，u 是风应力产生的，且这是环流的一个基本特征，但它处处都不能达到地转平衡。第二，在此情况下，y 方向上的地转运动是最强的运动分量，所以精确到最低阶时，流场主要是处于地转平衡中的直线运动。然而，要确定这种运动，则要求详细地考虑较弱的非地转运动和与它相联系的耗散。这里提出的问题，是直线流环流问题的一个例子，从原则上说，必须在应用第七章的稳定性讨论之前解决直线流问题。象在那里看到的那样，这个过程经常因任意规定地转流函数而使环流不闭合，我们在此说明所要求的环流之性质。

为使问题的解答易于讨论，甚至在这种简化模式中也需要对参数作进一步的限制。当然，我们主要关心

$$E_V \ll 1 \tag{8.3.16}$$

的情况，即象 δ_E 之类与摩擦有关的尺度远小于 L 和 D 的情况。L 是和 τ_* 的空间变化有关的尺度，且该尺度一般远大于内变形半径 L_D，故

$$S^{1/2}=\frac{L_D}{L}=\frac{N_s D}{fL}\ll 1. \tag{8.3.17}$$

比值 σ_H 和 σ_V 难以确定，我们将选择最简单的合理假定：

$$\sigma_H=\sigma_V=\sigma=O(1). \tag{8.3.18}$$

另外，为使以后的分析简单，我们进一步作两个限制：

$$1\ll\lambda, \tag{8.3.19a}$$

$$E_V^{1/2}\ll\lambda\sigma\ll 1. \tag{8.3.19b}$$

上述第一个限制可以解释如下。在垂直混合重要的区域，在尺度

$$L_H=\left(\frac{A_H}{A_V}\right)^{1/2}D \tag{8.3.20}$$

上，水平混合也同样重要。(8.3.5b)式给出的参数 λ 量度比值$(L/L_H)^2$，而(8.3.19a)式只表示，在一远小于 L 的尺度上运动混合所产生的密度异常。(8.3.19b)的意义在以下讨论过程中可以看清。

在流体的内区，选定的尺度适于描写其运动，由(8.3.4a,b,c)可知

$$v_I=\frac{\partial p_I}{\partial x}, \tag{8.3.21a}$$

$$u_I=O(E_V)v_I, \tag{8.3.21b}$$

$$\rho_I=-\frac{\partial p_I}{\partial z}, \tag{8.3.21c}$$

其中下标 I 表示这组方程对内区成立，由(8.3.8)式看出，内区垂直速度为$O(E_V/\sigma s)\rho_I$。因为σS是小量，且根据热成风方程得 ρ_I 和V_I 量级相同，由此可知，w_I 比 u_I 大$O((\sigma S)^{-1})$倍，故质量守恒意味着精确到最低阶时有

$$\frac{\partial w_I}{\partial z}=0. \tag{8.3.22}$$

利用(8.3.12)式，上式给出在整个内区中有：

$$w_I=\frac{E_V^{1/2}}{2}\frac{\partial\tau}{\partial x}. \tag{8.3.23}$$

内区密度场满足

$$\mathscr{L}\rho_I=-\frac{\sigma S}{E_V^{1/2}}\frac{\partial\tau}{\partial x},\tag{8.3.24}$$

且因$\lambda\gg1$，上式直接变成

$$\frac{\partial^2\rho_I}{\partial z^2}=-\frac{\sigma S}{E_V^{1/2}}\frac{\partial\tau}{\partial x},\tag{8.3.25}$$

其满足(8.3.14a,b)的解是

$$\rho_I=\frac{1}{2}\frac{\sigma S}{E_V^{1/2}}\frac{\partial\tau}{\partial x}(1-z^2)+\rho_T(x).\tag{8.3.26}$$

当基本场有层结时，正的风应力旋度及其有关的内区垂直运动，将在整个流体内区诱生出正的密度异常，对该密度异常必须附加上表面加热产生的密度异常。

热成风关系

$$\frac{\partial v_I}{\partial z}=-\frac{\partial\rho_I}{\partial x},\tag{8.3.27}$$

使v_I由下式确定为

$$v_I=-\frac{\sigma S}{2E_V^{1/2}}\frac{\partial^2\tau}{\partial x^2}\left(z-\frac{z^3}{3}\right)-z\frac{\partial\rho_T}{\partial x}+V_0(x),\tag{8.3.28}$$

式中$V_0(x)$是任意正压运动，它显然不受热成风关系的约束。然而，利用(8.3.23)和(8.3.28)式，则(8.3.13)式意味着在$z=0$处，

$$w=\frac{E_V^{1/2}}{2}\frac{\partial\tau}{\partial x}=\frac{E_V^{1/2}}{2}\frac{dV_0}{dx},\tag{8.3.29}$$

或者

$$V_0=\tau(x)+c,\tag{8.3.30}$$

式中c是任意常数。由(8.3.11)式得，上艾克曼层中总的向岸质量通量是$(E_V^{1/2}/2)\tau(x)$，而由(4.3.31)式得，下艾克曼层中总的离岸质量通量是

$$\frac{E_V^{1/2}}{2}V_0=\frac{E_V^{1/2}}{2}(\tau+c).\tag{8.3.31}$$

在u非常小的内区中，质量通量可以忽略不计，为了使总的向岸通量可以与离岸通量平衡，c必须为零，或者

$$V_0=\tau(x).\tag{8.3.32}$$

所以，内区运动完全由风应力和表面密度局部值之性质决定。这只适用于远离$x=0$处边界的情况。它使人联想到正压流体的动力学性质，而且可用下述方式理解：虽然运动不是正压的，且存在热力驱动之流动，但运动尺度远大于变形半径，致使动力学约束是正压的，即(8.3.22)式实际上是泰勒-普劳德曼定理的结果，后者当$S\ll1$时适用于内区。

内区场不满足$x=0$的边界条件，即不满足v的无滑动条件或ρ的孤立条件。更引人注意的是，如图8.3.2所强调指出的那样，除非$\tau(x)$在岸边正好为零，否则质量通量回路在内区中是不封闭的。例如，若当$x\to-\infty$时$\tau(x)$为零，内区中总的垂直通量是

$$\frac{E_V^{1/2}}{2}\int_{-\infty}^{0}\frac{\partial\tau(x)}{\partial x}dx=\frac{E_V^{1/2}}{2}\tau(o),\tag{8.3.33}$$

所以如图所示，垂直质量通量$-E_V^{1/2}\tau(0)/2$必然产生于$x=0$的边界层内，边界层必须足够窄，致使边界层动力学性质与内区有显著不同。此时必定违背泰勒-普劳德曼约束，所以w不再直接通过(8.3.23)式与τ的局部值相联系。因此，(8.3.22)式不再适用，而这又暗示了局部水平运动尺度使得基于该尺度得到的S是$O(1)$。也就是说，为了使连续方程的两项之量级均相同，使垂直质量通量返回的流体层的水平尺度必须是变形半径之量级。现在我们可以或者重新开始选择新的长度尺度，以使方程无量纲化；或者等价地且较为方便地通过引进下述新的边界层变量

$$\xi=-\frac{x}{(\sigma_H S)^{1/2}},\tag{8.3.34}$$

即

$$\xi=-\left(\frac{x_*}{L_D}\right)\frac{1}{(\sigma_H)^{1/2}}$$

来研究狭窄的上升区，故ξ是以变形半径为尺度的x坐标。(8.3.34)式中引入因子

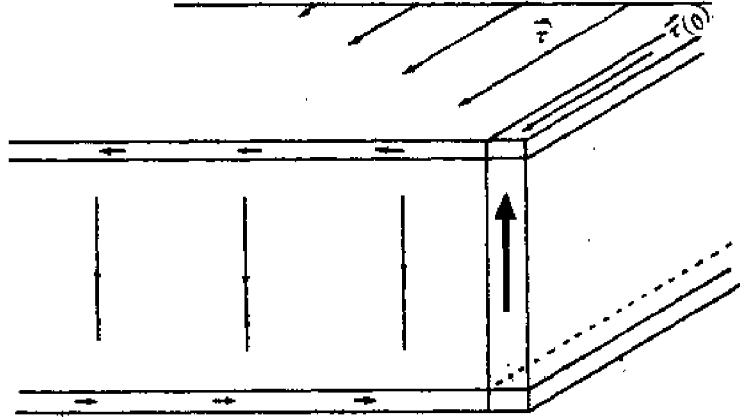


图8.3.2　风生环流的示意图，内区中的下沉运动必须由边界中的强上升流所补偿。

σ_H是为了分析的方便。考察在该尺度上的动力学性质，只要求把这个边界层区的每个变量考虑为z和ξ的函数。于是每个场的大小容易确定。由于该区宽度是$(\sigma S)^{1/2}$，且该区总的垂直质量通量一定为$O(E_V^{1/2})$，故该区中垂直速度一定为$O(E_V^{1/2}/(\sigma s)^{1/2})$。此时连续方程表示$u$在该区中为$O(E_V^{1/2})$，利用(8.3.4b)式，这又意味着$v$为$O(\lambda\sigma S/E_V^{1/2})$。$y$方向的运动仍处于地转平衡中，这就确定了$p$的适当尺度为$\lambda(\sigma S)^{3/2}/E_V^{1/2}$，而且静力关系也在上升流层中把后者之大小定为$\rho$的尺度。所以在此区域内，

$$w=\left(\frac{E_V}{\sigma S}\right)^{1/2}\tilde{W}(\xi,z),\tag{8.3.35a}$$

$$u=E_V^{1/2}\tilde{u}(\xi,z),\tag{8.3.35b}$$

$$v=\frac{\lambda\sigma S}{E_V^{1/2}}\tilde{v}(\xi,z),\tag{8.3.35c}$$

$$p=\frac{\lambda(\sigma S)^{3/2}}{E_V^{1/2}}\tilde{p}(\xi,z),\tag{8.3.35d}$$

$$\rho=\frac{\lambda(\sigma S)^{3/2}}{E_V^{1/2}}\tilde{\rho}(\xi,z),\tag{8.3.35e}$$

式中记号～表示适合于宽度为变形半径的层中的变量。这个边界层叫流体静力层，以区别于(8.3.15)式描述的窄层，在该窄层中w如(8.3.35a)式给出的那样大，但它所产生的质量通量可以忽略不计，即有关的通量量级是

$$\frac{l_B}{(\sigma S)^{1/2}}=\left[\frac{\delta E_V}{\lambda(\sigma S)^{1/2}}\right]^{1/2}\ll 1.\tag{8.3.36}$$

把(8.3.35)式代入(8.3.4a,b,c,d)和(8.3.8)式，并利用(8.3.34)式得：

$$\tilde{v}=-\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \xi}+O(E_V/\lambda\sigma S), \tag{8.3.37a}$$

$$\tilde{u}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \xi^2}+O(\lambda\sigma S), \tag{8.3.37b}$$

$$-\tilde{w}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial \xi^2}+O(\lambda\sigma S), \tag{8.3.37c}$$

$$-\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}+\frac{\partial \tilde{w}}{\partial z}=0, \tag{8.3.37d}$$

$$\tilde{\rho}=-\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z}. \tag{8.3.37e}$$

条件 $\lambda\sigma S<1$ 保证了流体静力层窄到使密度和动量的水平扩散远大于垂直混合的程度。还要注意，$\tilde{u}$ 完全是由 $\tilde{v}$ 动量的非地转混合产生的。把(8.3.37b)和(8.3.37c)代入(8.3.37d)，随后使用热成风关系

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial z}=\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \xi}, \tag{8.3.38}$$

则容易导出只含$\tilde{v}$的方程：

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial z^2}\right]=0. \tag{8.3.39}$$

为方便起见，可以把每个场分解为内区场与边界层修正场之和，后者当边界层区过渡到其外部区域时必须为零。例如，可把 $\tilde{v}$ 写为

$$\tilde{v}=v_I(x,z)+\frac{\lambda\sigma S}{E_V{}^{1/2}}\tilde{v}_c(\xi,z). \tag{8.3.40}$$

因为动力学方程是线性的，且内区场本身满足同样的动力学方程（但具体的平衡不同），故修正场 $\tilde{v}_C$ 满足与 $\tilde{v}$ 一样的方程。但是边界条件不同，特别是当 $\xi\to\infty$ 时$\tilde{v}_c$必须为零。当然这正是把场变量作如(8.3.40)式那种分解的原因。于是

$$\frac{\partial^2 \tilde{v}_c}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 \tilde{v}_c}{\partial z^2}=0. \tag{8.3.41}$$

在 $z=1$ 处，修正场不受外加应力，因为 τ 被各个场的内区部分所吸收。所以在$z=1$处，

$$\frac{\partial \tilde{v}_c}{\partial z}=0, \tag{8.3.42}$$

而在 $z=0$ 处，使用(8.3.35)式后，(8.3.13)式给出

$$\tilde{w}_C=-\frac{\lambda\sigma S}{E_V{}^{1/2}}\frac{\partial \tilde{v}_c}{\partial \xi}. \tag{8.3.43}$$

我们现在使用$\lambda\sigma S\gg E_V{}^{1/2}$的条件（8.3.19b），可看出其结果是，精确到最低阶时有

$$\tilde{v}_c=0, \qquad z=0. \tag{8.3.44}$$

层结十分强，致使因$\tilde{v}=O(\lambda\sigma S/E_V{}^{1/2})$而抽自下艾克曼层的垂直速度，即$O(\lambda(\sigma S)^{1/2})$的艾克曼$W$太小，以至于不能克服环境垂直密度梯度而上升，后者使W局限于$O(E_V{}^{1/2}/(\sigma S)^{1/2})$。

这些垂直速度之比为:

$$\frac{\text{艾克曼抽吸作用}}{\text{边界层垂直速度}}=O\left(\frac{\lambda\sigma S}{E_V^{1/2}}\right). \tag{8.3.45}$$

对于 $\lambda\sigma S/E_V^{1/2}\gg 1$，抽自艾克曼层的垂直速度和艾克曼层以上层结流体可以接受的垂直速度显然是不匹配的[1]。为了解决这一不匹配问题，y 方向的速度必须自身调节，使得精确到 $O(\sigma S/E_V^{1/2})$时，$z=0$处的 v 为零，所以使抽自下艾克曼层的 w 不大于$O(E_V^{1/2}/(\sigma S)^{1/2})$。这种重要层结之存在，保证了水平速度无需借助艾克曼层即可满足下边界处的无滑动条件。这种约束是由层结的存在产生的，且借助于 $\tilde{v}_C$ 的垂直切变而得到满足，后者又仅当层结存在时才有可能。方程(8.3.41)的满足无限远处为零、及满足(8.3.42)和(8.3.44)式的解是[2]

$$\tilde{v}_c=\sum_{n=0}^{\infty}V_n e^{-\mu_n\xi}\sin\mu_n z,\quad \mu_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi, \tag{8.3.46a}$$

利用此式得

$$\tilde{\rho}_C=-\sum_{n=0}^{\infty}V_n e^{-\mu_n\xi}\cos\mu_n z, \tag{8.3.46b}$$

$$\tilde{u}_c=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}V_n\mu_n^2 e^{-\mu_n\xi}\sin\mu_n z, \tag{8.3.46c}$$

$$\tilde{w}_C=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}V_n\mu_n^2 e^{-\mu_n\xi}\cos\mu_n z. \tag{8.3.46d}$$

在流体静力层中总的垂直质量通量是

$$E_V^{1/2}\int_0^{\infty}\tilde{w}_C d\xi=\frac{E_V^{1/2}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}V_n\mu_n\cos\mu_n z \tag{8.3.47a}$$

$$=-\frac{E_V^{1/2}}{2}\frac{\partial\tilde{\rho}_C}{\partial\xi}(0,z). \tag{8.3.47b}$$

常数 V_n 必须通过与边界层的匹配来确定。在流体静力层中 $\tilde{v}_c$ 远大于 v_I。这是由垂直运动产生的强密度梯度所造成的。但是，v 必须满足 $\xi=x=0$处的无滑动条件。假如流体静力层场是内区场唯一的修正场，则 $\tilde{v}_c$ 在 $\xi=0$ 处必须为零；这将意味着每个 V_n 为零，从而该层将消失。如果我们回忆起在内区中垂直混合作用平衡垂直运动，而在静力层中垂直运动产生的密度异常仅由侧向混合作用所平衡，那末就可以解决上述疑难之处。在垂直混合与水平混合同样重要的地方，在内区和静力层之间需要有一缓冲区。如(8.3.20)式所指出的，这个区域的水平尺度是 L_H，所以，按照这个尺度 λ 是1。用边界层理论来说明，这意味着在静力层和内区之间需要有一个附加边界层，其水平尺度使得该区中的动力场是 z 和边界层变量

$$\eta=-x\lambda^{1/2}=-\frac{x_*}{L_H} \tag{8.3.48}$$

的函数。在静力层和内区之间的区域内，动力场可以写为

$$\bar{v}=v_I(x,z)+\frac{\lambda\sigma S}{E_V^{1/2}}\bar{v}_c(\eta,z), \tag{8.3.49a}$$

---

(1) 欲使适用于流体静力层和艾克曼层交界区的(8.3.13)式成立，要求在此交界区内 $E_V\partial^2/\partial z^2\gg E_V/\lambda(\partial^2/\partial x^2)$。因为 z 方向的尺度是 $O(E_V^{1/2})$，x 方向的尺度是 $O((\sigma S)^{1/2})$，所以只要求 $\lambda\sigma S>E_V$。

(2) 参见附录A1.7节。

$$\bar{\rho}=\rho_I(x,z)+\frac{\lambda^{1/2}\sigma S}{E_V^{1/2}}\bar{\rho}_c(\eta,z), \tag{8.3.49b}$$

$$\bar{p}=p_I+\lambda^{1/2}\frac{\sigma S}{E_V^{1/2}}\bar{p}_c, \tag{8.3.49c}$$

$$\bar{u}=u_I+(\lambda\sigma S)E_V^{1/2}\bar{u}_c, \tag{8.3.49d}$$

$$\bar{w}=w_I+(\lambda\sigma S)\lambda^{1/2}E_V^{1/2}\bar{w}_c, \tag{8.3.49e}$$

式中记号^-c指，为在该区域中表示v、ρ、p等而必须附加到内区场上的修正场。当然，在此区域内，η为$O(1)$，而

$$\xi=-\frac{x}{(\sigma S)^{1/2}}=\frac{\eta}{(\lambda\sigma S)^{1/2}} \tag{8.3.50}$$

是非常大的，所以静力层修正场小得可以忽略不计。条件$\lambda\sigma S\ll1$意味着扩散层远比静力层宽。v的修正振幅由预测确定：即当$x\to0$时，总的v场将比$\lambda=0$时稍微大一点：

$$v=v_I(0,z)+\frac{\lambda\sigma S}{E_V^{1/2}}\bar{v}_c(o,z)+\frac{\lambda\sigma S}{E_V^{1/2}}\tilde{v}_c(o,z), \tag{8.3.51}$$

所以，必须用$\bar{v}_c$和$\tilde{v}_c$来匹配v的无滑动条件。然后，其他场变量的大小由以η和z表示的运动方程来确定，把(8.3.49)式代入基本方程，则可以得出：

$$\bar{v}_c=-\frac{\partial\bar{p}_c}{\partial\eta}+O(E_V^2), \tag{8.3.52a}$$

$$\bar{\rho}_c=-\frac{\partial\bar{p}_c}{\partial z}, \tag{8.3.52b}$$

$$-\frac{\partial\bar{u}_c}{\partial\eta}+\frac{\partial\bar{w}_c}{\partial z}=0, \tag{8.3.52c}$$

$$\bar{u}_c=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\bar{v}_c}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\bar{v}_c}{\partial z^2}\right), \tag{8.3.52d}$$

$$-2\lambda\sigma S\bar{w}_c=\frac{\partial^2\bar{\rho}_c}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\bar{\rho}_c}{\partial z^2}. \tag{8.3.52e}$$

条件$\lambda\sigma S\ll1$意味着精确到最低阶时，

$$\frac{\partial^2\bar{\rho}_c}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\bar{\rho}_c}{\partial z^2}=0. \tag{8.3.53}$$

(8.3.53)式满足η很大时为零，且满足齐次条件[1]

$$\frac{\partial\bar{\rho}_c}{\partial z}=0,\quad 当z=0, \tag{8.3.54}$$

$$\bar{\rho}_c=0,\quad 当z=1$$

的解是

$$\bar{\rho}_c=\sum_{n=0}^{\infty}R_ne^{-\mu_n\eta}\cos\mu_nz,\quad \mu_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi, \tag{8.3.55}$$

（1） 内区密度场当然满足非齐次边界条件(8.3.14a,b)式。

借助上式得

$$\hat{v}_c = -\sum_{n=0}^{\infty} R_n e^{-\mu_n \eta} \sin \mu_n z. \tag{8.3.56}$$

后一表达式也可从热成风方程得出，只是需要象静力层那样补充一个条件：$\hat{v}_c$ 必须在 $z=0$ 处为零，以保证弱的垂直速度和自下艾克曼层抽出的垂直速度之间的匹配。

总的 v 场和 ρ 场的表达式由内区场、扩散层中的修正场、及静力层要求的修正场组成，即

$$v = v_I(x,z) + \frac{\lambda\sigma S}{E_V^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty}\left[V_n e^{-\mu_n \xi} - R_n e^{-\mu_n \eta}\right] \sin \mu_n z, \tag{8.3.57}$$

$$\rho = \rho_I(x,z) + \frac{\lambda\sigma S}{E_V^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty}\left[-V_n(\sigma S)^{1/2} e^{-\mu_n \xi} + \frac{R_n}{\lambda^{1/2}} e^{-\mu_n \eta}\right] \cos \mu_n z.$$

精确到最低阶[即 $O(\lambda\sigma S/E_V^{1/2})$]时，$v$ 的无滑动条件被

$$R_n = V_n \tag{8.3.58}$$

满足。因为

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \rho_I}{\partial x} - \frac{\lambda\sigma S}{E_V^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty}\left[V_n e^{-\mu_n \xi} - R_n e^{-\mu_n \eta}\right] \cos \mu_n z \tag{8.3.59}$$

精确到最低阶时，(8.3.58)式也满足 $x=\eta=\xi=0$ 处 $\partial\rho/\partial x$ 为零的条件。这直接由 v 是地转运动的事实得出；所以，如果 v 在 $x=0$ 处对所有的 z 等于零，则 $\partial v/\partial z$ 为零，而且由热成风关系得 $\partial\rho/\partial x$ 也将为零。

常数 V_n 的确定如下。扩散层中垂直质量通量是 $O(\lambda\sigma S) E_V^{1/2}$，因而是无关紧要的。内区的垂直质量通量是 $O(E_V^{1/2})$，且必须被静力层中的质量通量所平衡，其次，内区的垂直质量通量与 z 无关，故对静力层也同样有上述结果。如图8.3.3所示，静力层由下艾克曼层的质量通量来供给。该通量之大小为 $-(E_V^{1/2}/2)\tau(0)$，而且若如图所示，$\tau(0)$ 为负的话，则该通量等于在其顶部进入上艾克曼层而作离岸运动的质量通量。于是对所有的 z，由(8.3.47)式得

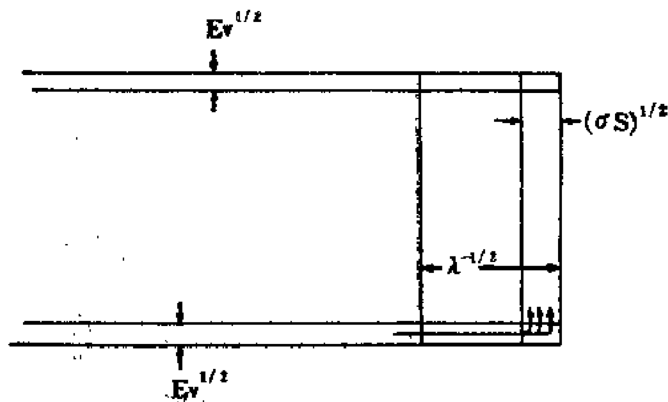


图8.3.3　边界层区和下角区中质量运动的示意图。

$$E_V^{1/2}\int_0^{\infty} \hat{v}_c d\xi = \frac{E_V^{1/2}}{2}\sum_{n=0}^{\infty} V_n \mu_n \cos \mu_n z = -\frac{E_V^{1/2}}{2}\tau(0), \tag{8.3.60}$$

或利用 $\cos \mu_n z$ 在区间(0,1)上的正交关系，(8.3.60)式中的富里叶级数可以反演求得 V_n：

$$V_n = -2\tau(0)\frac{(-1)^n}{\mu_n^2}. \tag{8.3.61}$$

故

$$v = v_I(x,z) - \frac{2\lambda\sigma S}{E_V^{1/2}}\tau(0)\sum_{n=0}^{\infty}(e^{-\mu_n \xi} - e^{-\mu_n \eta})\frac{(-1)^n}{\mu_n^2} \sin \mu_n z, \tag{8.3.62}$$

而略去扩散层中的小修正量，

$$w=w_I(x,z)-\frac{E_V^{1/2}}{(\sigma S)^{1/2}}\tau(0)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-\mu_n\xi}\cos\mu_n z, \tag{8.3.63}$$

重复使用仅当$Re\theta>0$时才成立的恒等式：

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-n\theta}=\frac{1}{1+e^{-\theta}}, \tag{8.3.64}$$

则(8.3.63)式中的级数可以求和，利用(8.3.23)式得到

$$w=\frac{E_V^{1/2}}{2}\frac{\partial\tau}{\partial x}-\frac{E_V^{1/2}}{(\sigma S)^{1/2}}\frac{\tau(0)}{2}\frac{\cos\pi z/2\cosh\pi\xi/2}{\sinh^2\pi\xi/2+\cos^2\pi z/2}. \tag{8.3.65}$$

如果$\tau(0)$为负，则表面应力在上艾克曼层中产生离岸运动。这种离岸质量通量是由宽度为变形半径的边界层内的强垂直运动供给的。图8.3.4给出w在流的横截面上的廓线，它只是

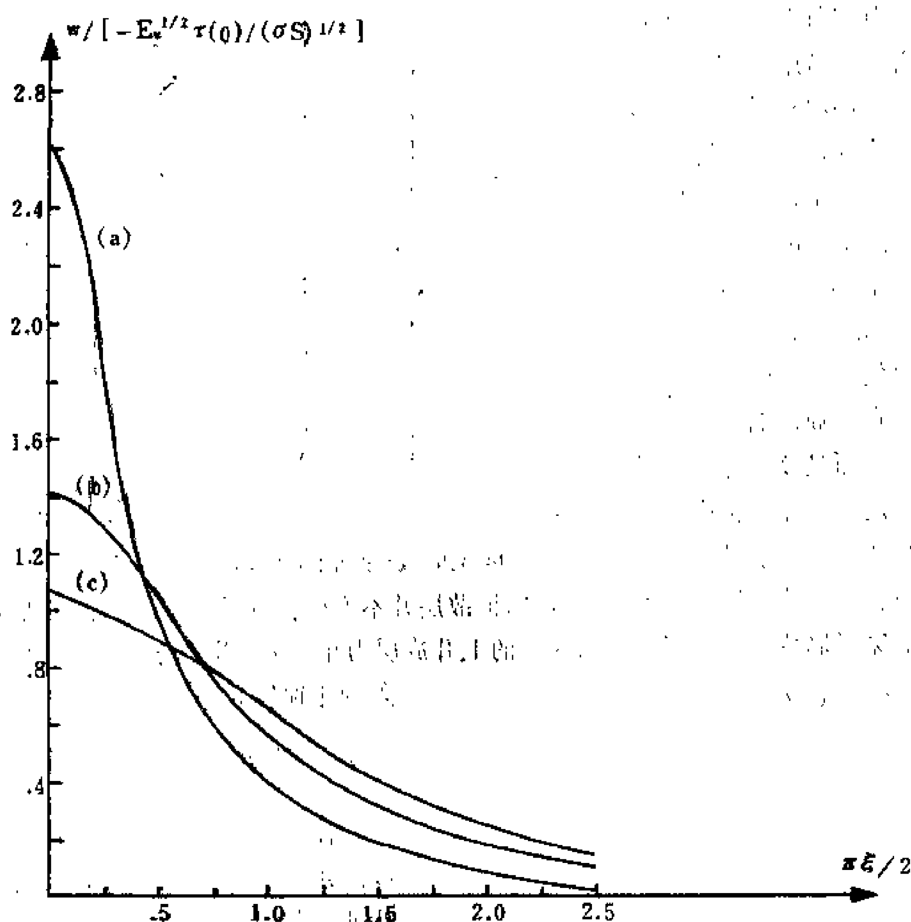


图8.3.4 上升流的垂直速度廓线

(a) 在$z=0.75$处，(b)在$z=0.5$处，(c)在$z=0.25$处。

通过比值$\sigma_H=(A_H/K_H)^{1/2}$而弱依赖于湍流混合系数。当接近上表面时，w的廓线变陡变窄，直到象5.11节的均质模式中那样，进入一个极狭窄的角区为止，后者的宽度用这里的无量纲单位表示是$O((A_H/fL^2)^{1/2})$。非地转向岸运动可以根据(8.3.65)式和连续方程直接计算，它为

$$u=-E_V^{1/2}\frac{\tau(0)}{4}\frac{\sin\pi z\sin h\pi\xi/2}{\cos^2\pi z/2+\sinh^2\pi\xi/L}. \tag{8.3.66}$$

垂直剖面内的环流同样可以借助于流函数

$$\chi=\frac{E_V^{1/2}}{2}\left[\tau(x)+\tau(0)\frac{2}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{\sin h\pi\xi/2}{\cos\pi z/2}\right)-\tau(0)\right] \tag{8.3.67}$$

来表示，由此得

$$w=\frac{\partial\chi}{\partial x},\qquad u=-\frac{\partial\chi}{\partial z}. \tag{8.3.68}$$

流线示意图如图8.3.5所示。

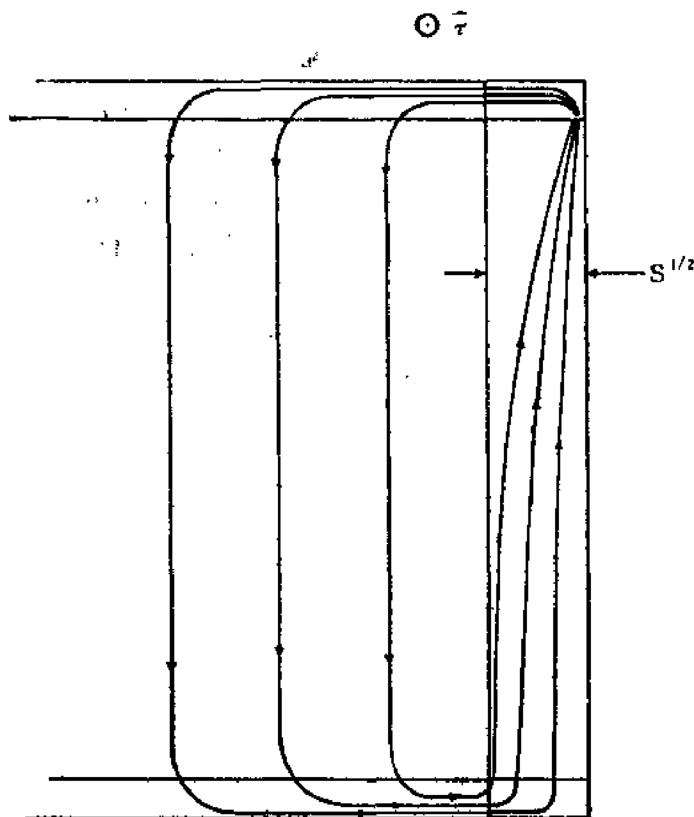


图8.3.5　xz平面上定常环流的流线示意图。

由垂直运动形成的热力异常，又在应力方向上产生了强的[$O(\lambda\sigma S/E_V^{1/2})$]沿岸流。图8.3.6给出Allen (1973) 对$\lambda S=0.5$的情况所计算的该沿岸流廓线。沿边界之运动处于地转平衡中。它的侧向范围由L_H决定，所以取决于A_V与A_H之比，而A_V和A_H都不易给定，这是很麻烦的问题。必须记住，这个强的直线地转流是由垂直平面内弱的非地转环流产生的，而且该环流选择其自身的狭窄尺度。在本例中，对于变形半径的尺度，非地转运动动力学与地转运动的维持是一致的。较宽的扩散层并不产生任何重要的x方向的非地转运动。运动基本上保持地转平衡，直到进入狭窄的上升流层为止，v在那里仍是地转的，但产生出显著的非地转u场。

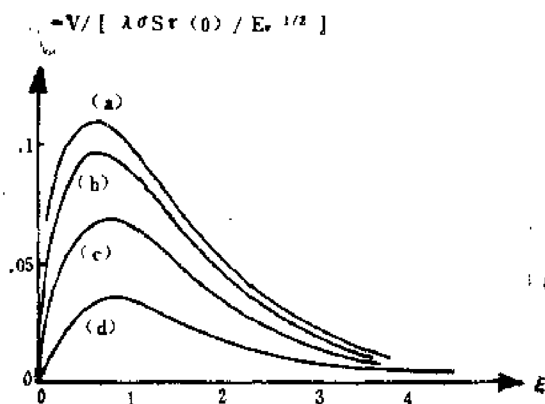


图8.3.6　$\sigma=1$，$\lambda s=0.5$时沿岸流速廓线：(a)$z=1.0$，(b)$z=0.75$，(c)$z=0.5$，(d)$z=0.25$.（Allen，1973）

8.4　锋生理论

称之为锋的水平温度剧烈变化的区域，几乎在每张地面天气图上都是醒目的特征。典型锋的空间变化尺度与大气环流中有关的大尺度波动相比是很小的，所以通常在天气图上，它们好象表现为温度场的侧向不连续。如图8.4.1所示，温度的变化当然是连续的，但是锋的尺度(≤100公里）和垂直于锋区的温度变化之大小（～15℃），使与锋区相关联的热成风必须与垂

直于锋面方向的大罗斯贝数相对应。

大气中的锋区随高度倾斜，冷而重的空气位于暖而轻的空气之下。锋区的坡度从1/300变化到1/50，而大气中典型的等位温面坡度是1/1000，二者坡度相差很大。水平纬向风切变的典型值是每100公里O(30米/秒)，所以

$$\varepsilon_l \approx \frac{30\text{米/秒}}{10^{-4}\text{秒}^{-1}\times 10^5\text{米}}=3, \tag{8.4.1}$$

因此，在锋区动力学中非地转效应必定很重要。这种嵌在缓变大气环流中的，变化显著的锋

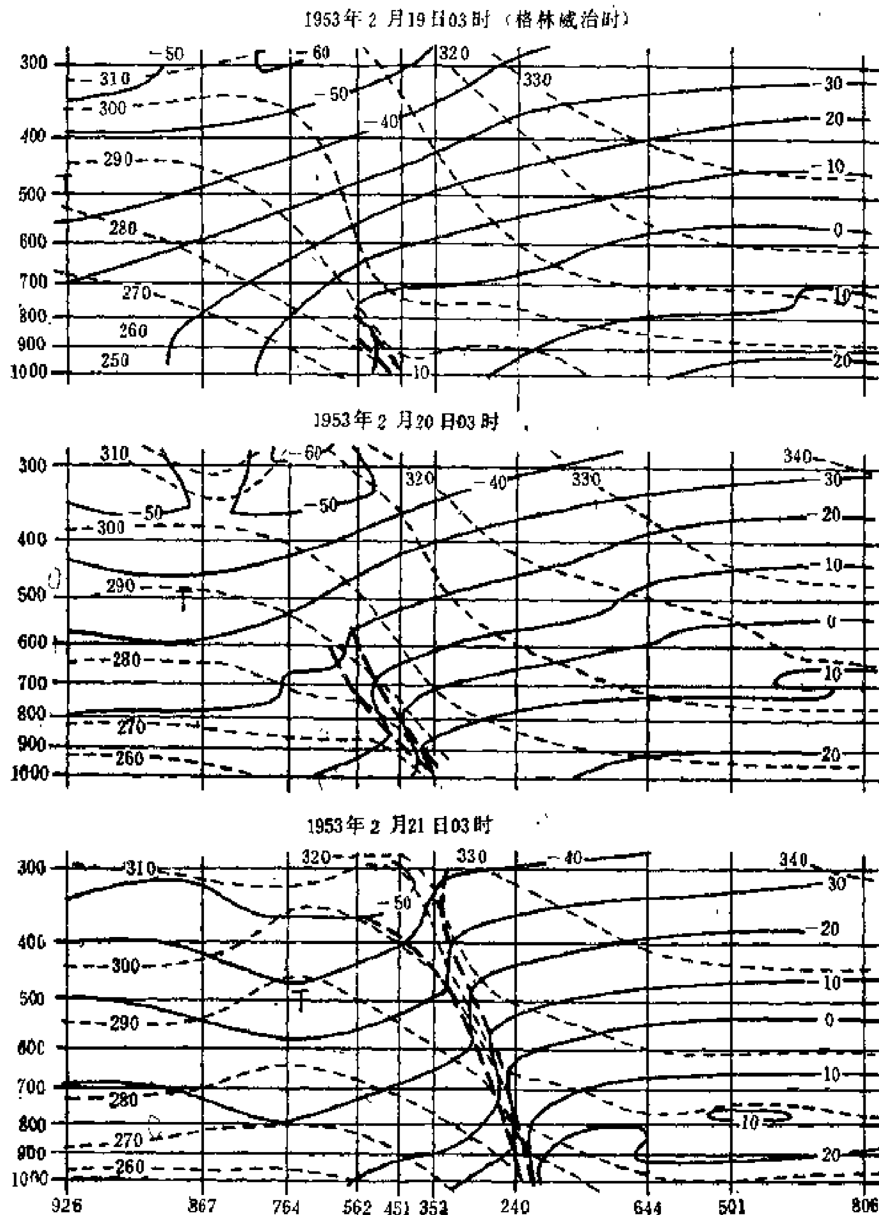


图8.4.1　锋生区剖面的连续演变。实线是等温线，虚线是等位温线(Petterssen,1956).

区之存在，自然提出了一个长期以来引起气象学者兴趣的问题。此外我们必须注意，对于天气预报来说，能够预报锋区的强度、位置和移动，有非常重要的实际意义。对于海洋中具有

类似性质的区域之观测(Voorhis, 1969)说明，锋区的形成机制基本上与那些大气或海洋所特有的动力学特性无关。

解释锋形成的早期尝试(Bergeron, 1928; Stone, 1966)，把注意力集中在一类称为变形场的水平速度场上，其流线如图 8.4.2 所示。这类变形场是大尺度波动场的局部特征，显然，它有使预先存在的大尺度温度梯度加强而使等温线密集的趋势。图上给出一种简单的情况，令有量纲的变形场由下式描写：

$$u_* = -\alpha x_*,$$
$$v_* = \alpha y_*, \qquad (8.4.2)$$

式中 α 是有量纲(时间)$^{-1}$ 的常数。如果开始时在位温场或密度场中等温线与 y 轴平行，那末在 w 为零的地面处，位温若守恒的话，则必定满足：

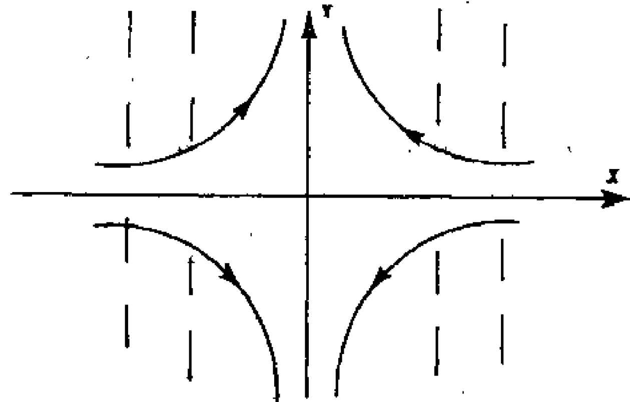


图8.4.2　汇流变形场之流线（实线）有使汇流轴(x轴)两侧的等温线（虚线）密集的趋势。

$$\frac{\partial\theta_*}{\partial t_*} = -u_*\frac{\partial\theta_*}{\partial x_*} = \alpha x_*\frac{\partial\theta_*}{\partial x_*}, \qquad (8.4.3)$$

这是因为 θ_* 与 y 无关。容易验证(8.4.3)的解是

$$\theta_* = \theta_0(x_* e^{\alpha t_*}), \qquad (8.4.4)$$

式中 $\theta_0(x_*)$ 是初始时刻地面位温之分布。地面的位温梯度是

$$\frac{\partial\theta_*}{\partial x_*} = e^{\alpha t_*}\theta_0'(x_* e^{\alpha t_*}), \qquad (8.4.5)$$

式中 θ_0' 是 θ_0 对其辐角的导数。面此在变形场的汇流区，地面温度梯度随时间呈指数增长。当然，随着时间的推移和温度场因汇流而发生的变化，y 方向上变化的热成风将通过科氏加速度产生 x 方向上的运动，以改变初始变形速度场。所以(8.4.4)式只是在开始时成立，而且即使在开始时也只能描写地面上的温度场结构，在地面处没有垂直运动。锋区形成过程（或锋生过程）的一个比较完整的动力理论是 Hoskins 和 Bretherton(1972)提出来的。以下的讨论主要是仿照他们的推导。他们的理论明确地提出锋区的狭窄性，并且是基于8.1节描述的半地转理论面建立起来的。

考虑锋基本上平行于 y 轴形成的情况。于是象8.1节中的那样，对长度和速度场作如下尺度分析是适当的：

$$u_* = Uu, \qquad x_* = lx,$$
$$v_* = Vv, \qquad y_* = Ly, \qquad (8.4.6)$$
$$w_* = U\frac{D}{L}w, \qquad z_* = D,$$
$$t_* = \frac{t}{\sigma}.$$

锋在海洋中的存在，以及在大气中的垂直范围较浅，都表明密度标高远大于运动尺度D 的理论，对解释基本物理机制来说将是适宜的。因此，密度可以作如下的尺度分析：

$$\rho_* = \bar{\rho} + \bar{\rho}\frac{D}{H}\rho(x,y,z,t), \qquad (8.4.7a)$$

式中 $\bar{\rho}$ 是常数，H 是密度标高的特征值$[(-1/\rho_*)\partial\rho_*/\partial z_*]^{-1}$。气压的尺度分析象(8.1.6)式那样，即

$$p_* = -\bar{\rho}gz_* + \bar{\rho}fULp(x,y,z,t). \qquad (8.4.7b)$$

如果 α 代表初始变形场的汇流率，则可适当选择尺度参数，使得

$$\frac{U}{l} = \frac{V}{L} = \sigma = \alpha. \qquad (8.4.8)$$

变形半径是

$$L_D = \frac{1}{f}\left(\frac{-g}{\rho_*}\frac{\partial\rho_*}{\partial z_*}D\right)^{1/2}. \qquad (8.4.9)$$

我们把 L_D 选为锋的合理尺度，所以我们选

$$l = L_D = \left(\frac{gD^2}{fH}\right)^{1/2}. \qquad (8.4.10)$$

这是锋在完全准地转理论中将达到的尺度，即它是密度面变形的自然尺度。可是我们特别感兴趣的是考察半地转问题中锋的尺度，以作为对照。设长度尺度 L 远大于 l，除此约束之外，其精确大小是不重要的。于是，我们为讨论初始时在 x 方向上稍窄（在此以变形半径为其尺度），但在 y 方向上范围很大的运动之动力学特性奠定了基础。基本问题是，前述的运动学汇流是否自然地会使缓慢的温度场增强到锋的尺度。

若把尺度分析变量代入运动方程，且忽略 $O((l/L)^2)$项，则可得到半地转方程组：

$$v = \frac{\partial p}{\partial x}, \qquad (8.4.11a)$$

$$\varepsilon_l\left[\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right] + u = -\frac{\partial p}{\partial y}, \qquad (8.4.11b)$$

$$\rho = -\varepsilon_l\frac{\partial p}{\partial z}, \qquad (8.4.11c)$$

$$\left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + u\frac{\partial\rho}{\partial x} + v\frac{\partial\rho}{\partial y} + w\frac{\partial\rho}{\partial z}\right] = 0, \qquad (8.4.11d)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \qquad (8.4.11e)$$

式中

$$\varepsilon_l = \frac{V}{fl} = \frac{U}{fl}\frac{L}{l} = \frac{\alpha}{f}\frac{L}{l}$$

可认为是 $O(1)$ 的参数。对于 $D/H \ll 1$ 的大气运动，如6.8节中所解释的那样，密度 ρ 在动力学方程中可用负的位温代替。

令 ω 是绝对涡度的垂直分量，即

$$\omega = 1 + \varepsilon_l\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (8.4.12)$$

则由(8.4.11b)式对 x 取导数所得出的涡度方程是

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{\partial\omega}{\partial t}+u\frac{\partial\omega}{\partial x}+v\frac{\partial\omega}{\partial y}+w\frac{\partial\omega}{\partial z}=-\omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\varepsilon_l\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z}. \qquad (8.4.13)$$

右边第一项显然是原有绝对涡丝的辐合，而第二项代表由垂直速度引起的水平涡度 $\partial v/\partial z$ 之倾斜所产生的涡度垂直分量。这项是 $O(\varepsilon_l)$，在 ε_l 是小量的准地转理论中不存在。作为一个练习留给读者证明，位涡守恒的表达式在此取如下形式。

$$\frac{d}{dt}\Pi=0, \qquad (8.4.14a)$$

式中

$$\Pi=-\omega\frac{\partial\rho}{\partial z}+\varepsilon_l\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial\rho}{\partial x}, \qquad (8.4.14b)$$

所以，利用热成风方程

$$\varepsilon_l\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{\partial\rho}{\partial x},$$

可以得出：

$$\Pi=-\omega\frac{\partial\rho}{\partial z}-\varepsilon_l^2\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2. \qquad (8.4.14c)$$

现在考虑由某些大尺度运动系统施加的变形场，如

$$w=0, \qquad (8.4.15a)$$

$$u=-x, \qquad (8.4.15b)$$

$$v=y, \qquad (8.4.15c)$$

若

$$\rho=\rho_0(z), \qquad (8.4.15d)$$

$$p=xy-\frac{\varepsilon_l y^2}{2}+p_0(z), \qquad (8.4.15e)$$

则上述三式将是(8.4.11a,b,c)的解，而(8.4.15d,e)式中，

$$\varepsilon_l\frac{\partial p_0}{\partial z}=-\rho_0. \qquad (8.4.16)$$

注意，对于这个场 ω 是1(即没有相对涡度)，且 Π 就是 $-\partial\rho_0/\partial z$。在此，我们把一个初始时有弱水平梯度的密度场或温度场加到该场上，而这些场的等值线平行于 y 轴。于是，现在总的密度场是

$$\rho=\rho'(x,z,t). \qquad (8.4.17a)$$

有关的速度场也将改变，我们暂时假定用撇号表示的 u、v、w 和 p 的变化与 y 无关（该假定的可靠性以后必须验证）。于是，

$$w=w'(x,z,t), \qquad (8.4.17b)$$

$$u=-x+u'(x,z,t), \qquad (8.4.17c)$$

$$v=y+v'(x,z,t), \qquad (8.4.17d)$$

$$p=xy-\varepsilon_l y^2+p'(x,z,t), \qquad (8.4.17e)$$

将这些式子代入(8.4.11a,b,c,d,e)，得到带撇号变量的运动方程，它们表示流体对作用于水

平密度梯度上的变形场的响应，即

$$v'=\frac{\partial p'}{\partial x},\tag{8.4.18a}$$

$$\rho'=-\varepsilon_l\frac{\partial p'}{\partial z},\tag{8.4.18b}$$

$$\varepsilon_l\left[\frac{\partial v'}{\partial t}+(u'-x)\frac{\partial v'}{\partial x}+v'+w'\frac{\partial v'}{\partial z}\right]+u'=0,\tag{8.4.18c}$$

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t}+(u'-x)\frac{\partial\rho'}{\partial x}+w'\frac{\partial\rho'}{\partial z}=0,\tag{8.4.18d}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial w'}{\partial z}=0.\tag{8.4.18e}$$

我们首先注意到，与y无关的解满足(8.4.18)式，即只有初始变形场的汇流部分u产生(8.4.18)式中随空间变化的系数。其次，因为$\partial p'/\partial y$为零，所以u'完全是非地转的。由变形场产生的地转速度u对(8.4.18d)中密度场的平流，会单独产生类似于(8.4.4)式中ρ的地面分布。非地转的u'是由v'（它是地转的）加速所产生的，并且它将改变地面的锋生过程。垂直平面内的这种非地转运动可用流函数$\chi(x,z)$来描写，这是因为根据(8.4.18e)式有

$$w'=-\frac{\partial\chi}{\partial z},\tag{8.4.19a}$$

$$u'=\frac{\partial\chi}{\partial z}.\tag{8.4.19b}$$

把(8.4.18c)对z求导数，而把(8.4.18d)对x求导数，然后利用热成风方程和(8.4.19a, b)，则可以得到χ的方程：

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\omega\frac{\partial\chi}{\partial z}\right]-\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial\chi}{\partial x}\varepsilon_l v'_z\right]-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial\chi}{\partial z}\varepsilon_l\frac{\partial v'}{\partial z}\right]$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial\chi}{\partial x}\left(-\frac{\partial\rho'}{\partial z}\right)\right]=2\frac{\partial\rho'}{\partial x},\tag{8.4.20}$$

式中

$$\omega=1+\varepsilon_l\frac{\partial v'}{\partial x}.\tag{8.4.21}$$

所以，如果在任意时刻知道了ρ'和v'，那末便可从(8.4.20)式求解χ，再利用χ就可求出u'和w'。于是，可用(8.4.18c, d)向前作时间外推，计算新的ρ'和v'场，而且可再次用(8.4.20)式计算χ。这种过程可以无穷尽地继续下去，从而用此方式得到解答。但这并不是我们要描述的解法。必须注意，χ之结构取决于v'和ρ'的性质，而这些场又随时间演变。因此，当地转、静力的v'和ρ'变化时，锋区垂直剖面上的环流基本上以非线性方式变化。初始时，$\omega\sim1$且v'是小量，χ的方程是

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}\left(-\frac{\partial\rho_0}{\partial z}\right)=2\frac{\partial\rho'}{\partial x}.\tag{8.4.22}$$

若$\partial\rho_0/\partial z=-1$，即若初始层结是均匀的，则(8.4.22)式就是非齐次的拉普拉斯方程。当v'和

ρ' 变化时，(8.4.20)的形式将改变，但定性地说，(8.4.20)式是保持不变的。考虑(8.4.20)式的特征座标，可使上述概念更确切些。如下形式的偏微分方程

$$A\frac{\partial^2\chi}{\partial z^2}+2B\frac{\partial^2\chi}{\partial x\partial z}+C\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}+G\left(\chi,\frac{\partial\chi}{\partial z},\frac{\partial\chi}{\partial x},x,z\right)=0. \quad (8.4.23)$$

具有一固有的坐标系，它在 xz 空间中的特征线由微分关系式

$$\frac{dx}{dz}=+\frac{B}{A}\pm\frac{1}{A}[B^2-AC]^{1/2} \quad (8.4.24)$$

确定（如Stommerfeld,1949,第Ⅱ章）。式中 A、B 和 C 与 χ 对 x 和 z 的二阶导数无关。在现在的情况下，我们有特征线方程：

$$\frac{dx}{dz}=-\frac{\varepsilon_l}{\omega}\frac{\partial v'}{\partial z}\pm\left[\omega\frac{\partial\rho'}{\partial z}+\varepsilon_l^2\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right]^{1/2}, \quad (8.4.25a)$$

或者

$$\frac{dx}{dz}=-\frac{\varepsilon_l}{\omega}\frac{\partial v'}{\partial z}\pm[-\Pi]^{1/2}. \quad (8.4.25b)$$

$t=0$时，Π对于每一流体元均为正，而且因为Π对每一流体元是守恒的，所以Π必须处处保持为正。因此，特征线方程处处是复的，这意味着(8.4.20)式在任何时候都是椭圆型偏微分方程，而拉普拉斯方程是其原始模型。这一定性结果保证了所有奇点和所有极大极小值都必定出现在区域的边界上，这与拉普拉斯方程的情形一样。特别是我们可以由此预料，最大温度梯度将出现在水平边界上。

考虑

$$\frac{\partial\rho_0}{\partial z}=-1$$

的情况。在整个流体域内，Π在开始及随后均等于1。在此情况下，可以直接积分(8.4.25b)式而得到特征线：

$$x=iz+\varepsilon_l v'+a_1, \quad (8.4.26a)$$

$$x=-iz+\varepsilon_l v'+a_2, \quad (8.4.26b)$$

式中 a_1 和 a_2 是任意常数。这又启发我们考虑通过(8.4.26a,b)二式相加和相减所得到的新的实数坐标，即

$$\xi=x+\varepsilon_l v', \quad (8.4.27a)$$

$$Z=z. \quad (8.4.27b)$$

这种变换是由 Hoskins 和 Bretherton(1972)提出来的，他们注意到对于任意初始的Π值，ξ都满足下面的简单关系：

$$\frac{d\xi}{dt}=u+\varepsilon_l\frac{dv'}{dt}=-x+u'+\varepsilon_l\frac{dv}{dt}=-x-\varepsilon_l v'=-\xi. \quad (8.4.28)$$

故跟随每一流体元有

$$\xi=\xi_0 e^{-t}, \quad (8.4.29)$$

式中 ξ_0 是流体元在 $t=0$时具有的 x 值。因而，如果流体元以地转的汇流速度运动的话，则ξ是流体元的 x 位置。把任意独立变量 Q 考虑为借助 ξ、Z 和 T 而实现的变量 x、z和 t 的函数，

此处，$T=t$。应用复合函数求导规则得

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\omega\frac{\partial Q}{\partial \xi},\tag{8.4.30a}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial Q}{\partial Z}+\varepsilon_l\frac{\partial v'}{\partial z}\frac{\partial Q}{\partial \xi},\tag{8.4.30b}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t}=\frac{\partial Q}{\partial T}+\varepsilon_l\frac{\partial v'}{\partial t}\frac{\partial Q}{\partial \xi},\tag{8.4.30c}$$

而且，尤其是有

$$\frac{\partial v'}{\partial z}=\omega\frac{\partial v'}{\partial Z},\tag{8.4.31a}$$

$$\omega=1-\varepsilon_l\frac{\partial v'}{\partial \xi},\tag{8.4.31b}$$

$$\Pi=-\omega\frac{\partial \rho'}{\partial Z}.\tag{8.4.31c}$$

因为

$$\frac{\partial \rho'}{\partial x}=\omega\frac{\partial \rho'}{\partial \xi},\tag{8.4.32a}$$

可以得出

$$\frac{\partial \rho'}{\partial \xi}=-\varepsilon_l\frac{\partial v'}{\partial Z},\tag{8.4.32b}$$

因此，热成风方程在新坐标系中的形式不变。这也可得自一个比较基本的事实。如果我们象(8.4.15e)所指出的那样，引入如下定义的ϕ'：

$$p'=\phi'-\frac{\varepsilon_l}{2}v'^2,\tag{8.4.33a}$$

则可得出：

$$v'=+\frac{\partial \phi'}{\partial \xi},\tag{8.4.33b}$$

$$\rho'=-\varepsilon_l\frac{\partial \phi'}{\partial Z}.\tag{8.4.33c}$$

所以，若用ϕ'代替p'，则在ξZ坐标系中用ϕ'表示的地转关系仍保持不变。

通过ξZ坐标系给运动方程带来的巧妙的简化，我们可以看清引入该坐标系的真正动机。从(8.4.30a,b,c)可以得出

$$\frac{dQ}{dt}=\frac{\partial Q}{\partial T}+\frac{\partial Q}{\partial \xi}+\frac{d\xi}{dt}+\frac{\partial Q}{\partial Z}\frac{dZ}{dt}=\frac{\partial Q}{\partial T}-\xi\frac{\partial Q}{\partial \xi}+w'\frac{\partial Q}{\partial Z}.\tag{8.4.34}$$

密度方程(8.4.18d)变为

$$\frac{\partial \rho'}{\partial T}-\xi\frac{\partial \rho'}{\partial \xi}+w'\frac{\partial \rho}{\partial Z}=0.\tag{8.4.35}$$

因为

$$w'=-\frac{\partial \chi}{\partial x}=-w\frac{\partial \chi}{\partial \xi}$$

且

$$\omega\frac{\partial\rho}{\partial Z}=-1, \tag{8.4.36b}$$

故可得出

$$\frac{\partial\rho'}{\partial T}-\xi\frac{\partial\rho'}{\partial\xi}+\frac{\partial\chi}{\partial\xi}=0. \tag{8.4.37}$$

所以在下述情况下，ρ' 的方程用 ξ 和 Z 表示与用 x 和 z 表示是一样的：即若 ρ' 在水平方向上仅由地转变形场平流给出，而w' 由$\partial\chi/\partial\xi$给出，且只作用在初始垂直温度梯度上。故(8.4.37)式具有密度方程的准地转近似形式，只有在 ξ 向 x 的坐标转换中，才能认识到 c_l 为有限值的作用。在 ξZ 坐标中，v' 的方程是

$$\varepsilon_l\left[\frac{\partial v'}{\partial T}-\xi\frac{\partial v'}{\partial\xi}+v'\right]+\frac{\partial\chi}{\partial Z}=0. \tag{8.4.38}$$

利用(8.4.32b)、(8.4.37)和(8.4.38)式得

$$\boxed{\frac{\partial^2\chi}{\partial Z^2}+\frac{\partial^2\chi}{\partial\xi^2}=2\frac{\partial\rho'}{\partial\xi}}, \tag{8.4.39}$$

该式在形式上与(8.4.22)式等价。所以，用上述固有的坐标系表示时，χ 的问题，从而 u' 和 w' 的问题，仍对一切 t 保持为拉普拉斯方程。位涡是

$$\Pi=-\omega\frac{\partial\rho'}{\partial Z}=-\frac{\partial\rho'/\partial Z}{1-\varepsilon_l(\partial v'/\partial\xi)}, \tag{8.4.40}$$

或注意到(8.4.33b,c)和Π为1的事实，有

$$\varepsilon_l\left[\frac{\partial^2\phi'}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\phi'}{\partial Z^2}\right]=1. \tag{8.4.41}$$

将(8.4.41)式对 Z 微分，立即可得密度方程：

$$\boxed{\frac{\partial^2\rho'}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\rho'}{\partial Z^2}=0}. \tag{8.4.42}$$

在下边界 $Z=0$处，恰当的边界条件就是 w 为零，在上边界$Z=1$处，我们也使用这个条件。对于大气来说，这样的刚性盖肯定是人为的，况且如我们所预料的，如果锋之发展在边界处增强，则第二个边界的存在是不合物理意义的。有了 w 在两个边界上均为零的条件，χ 在每一边界上也必是常数；所以在$Z=0$和$Z=1$处，

$$\frac{\partial\chi}{\partial x}=\omega\frac{\partial\chi}{\partial\xi}=0. \tag{8.4.43a}$$

在每个边界上，ρ'的方程(8.4.37)则简化为

$$\frac{\partial\rho'}{\partial T}-\xi\frac{\partial\rho'}{\partial\xi}=0,\quad Z=0,1. \tag{8.4.43b}$$

在 ξZ 坐标系中，密度（或温度）在边界上的响应好象(8.4.3)式是成立的，即 ξ 方向上的边界温度梯度增大，以响应地转的变形速度汇流场。(8.4.43b)的解是

$$\rho'=\rho_0(\xi e^T,0),\quad Z=0, \tag{8.4.44a}$$

$$\rho'=\rho_0(\xi e^T,1),\quad Z=1, \tag{8.4.44b}$$

式中 $\rho_0(\xi Z)$是初始密度分布。在$T=0$时，我们假定 $\partial\rho/\partial Z$ 是常数（因Π是1）；故

$$\rho' = 1 + \tilde{\rho}_0(\xi e^T), \quad Z = 0, \tag{8.4.45a}$$

$$\rho' = \tilde{\rho}_0(\xi e^T), \quad Z = 1, \tag{8.4.45b}$$

其相应的初始密度场是

$$\rho'(\xi, Z, 0) = (1 - Z) + \tilde{\rho}_0(\xi). \tag{8.4.46}$$

所以,(8.4.42)式之求解必须满足(8.4.45a,b)。注意，在ρ'的问题中，时间只是作为一个参数，且只是为了定义表面密度场在ξ方向上的特征尺度而引入的。我们引入"长度"

$$L_0(T) = e^{-T},$$

可以看清这一点，借助该"长度"有

$$\rho' = 1 + \tilde{\rho}_0\left(\frac{\xi}{L_0}\right), \quad Z = 0, \tag{8.4.47a}$$

$$\rho' = \tilde{\rho}_0\left(\frac{\xi}{L_0}\right), \quad Z = 1. \tag{8.4.47b}$$

令

$$\rho' = (1 - Z) + \tilde{\rho}_0\left(\frac{\xi}{L_0}\right) - \tilde{\theta}(\xi, Z, T), \tag{8.4.48}$$

则$\tilde{\theta}$满足

$$\frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \tilde{\rho}_0}{\partial \xi^2}, \tag{8.4.49}$$

$$\tilde{\theta}(\xi, 0) = \tilde{\theta}(\xi, 1) = 0. \tag{8.4.50}$$

习惯上借助于富里叶变换求解这个问题：

$$\begin{aligned}\Theta(k, Z) &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\theta}(\xi, Z) e^{-ik\xi} d\xi, \\ \tilde{\theta}(\xi, Z) &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(k, Z) e^{ik\xi} dk\end{aligned} \tag{8.4.51}$$

把它应用于(8.4.49)和(8.4.50)式，得到

$$\frac{d^2\Theta}{dZ^2} - k^2\Theta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \tilde{\rho}_0}{\partial \xi^2} e^{-ik\xi} d\xi = \frac{L_0^{-1}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \tilde{\rho}_0}{\partial \eta^2} e^{-i(kL_0)\eta} d\eta, \tag{8.4.52}$$

式中

$$\eta \equiv \frac{\xi}{L_0}, \tag{8.4.53a}$$

且

$$\Theta(k, 0) = \Theta(k, 1) = 0. \tag{8.4.53b}$$

定义

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \tilde{\rho}_0}{\partial \xi} e^{-ik\xi} d\xi, \tag{8.4.54}$$

即$F(k)$是初始水平密度梯度的富里叶变换。于是(8.4.52)式变为

$$\frac{d^2\Theta}{dZ^2} - k^2\Theta = +ikF(kL_0),$$

其满足(8.4.53b)的解是

$$\Theta = -\frac{i}{k}F(kL_0)\left[1-\frac{\cos hk(z-1/2)}{\cos h(k/2)}\right], \tag{8.4.55}$$

该式给出

$$\tilde{\theta}(\xi, Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(-i)\frac{F(kL_0)}{k}\left[1-\frac{\cos hk(Z-1/2)}{\cos h(k/2)}\right]e^{+ik\xi}dk. \tag{8.4.56a}$$

初始密度可以写为 ξ 的一个偶函数与一个奇函数之和[1]。于是，$F(kL_0)$可类似地写为$F_e(kL_0)-iF_0(kL_0)$，其中 F_e 和 F_0 分别是 kL_0 的偶函数和奇函数。借助于 F_e 和F_0(它们是kL_0的实函数)，(8.4.56a)式变为

$$\tilde{\theta}(\xi, Z) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\int_0^{\infty}\left[1-\frac{\cos hk(Z-1/2)}{\cos h(k/2)}\right]\left[-\frac{F_0(kL_0)}{k}\cos k\xi\right.$$

$$\left.+\frac{F_e(kL_0)}{k}\sin k\xi\right]dk. \tag{8.4.56b}$$

现在知道了 ρ'，就可从热成风方程和(8.4.40)式确定v'：

$$\varepsilon_l v'(\xi, Z) = -\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\int_0^{\infty}\frac{\sin hk(Z-1/2)}{\cos h(k/2)}$$

$$\times[F_0(kL_0)\sin k\xi + F_e(kL_0)\cos k\xi]dk. \tag{8.4.57}$$

如果利用(8.4.48)和(8.4.56)式，则可以求解垂直环流问题(8.4.39)。留给读者证明：

$$\chi(\xi, Z) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\int_0^{\infty}\left[\left(Z-\frac{1}{2}\right)\frac{\sin hk(Z-1/2)}{\cos h(k/2)}-\frac{1}{2}\tan h(k/2)\frac{\cos hk(Z-1/2)}{\cos h(k/2)}\right]$$

$$\times[F_0(kL_0)\sin k\xi + F_e(kL_0)\cos k\xi]dk. \tag{8.4.58}$$

对于每个 T 值（从而 L_0 值），ρ'、v' 和 χ 作为 ξ 和 Z 的函数已知。求解的最后一步是通过关系式(8.4.27a)从 ξ 变换为 x，即由

$$x = \xi - \varepsilon_l v'(\xi, Z, T) \tag{8.4.59}$$

完成 ξ 到 x 的变换，为此，只要在 xz 平面作 ξ 的等值线，并且把(ξ, Z) 点处的 ρ' 值看作是 ρ' 在 xz 平面上的相应点即可。

Hoskins(1971)对气象上的锋作过以上所概述的详细计算，其中ρ' 直接用$-\theta'$ 代替(在大尺度高度近似下)。他选择（用有量纲单位表示）

$$\theta'_* = CZ_* + \left(2\frac{\Delta\theta_*}{\pi}\right)\tan^{-1}(x_*/L) \tag{8.4.60}$$

作为位温的初始分布，其中

$$C = 3^\circ K/\text{公里},$$
$$2\Delta\theta_* = 24^\circ K, \tag{8.4.61}$$
$$D = 8\text{公里}.$$

上述选择相当于变形半径 L_D 为 O(800公里)。若 L 远大于 L_D，则 L 是任意的。(8.4.60)的形式意味着初始时，从 $x=-\infty$ 处的冷空气到 $x=+\infty$ 处的暖空气的总水平温差是 $2\Delta\theta_*$。随着

(1) 忆及在$T=0$时$\xi=x$。

时间的推移，假如只有作用于θ_*上的变形场，那末地面密度场的尺度就是

$$L_{\theta *}=Le^{-at_*}. \tag{8.4.62}$$

图8.4.3给出$L_{\theta *}$为148公里时，Hoskins 所计算的θ_*'和v_*'场。θ_*'的等值线每隔2.4°K画一

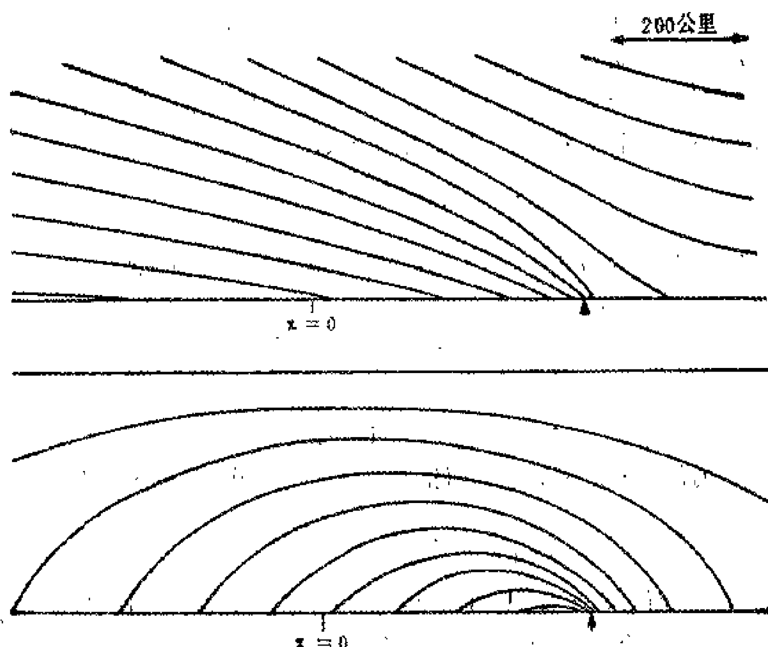


图8.4.3 等位温线（上图）(等值线间隔为2.4°k)。等v_*'线（下图）(等值线间隔为4米/秒)。(Hoskins,1971)

条，而v_*'等值线每隔4米/秒画一条，垂直区域是$Z_*\leqslant D/2$。注意，长度尺度为200公里。显然，在地面附近已出现v_*'和θ_*'的强梯度。锋向上倾斜的坡度大约是1/100,并且锋区的尺度远小于变形半径。v_*'在地面处的极大值是O(38米/秒)。取$\alpha=10^{-5}$/秒，L_θ从200公里缩为148公里所需要的时间为8.4小时。尽管$\alpha/f<1$,但量度ε_1的ξ_*/f的值是从1.3变到3.9。

图8.4.4给出 Hoskins 计算的锋区垂直环流。该环流是直接热力环流，暖空气在锋区上

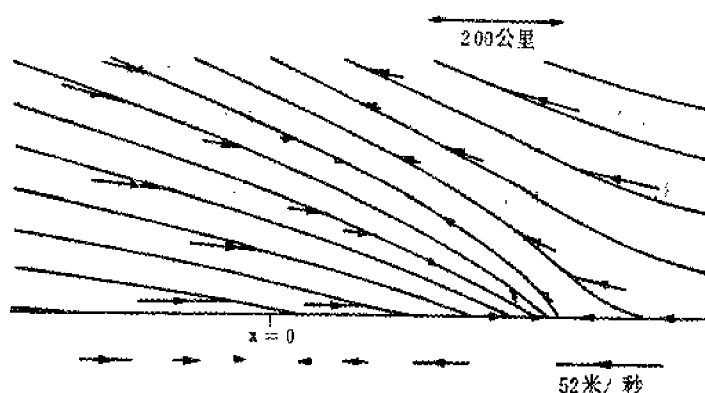


图8.4.4 流体元从变形场迭加上等位温线的时间开始的运动。基本变形场如图下部的箭头所示。引自 Hoskins(1971)。

空上爬，锋区本身从$x=0$移到如图所示的正值位置处。注意，由于$\partial v_*'/\partial z_*\sim\partial\theta_*'/\partial x_*$是正

值，所以在锋的附近，负的$\partial w_*^{\prime}/\partial x_*$将引起垂直涡度非地转加强，从而使锋区进一步加强。实际上计算表明，锋生机制强到致使模式预测的涡度为无限大，即在有限时间内出现锋的不连续（在本计算中，出现在L_{0*}达到148公里后5小时）。当然，实际上可以预料，在这样强的切变中会出现不稳定，而且伴随发生的混合将有限制锋区加强的趋势。尽管如此，所预测的不连续毕竟是锋生过程激烈的标志。

Hoskins和Bretherton(1972)提出了关于不连续面生成的简单而有用的描述。在已建立的锋附近，相对涡度和水平密度梯度变得相当大，以至于为了维持

$$\Pi=-\frac{\partial\rho}{\partial z}-\varepsilon_I\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial\rho}{\partial z}-\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial\rho}{\partial x}\right) \tag{8.4.63}$$

有界（在此讨论的情况下Π处处为1），精确到最低阶时，在锋附近必有

$$\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial\rho}{\partial z}-\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial\rho}{\partial x}\approx 0. \tag{8.4.64}$$

于是在锋区处，

$$v=A(\rho), \tag{8.4.65}$$

式中$A(\rho)$是ρ的任意函数。所以等v面和等ρ面重合。其次，因有(8.4.65)式和热成风关系，

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_v=-\frac{\partial v/\partial x}{\partial v/\partial z}=A'(\rho)\varepsilon_I, \tag{8.4.66}$$

可以得出，在xz平面上等ρ面（从而等v面）必有常值坡度，如图8.4.5所示。由于ρ是守恒的，所以可得出每个等ρ面和等v面坡度不随时间改变。根据(8.4.64)式，

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\varepsilon_I\frac{(\partial v/\partial z)^2}{\partial\rho/\partial z}, \tag{8.4.67}$$

因此，由于$\partial\rho/\partial z$总是为负（在统计上是稳定的），所以$\partial v/\partial x$在锋区中必须为正（气旋式）。现在考虑等v面和等ρ面的运动。如果等值面的坡度随运动保持不变（即个别微商为零），则等v面在x方向上的速度一定只是v的函数，即

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_v=G(v), \tag{8.4.68}$$

或者

$$\frac{\partial v}{\partial t}+G(v)\frac{\partial v}{\partial x}=0. \tag{8.4.69}$$

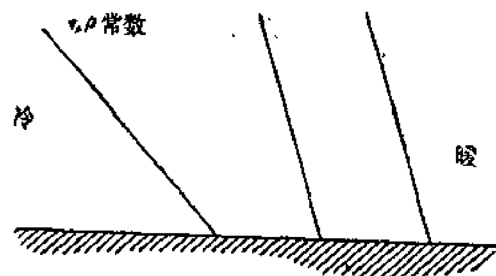


图8.4.5　等v面与等ρ面在锋区中的陡度。

因$\partial v/\partial x\gg 1$，故由(8.4.11b)式得知在$w$为零的$z=0$处，

$$G(v)=u, \tag{8.4.70}$$

而且特别有

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}=G'(v)\frac{\partial v}{\partial x}}. \tag{8.4.71}$$

由于$\partial v/\partial x>0$，所以可知$G'(v)$在汇流区必定为负。(8.4.71)式说明的要点是，汇流之局部变率$\partial u/\partial x$随着相对涡度的局部值而增加。当后者因锋生动力学作用而增加时，等密度线也

洞时加速密集，最后导致不连续性。

把(8.4.69)式对 x 求导数，我们得到在 $z=0$ 处

$$\frac{d\zeta}{dt}=\frac{\partial\zeta}{\partial t}+u\frac{\partial\zeta}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}=-G'(v)\zeta^2, \tag{8.4.72}$$

式中 $\zeta=\partial v/\partial x$。跟随一个 $G'(v)$为常数的流体元，容易积分(8.4.72)式而得

$$\zeta=[G'(v)(t-\tau)]^{-1}, \tag{8.4.73}$$

式中 τ 用 $t=0$时的涡度来定义：

$$\tau^{-1}=-G'(v)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{t=0}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{t=0}. \tag{8.4.74}$$

所以，τ^{-1} 是与初始变形率有关的时间尺度，而且当 t 变得等于 τ 时，ζ 变为无限大，即在 $z=0$ 处形成 v 和 ρ 的不连续。所以，锋完全崩溃的时间尺度对于变形场模式来说由 α 给出，但是如同我们已看到的，v 和 ρ 的梯度很大的明显区域之形成则要快得多。

8.5 赤道波动

在赤道附近，地球自转的法向分量为零，地转平衡关系不再成立。详细讨论赤道动力学的普遍性质超出了本书的范围。但赤道拦截波现象是大气与海洋共同具有的一个赤道动力学特征。

如果参阅讨论邦加莱波、凯尔文波和罗斯贝波理论的3.10节，则可以预料到赤道波有某些特殊性质。邦加莱波的（有量纲）频率为

$$\sigma_p^2=f^2+gD_0(k^2+l^2), \tag{8.5.1}$$

式中 k 和 l 分别是 x 和 y 方向的波数，而罗斯贝波频率可以写为

$$\sigma_R=-\frac{\beta_0 k}{k^2+l^2+f^2/c_0^2}, \tag{8.5.2}$$

式中 β_0 是行星涡度梯度，c_0的定义为

$$c_0=(gD_0)^{1/2}, \tag{8.5.3}$$

其中 D_0 是未受扰的深度。邦加莱波的最小频率是 f，而罗斯贝波的最大频率（在数值上)是 $\beta_0 c_0/2f$。在中纬度地区，上述频率界限分离得很清楚，而且实际上这一事实在第三章中形成了建立准地转理论的富有启发性的基础。在低纬度地区，f 是小量，我们一定会料到，重力波和罗斯贝波的动力状况会结合在一起，它们的动力学性质会变得相互关联。我们还考虑在 f 很小的赤道附近区域中，σ 固定且大于 f 的邦加莱波，并想象振荡的空间性质在 f 大于 σ 的较高纬度处应当如何变化。由于 k 是实数（为了在 x 方向上具有周期性)，所以对于 $f>\sigma$ 的足够大的 y 处，l^2 一定变为负值，这意味着波动随 y 的增大有很快消失的特征。这一点暗示了赤道区可以起一个波导的作用，能将振荡拦截在赤道附近的区域内。诚然，以上论证只不过是启发性的，因为(8.5.1)式仅在中纬度地区，且 f 几乎不变时才严格成立。尽管如此，但下面我们将看到，这种启发性的论证还是令人满意地预测出详细分析的结果。如果用斜压模态(6.12.22)的相当深度代替 D_0 的话，那末也可期望以上论证适合于斜压模态。

为了更精确地考察这些概念，我们考虑适用于赤道附近的波动动力学的线性运动方程，科氏参数 f 在那里可表示为

$$f=\beta_0 y_*, \tag{8.5.4}$$

式中 y_* 是从赤道向北的（有量纲）距离，而

$$\beta_0=\frac{2\Omega}{r_0}, \tag{8.5.5}$$

r_0是地球半径。无量纲变量由下述关系式引入：

$$\begin{aligned}
&(u_*,v_*)=U(u,v),\quad (x_*,y_*)=L(x,y)\\
&w_*=\frac{D}{L}Uw,\quad z_*=Dz,\\
&t_*=\frac{t}{\beta_0 L},\\
&p_*=p_s(z)+\rho_s(z)\beta_0 L^2 U p(x,y,z,t),\\
&\rho_*=\rho_s(z)+\rho_s(z)\frac{\beta_0 L^2 U}{gD}\rho(x,y,z,t).
\end{aligned} \tag{8.5.6}$$

上述尺度分析基本上与中纬度天气尺度运动所使用的尺度分析相同，但与它有一个主要的区别，即用来对压力和密度作尺度分析的科氏参数的典型尺度不取 f 而取 $\beta_0 L$。注意，对压力的尺度分析预示着科氏力和压力梯度力具有相同的量级，但并不预示二者达到地转平衡。若把（8.5.6)式代入运动方程并只保留线性项，则可得到赤道 β 平面方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t}-yv=-\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{8.5.7a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+yu=-\frac{\partial p}{\partial y}, \tag{8.5.7b}$$

$$\rho=-\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial}{\partial z}(\rho_s p), \tag{8.5.7c}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial}{\partial z}(\rho_s w)=0. \tag{8.5.7d}$$

和第六章一样，为使这个方程组闭合，还要求有能量守恒表达式。对于大气中的无耗散波，它简化为位温守恒表达式；而对于海洋的情况，有密度表达式即可。以下我们将考察大气的情况；而对于海洋的情况，象第六章那样，只要令密度标高远大于波动的垂直尺度，而且把负的密度变化等同于位温的变化，则可从与之相应的大气情况结论中得到海洋的结果。也就是说，对于大气，我们把位温表示为

$$\theta_*=\theta_s(z)+\theta_s(z)\frac{\beta_0 L^2 U}{gD}\theta(x,y,z,t) \tag{8.5.8}$$

根据(6.5.1)的线性化形式，式中 θ 与 ρ 和 p 有关，借助(8.5.7c)式,(6.5.1)式可表示为

$$\theta=\frac{\partial p}{\partial z}-p\theta_s^{-1}\frac{d\theta_s}{dz}. \tag{8.5.9}$$

和以前一样，我们把注意力集中在

$$\frac{1}{\theta_s}\frac{d\theta_s}{dz}\ll 1 \tag{8.5.10}$$

的情况，所以(8.5.7c)可由下式代替[1]

(1) 注意，除非 $\partial p/\partial z$ 恒等于零，即运动完全是正压的，否则，忽略(8.5.9)式中的第二项是可以的。

$$\theta=\frac{\partial p}{\partial z} \tag{8.5.11}$$

而位温守恒表达式的线性化形式变为

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+w\left[\frac{gD}{\beta_0^2L^4\theta_s}\frac{d\theta_s}{dz}\right]=0. \tag{8.5.12}$$

令 N_0 是布伦特-维赛拉频率$[(g/D\theta_s)(d\theta_s/dz)]^{1/2}$的特征值，故有

$$N^2=N_0^2s(z), \tag{8.5.13}$$

式中 $s(z)$是 $O(1)$函数，它表征 N^2 随 z 的分布。由(8.5.12)式容易看出，存在一个自然特征长度尺度，即

$$L_e=\left(\frac{N_0D}{\beta_0}\right)^{1/2}, \tag{8.5.14}$$

它是赤道罗斯贝内变形半径。其物理意义可从中纬度变形半径的定义式

$$L_D=\frac{N_0D}{f} \tag{8.5.15}$$

看出。只要对赤道问题把 f 写为β_0L_D，则立即得到(8.5.14)式。

在无外加侧边界时，波动问题中仅有的长度尺度是纬向波长和 L_e。我们把 L_e选为特征水平尺度 L，所以(8.5.12)式直接变为

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+ws(z)=0. \tag{8.5.16}$$

仿照 Moore 和 Philander(1977)，我们求如下形式的可分离解：

$$\begin{Bmatrix}u\\v\\p\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}U(x,y,t)\\V(x,y,t)\\P(x,y,t)\end{Bmatrix}G(z), \tag{8.5.17}$$

$$w=\left[s^{-1}(z)\frac{dG}{dz}\right]W(x,y,t),$$

及

$$\theta(x,y,z,t)=P(x,y,t)\frac{dG}{dz}. \tag{8.5.18}$$

把(8.5.17)式代入(8.5.7a,b)、(8.5.11)和(8.5.16)式中，我们得

$$\frac{\partial U}{\partial t}-yV=-\frac{\partial P}{\partial x}, \tag{8.5.19a}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}+yU=-\frac{\partial P}{\partial y}, \tag{8.5.19b}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t}+W=0, \tag{8.5.19c}$$

而(8.5.7d)变为

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{W}{G\rho_s}\frac{d}{dz}\left[\frac{\rho_s(z)}{s(z)}\frac{dG}{dz}\right]=0. \tag{8.5.19d}$$

为了使(8.5.17)和(8.5.18)式表示的分离解有意义，我们由(8.5.19d)可知，$G(z)$必须满足垂直结构方程：

$$\frac{1}{\rho_s}\frac{d}{dz}\left[\frac{\rho_s}{s}\frac{dG}{dz}\right]=-m^2G, \tag{8.5.20}$$

式中 m^2 是分离常数。注意，(8.5.20)式恒等于中纬度运动中出现的垂直结构方程（6.12.7)。将(8.5.20)、(8.5.19c)和(8.5.19d)结合起来可得

$$m^2\frac{\partial P}{\partial t}+\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}=0, \tag{8.5.21}$$

该式同(8.5.19a,b)一起构成关于 U、V 和 P 的闭合方程组.同样的方程组也直接适用于海洋的U、V 和 P 的情况。唯一的不同是，对海洋来说，(8.5.20)式中 ρ_s 可以取为常数。借助于(8.5.21)式可把 P 从(8.5.19a,b)二式中消去，得出

$$L_1(U)=\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}-\frac{1}{m^2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=y\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{m^2}\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial x}, \tag{8.5.22a}$$

$$L_2(V)=\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}-\frac{1}{m^2}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=-y\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{1}{m^2}\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial x}. \tag{8.5.22b}$$

为方便起见，消去U而得到完全用V 表示的波动问题的表达式。用算子 L_1 作用于(8.5.22b) 式，然后利用(8.5.22a,b)消去U，可得

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)V-m^2y^2V-m^2\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\right]+\frac{\partial V}{\partial x}=0. \tag{8.5.23}$$

这个公式对于V 不明显为零的运动是恰当的。在3.9节中研究凯尔文波的经验提醒我们注意，对于V 恒等于零的运动，有可能存在非平凡模态。为了考察这种可能性，令V 为零，此时(8.5.22a,b)化为

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}-\frac{1}{m^2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=0, \tag{8.5.24a}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial x}-m^2y\frac{\partial U}{\partial t}=0. \tag{8.5.24b}$$

第一个方程意味着U是

$$U_+=U_+\left(x+\frac{t}{m},y\right), \tag{8.5.25a}$$

和

$$U_-=U_-\left(x-\frac{t}{m},y\right) \tag{8.5.25b}$$

的线性组合，式中U_+和U_-是任意函数.第一个解U_+表示向西运动的非频散波：第二个解U_-代表向东运动的非频散波。把(8.5.25a,b) 代入(8.5.24b)式，确定出每个波的经向结构，即

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U_+}{\partial x}\right)-my\left(\frac{\partial U_+}{\partial x}\right)=0, \tag{8.5.26a}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U_-}{\partial x}\right)+my\left(\frac{\partial U_-}{\partial x}\right)=0, \tag{8.5.26b}$$

所以

$$U_{\pm}=A_{\pm}\left(x\pm\frac{t}{m}\right)e^{\pm my^2/2}. \tag{8.5.27}$$

不失一般性，我们可以考虑$m>0$的情况，对于负m，只不过是把两个凯尔文波互相交换一下。由(8.5.27)式容易看出，对于很大的y，只有U_-保持有界，从而U_+必须舍弃。于是$V=0$的向东传播的凯尔文波为

$$U=A\left(x-\frac{t}{m}\right)e^{-my^2/2}; \tag{8.5.28}$$

它是一个可能的赤道拦截波。这与第三章的结果一致，在那里曾指出，对于$f>0$（即对于北半球），沿凯尔文波传播方向看去，扰动的极大值在观察者的右方。与它有关的压力场为

$$P=\frac{1}{m}A\left(x-\frac{t}{m}\right)e^{-my^2/2}, \tag{8.5.29}$$

由此可知，对一切y（包括赤道），凯尔文波的纬向速度处于地转平衡，即

$$yU=-\frac{\partial P}{\partial y}. \tag{8.5.30}$$

凯尔文波的传播速度是$1/m$，或用有量纲单位表示为

$$\boxed{C_*=\frac{\beta_0 L_e^2}{m}=\frac{N_0 D}{m}}, \tag{8.5.31}$$

它与地球转动无关。我们暂时不讨论计算m的细节问题。但是对自由波来说，m^2是在适当地规定边界条件之后，作为(8.5.20)式的本征值而得到的。赤道拦截凯尔文波的天然“宽度”是e折尺度：

$$y_*=L_e\left(\frac{2}{m}\right)^{1/2}. \tag{8.5.32}$$

$V\neq0$的模态一般是频散波，即相速取决于纬向波长，故应寻找如下形式的(8.5.23)式的解：

$$V=Re\,e^{i(kx-\sigma t)}\psi(y), \tag{8.5.33}$$

不失一般性。我们在式中取$\sigma=0$，于是由(8.5.23)式得$\psi(y)$的经向结构方程：

$$\frac{d^2\psi}{dy^2}+\psi\left[m^2(\sigma^2-y^2)-\frac{k}{\sigma}-k^2\right]=0, \tag{8.5.34}$$

读者可以把它与(3.10.5)或作有益的比较。通过引进变量

$$\eta=m^{1/2}y, \tag{8.5.35}$$

经向结构方程可以化为标准形式。(8.5.34)式借助(8.5.35)式而变为

$$\frac{d^2\psi}{d\eta^2}+\psi\left[\left(m^2\sigma^2-\frac{k}{\sigma}-k^2\right)m^{-1}-\eta^2\right]=0. \tag{8.5.36}$$

对于大的η值（即大的y值），(8.5.36)式的唯一有界解是

$$\psi(y)=\psi_j(y)=\frac{e^{-\eta^2/2}H_j(\eta)}{(2^j j!\pi^{1/2})^{1/2}}, \tag{8.5.37}$$

式中j是包括零的任意非负整数，$H_j(\eta)$是厄密多项式，定义为

$$H_j(\eta)=(-1)^j e^{\eta^2}\frac{d^j}{d\eta^j}e^{-\eta^2}. \tag{8.5.38}$$

所以前六个多项式是

$$\begin{aligned} &H_0=1, && H_1=2\eta, \\ &H_2=4\eta^2-2, && H_3=8\eta^3-12\eta, \\ &H_4=16\eta^4-48\eta^2+12, && H_5=32\eta^5-160\eta^3+120\eta. \end{aligned} \tag{8.5.39}$$

j为偶（奇）数的 $\psi_j(\eta)$ 在区间$(-\infty,\ \infty)$上是具有 j 个节点的偶(奇)函数。这些函数在 $|\eta|<(2j+1)^{1/2}$时是振荡函数，在上述纬度以外很快就消失为零。

每个 ψ_j 均满足微分方程

$$\frac{d^2\psi_j}{d\eta^2}+\psi_j[(2j+1)-\eta^2]=0, \tag{8.5.40}$$

由此得出，σ、k 和 m 必定满足频散关系式：

$$\boxed{m^2\sigma^2-\frac{k}{\sigma}-k^2=(2j+1)m}, \quad j=0,1,2\cdots\cdots, \tag{8.5.41}$$

而 $\psi_j(\eta)$满足正交关系：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_j(\eta)\psi_p(\eta)d\eta=\delta_{jp}. \tag{8.5.42}$$

注意，若令 $j=-1$，则作为(8.5.41)式一个解有

$$\frac{\sigma}{k}=\frac{1}{m}, \tag{8.5.43}$$

这就是凯尔文波的频散关系，所以在此展开式的物理解释中，频散关系包括凯尔文波。当然，凯尔文波的 V 为零，但是对于简谐凯尔文波，U 可用 $\psi_0(\eta)$写为

$$U(x,t)=Re\, e^{ik(x-t/m)}\psi_0(\eta). \tag{8.5.44}$$

一般说来，在频散关系中最易把 k 写成 m 和 σ 的函数，即对于每个 j 有

$$\boxed{k=-\frac{1}{2\sigma}\pm\frac{1}{2}[(\sigma^{-1}-2m\sigma)^2-8mj]^{1/2}}, \tag{8.5.45}$$

j 为零的情况表示某些微妙的特征。当 j 等于零时，(8.5.45)式有两个显根，即

$$k=-m\sigma, \tag{8.5.46a}$$

和

$$k=-\frac{1}{\sigma}+m\sigma. \tag{8.5.46b}$$

第一个根相当于向西传播的凯尔文波的频率关系。对(8.5.22b)式的考察指出，当 y 很大时，相应的 U 场变为无界，因此(8.5.46a)必须舍弃。第二个解是柳井(Yanai)波，或"混合"的罗斯贝-重力波。当 σ 很大时，(8.5.46b)为

$$\sigma\sim\frac{k}{m}, \tag{8.5.47a}$$

从而渐近地趋于凯尔文波；而当σ很小时，

$$\sigma \sim -\frac{1}{k}, \tag{8.5.47b}$$

这就是我们熟悉的罗斯贝波的高纬向波数极限。

对于$j \geqslant 1$，(8.5.45)式的两个根都给出有物理意义的波场，完全的频散关系如图8.5.1所示，该图给出作为$K = km^{-1/2}$之函数的$\omega = \sigma m^{1/2}$。

把所有的$j \geqslant 1$的模态分为两类：第一类是频率较高的惯性重力波，类似于第三章中的邦加莱波，第二类是低频罗斯贝波。图上也给出凯尔文波和"混合"波。重要的是注意，纯惯性重力波和罗斯贝波在给定频率上所具有的波动，在x方向上既有正的群速度，也有负的群速度，而"混合"波和凯尔文波对于所有的k只有向东的群速度。

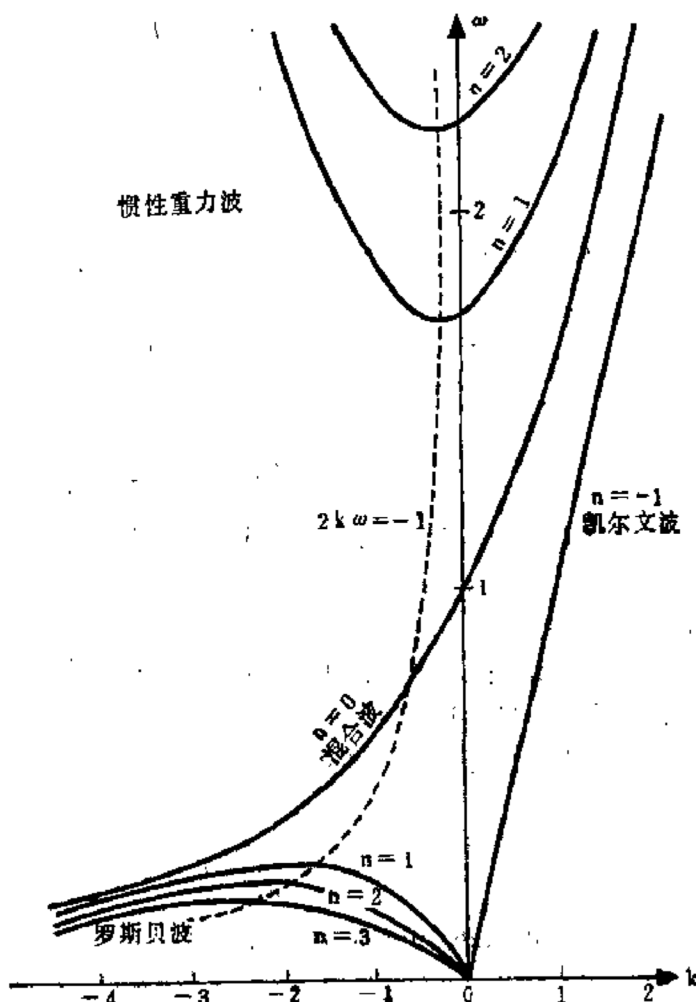


图8.5.1　赤道波的频散关系(Cane和Sarachik,1976)。

把频散关系式对k求导数，我们就得到x方向的群速度：

$$\frac{\partial\sigma}{\partial k} = \frac{1+2k\sigma}{2\sigma^2 m^2 + k/\sigma}, \tag{8.5.48}$$

所以在波数-频率图上，每个模态的频率极值出现在$2k\sigma = 2K\omega = -1$处。相应的频率，即$\partial\sigma/\partial k$为零的点处的频率，可通过把$k = -1/2\sigma$代入(8.5.41)式而得到，

$$\sigma_{min} = \frac{[(j+1)/2]^{1/2} + (j/2)^{1/2}}{m^{1/2}}, \tag{8.5.49}$$

这是第j个惯性-重力波的最小频率；还得到

$$\sigma_{max} = \frac{[(j+1)/2]^{1/2} - (j/2)^{1/2}}{m^{1/2}}, \tag{8.5.50}$$

这是第j个罗斯贝波的最大频率。对于每个j，邦加莱波对k大于(小于)$-(2\sigma_{min})^{-1}$的波有向东（向西）的群速度；而对于第j个罗斯贝波，当k小于（大于）$-(2\sigma_{max})^{-1}$时，群速度是向东（向西）的。

一旦V对于每个波成为已知量，则其他场可由(8.5.22a)和(8.5.21)式计算。对于一切$j \geqslant 1$（即对于邦加莱波和罗斯贝波），我们有

$$V_j = Re A_j \psi_j(\eta) e^{i(kx-\sigma t)}, \quad j \geqslant 1, \tag{8.5.51a}$$

$$U_j = Re \frac{iAj}{m^{1/2}} \left[\left(\frac{j}{2}\right)^{1/2} \frac{\psi_{j-1}(\eta)}{(\sigma + k/m)} + \left(\frac{j+1}{2}\right)^{1/2} \frac{\psi_{j+1}(\eta)}{(\sigma - k/m)} \right] e^{i(kx-\sigma t)}, \tag{8.5.51b}$$

$$P_j = Re \frac{iAj}{m^{3/2}} \left[-\left(\frac{j}{2}\right)^{1/2} \frac{\psi_{j-1}(\eta)}{(\sigma + k/m)} + \left(\frac{j+1}{2}\right)^{1/2} \frac{\psi_{j+1}(\eta)}{(\sigma - k/m)} \right] e^{i(kx-\sigma t)}, \tag{8.5.51c}$$

而对相应于 $j=0$ 的"混合"波，

$$V_0 = Re A_0 \psi_0(\eta) e^{i(kx-\sigma t)}, \tag{8.5.52a}$$

$$U_0 = Re \frac{im^{1/2}\sigma}{2^{1/2}} A_0 \psi_1(\eta) e^{i(kx-\sigma t)}, \tag{8.5.52b}$$

$$P_0 = Re \frac{i\sigma}{(2m)^{1/2}} A_0 \psi_1(\eta) e^{i(kx-\sigma t)}. \tag{8.5.52c}$$

在"混合"波中，纬向速度和气压场是 y 对于赤道的奇函数，且纬向速度并不处于地转平衡，因为

$$yU_0 = Re\, im\sigma \frac{A_0}{\pi^{1/4}} y^2 e^{-my^2/2} e^{i(kx-\sigma t)}, \tag{8.5.53a}$$

$$-\frac{\partial P_0}{\partial y} = Re\, im\sigma \frac{A_0}{\pi^{1/4}} \left(y^2 - \frac{1}{m}\right) e^{-my^2/2} e^{i(kx-\sigma t)}. \tag{8.5.53b}$$

纬向流的地转偏差在赤道处最大，且随y^2增加而减小。仅当$|y| \gg m^{-1/2}$时，U_0才处于近似的地转平衡中。

自由振荡

对于自由振荡，垂直结构方程(8.5.20)将有齐次边界条件，且问题变为 m^2 的本征值问题。这个问题与6.12节已讨论过的问题是一样的，在概念上没有什么重要的改变。对平底大洋[1]来说，在边界 $z=0$ 和 $z=1$处 w 必为零，(8.5.20) 式恰当的边界条件的提法是〔利用(8.5.12)式〕：

$$\frac{dG}{dz} = 0; \quad z = 0, 1. \tag{8.5.54}$$

本征值问题(8.5.20)和(8.5.54)式限定了如下的一组本征值：

$$m^2 = m_i^2, \qquad i = 0, 1, 2, 3 \cdots\cdots, \tag{8.5.55}$$

其中 $i=0$ 的模态对应于 $m=0$ 的模态，即正压模态。当 m 为零时，由(8.5.51)、(8.5.52)和(8.5.53)式可看出，所得到的振荡不是赤道拦截的。实际上对于正压模态，运动的垂直尺度远小于 g/N_0^2(由静力稳定度定义的标高) 的近似不再成立，而且如我们所预料的，对此情况的较详细的计算意味着，适当的经向尺度是与上表面有关的外变形半径，它在赤道区为

$$\mathscr{R}_{eq} = \frac{(gD)^{1/4}}{\beta_0^{1/2}} \gg L_e. \tag{8.5.56}$$

$\mathscr{R}_{eq}$的特征值是 O(3,000公里)，所以尽管认为〔在(8.5.54)式中已忽略的〕自由而运动动力学性质确实会产生赤道拦截，但它只是很轻微的拦截形式。尺度$\mathscr{R}_{eq}$十分大，以至不可能把正压模态考虑为与中纬度动力学性质完全无关的。对于斜压模态，(8.5.14)式给出的 L_e 对应

(1) 如果考虑地形，则不可能再有分离形式(8.5.17)，这已在6.16节中指出过。

于 $m_i^2 \neq 0$ 的本征值，是大体上适当的尺度。对每个模态来说，特征尺度通过(8.5.35)式而取决于 m_i；所以每个模态真正的经向尺度为

$$\frac{L_e}{(m_i)^{1/2}}=\left(\frac{N_0 D}{\beta_0 m_i}\right)^{1/2}=\frac{(gh_i)^{1/4}}{\beta_0{}^{1/2}}, \qquad (8.5.57)$$

式中的 h_i 是所谓的相当深度，即

$$h_i=\frac{N_0^2 D^2}{g m_i^2}. \qquad (8.5.58)$$

也就是说，h_i 是均质大洋深度，其外变形半径等于第 i 个斜压模态的内变形半径．相当深度不是第 i 个波动的特征垂直尺度．而特征垂直尺度是

$$\frac{D}{m_i}=\frac{(gh_i)^{1/2}}{N_0}=(Hh_i)^{1/2}, \qquad (8.5.59)$$

其中

$$H=\left(\frac{N_0^2}{g}\right) \qquad (8.5.60)$$

是密度标高的特征值．在表8.5.1中给出 Moore 和 Philander(1977)对于 N^2 的典型赤道分布所计算的前五个斜压模态的 h_i 值。注意，表中$(gh_i)^{1/2}$的值给出第 i 个波的凯尔文波波速，而表的最后两列表示经向拦截特征尺度和前五个凯尔文波的周期。

表8.5.1

i	h_i (厘米)	$(gh_i)^{1/2}$ (厘米/秒)	$Le/m_i^{1/2}$ (公里)	$T_i=m_i^{1/2}/(\beta Le)$ (天)
1	60	240	325	1.5
2	20	140	247	2.0
3	8	88	197	2.6
4	4	63	165	3.1
5	2	44	139	3.6

赤道拦截斜压波从大洋西边界反射的过程，是一个引人注意的过程，特别是由于5.8节提出了用反射的罗斯贝波解释中纬的大洋环流西部强化，所以反射过程更引起人们的注意。现在我们来考虑该问题在赤道地区的情况。设入射波是具有单位振幅和经向波数为 J 的低频赤道行星波．为了使群速度向西，(8.5.45)式对于给定的 σ 的适当根是

$$k_+=-\frac{1}{2\sigma}+\frac{1}{2}[(\sigma^{-1}-2m_i\sigma)^2-8m_iJ]^{1/2}, \qquad (8.5.61)$$

即长行星波．由(8.5.51a,b)式，相应的入射波的U和V是

$$V_{入射}=Re\, e^{i(k_+x-\sigma t)}\psi_J(\eta), \qquad (8.5.62a)$$

$$U_{入射}=Re\frac{i}{m_i^{1/2}}\left[+(J/2)^{1/2}\frac{\psi_{J-1}(\eta)}{(\sigma+k_+/m_i)}+\left(\frac{J+1}{2}\right)^{1/2}\frac{\psi_{J+1}(\eta)}{(\sigma-k_+/m_i)}\right], \qquad (8.5.62b)$$

式中

$$\eta=(m_i)^{1/2}y. \qquad (8.5.62c)$$

这个表示入射波的解，必须加上波动频率也是 σ 并具有向东群速度的行星波解。图8.5.2表明，这个反射波族一般由 $j\leqslant J$ 的有限个罗斯贝波的波族和“混合”波及凯尔文波组成。也就是说，根据(8.5.51a,b)、(8.5.52a,b)和(8.5.44)式，反射波场的一般表达式是

$$V_{反射}=Re\left\{\sum_{j=1}^{J}Aje^{i(k_-x-\sigma t)}\psi_j(\eta)+A_0e^{i[(m\sigma-\sigma^{-1})x-\sigma t]}\psi_0(\eta)\right\} \tag{8.5.63a}$$

$$U_{反射}=Re\left\{\sum_{j=1}^{J}\frac{Aj}{m_i^{1/2}}\left[+\frac{(j/2)^{1/2}}{\sigma+k_-/m_i}\psi_{j-1}(\eta)+\frac{[(j+1)/2]^{1/2}}{\sigma-k_-/m_i}\psi_{j+1}(\eta)\right]\right.$$
$$\left.\times e^{i(kx-\sigma t)}\right\}+Re\left\{\frac{im_i^{1/2}\sigma}{2^{1/2}}A_0\psi_0(\eta)e^{i[(m\sigma-\sigma^{-1})-\sigma t]}\right.$$
$$\left.+A_{kel}\psi_0(\eta)e^{-i\sigma(t-m_ix)}\right\}, \tag{8.5.63b}$$

式中 A_0 和 A_{kel} 分别是反射的“混合”波和凯尔文波的振幅，$j\geqslant1$ 的 Aj 是反射罗斯贝波的

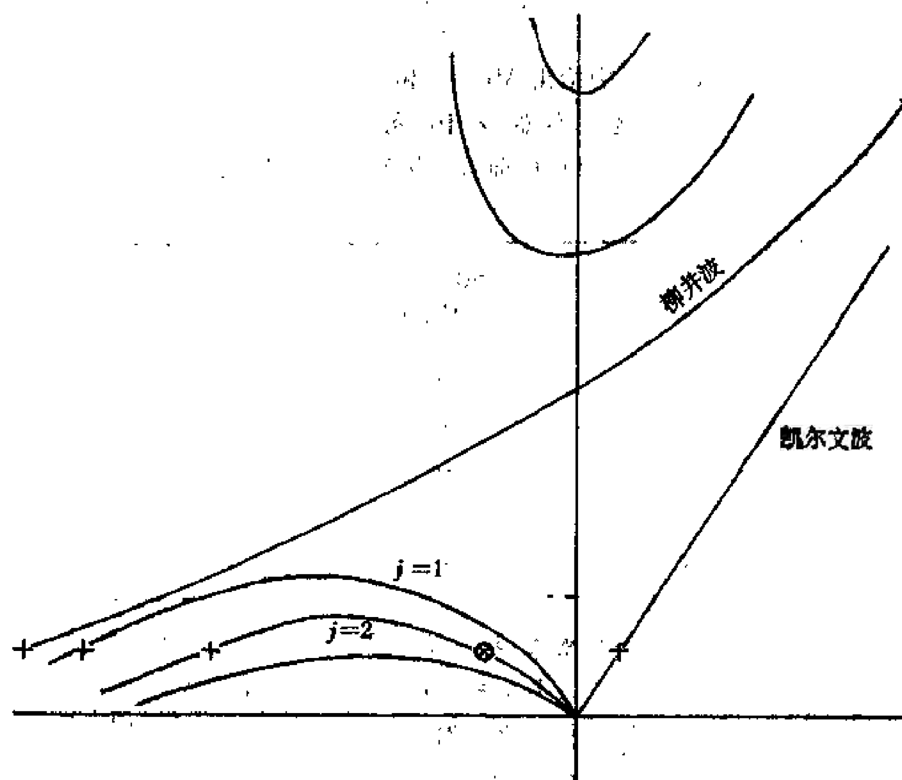


图8.5.2　频散示意图

记号⊗表示入射在西部经向边界上的罗斯贝波的位置，记号＋表示反射的“混合”波、罗斯波和凯尔文波在图上的位置

振幅。每个短行星波的反射波数是

$$k_-=-\frac{1}{2\sigma}-\frac{1}{2}[(\sigma^{-1}-2m\sigma)^2-8mj]. \tag{8.5.64}$$

注意，k_- 是 j 的函数，即 $k_-=k_-(j)$；但是为了概念上的简洁性，至此我们尚未以显函数形式表示出这种依赖关系。重要的是记住，各个反射行星波将有不同的纬向波数，且波数 k_- 之大小随 j 的减小而增加。因此，j 较小的一些波在 x 方向上波长也较短，且局限于赤道附近的

狭窄区域内。

在$x=0$处

$$U_{入射}+U_{反射}=0, \tag{8.5.65}$$

上式与(8.5.62b)和(8.5.63b)一起意味着(Moore和Philander,1977)

$$A_J=-\frac{\sigma-k_-(J)/m_i}{\sigma+k_+(J)/m_i},$$

$$A_{J-1}=0, \tag{8.5.66a}$$

$$A_{J-2}=-\left(\frac{J}{J-1}\right)^{1/2}[\sigma-k_-(J-2)]\times\left[\frac{A_J}{\sigma+k_-(J)/m_i}+\frac{1}{\sigma+k_+(J)/m_i}\right],$$

以及

$$A_{j-2}=-\left(\frac{j}{j-1}\right)^{1/2}[\sigma-k_-(j-2)]A_j\left[\frac{\sigma-k_-(j-2)}{\sigma+k_-(j)}\right],$$

$$j=J-1,\ J-2,\ \cdots,3;$$

$$A_0=\frac{2^{1/2}A_2}{[\sigma+k_+(2)/m_i]\sigma}, \tag{8.5.66b}$$

$$A_{kel}=-\frac{iA_1}{2^{1/2}[\sigma+k_-(1)]}.$$

这里有几个值得注意的重要问题。第一，单个垂直波型的反射可完全用这单个垂直结构来描写。反射过程不改变波型的垂直结构。但是，反射波包含有限个水平波型的混合。如果入射波是y的偶函数，则它的对称性在反射过程中保持不变（即所有j为奇数的A_j均为零），j为奇数时也有类似性质。因为反射只产生$j\leqslant J$的波型，所以反射波所占据的经向扰动带与入射波占据的纬度带相同。虽然反射过程并不激起向东移动的邦加莱波。但“混合”波和凯尔文波之产生，是西边界反射过程的基本组成部分。如同Cane和Sarachik(1977)所注意到的，移动较快的凯尔文波（见表8.5.1)从西边界带走能量的能力表明，对形成西边界流来说，赤道地区可拦截的入射能，比5.2节所述的中纬度情况来得少。

大洋东边界处的反射过程，因没有可向西传输能量的“混合”波和凯尔文波而变得十分复杂。Moore(1968)曾指出，在这种情况下，反射波场可用$j>J$的ψ_j波型之和表示。Moore工作的最重要的定性结果是，他证明了（证明过程之复杂超出我们讨论的范畴）东边界处一部分入射能，以从赤道沿经向边界移出的凯尔文波的形式流向极地方向。而这在西边界处是不可能的，凯尔文波在那里必须沿边界向赤道方向移动。

对大气说来，在6.2节讨论的自由振荡问题中没有斜压模态。同海洋的情况一样，存在自由正压模态。如果不作$(D/\theta_*)\partial\theta_*/\partial z_*\ll1$的近似，那末计算表明（如Holton,1975)，特征水平尺度是外罗斯贝变形半径，它对等温大气而言是

$$\mathscr{R}_{eq}=(g\gamma H)^{1/4}\beta_0^{1/2},$$

其中H是密度标高，γ是空气的定压比热c_p与定容比热c_v之比值。这个正压尺度十分大(即3,000公里之量级)，以至把这种波当作赤道拦截波大概是成问题的。

---

(1) 当然，除非入射波是邦加莱波，此时反射波是邦加莱波、“混合”波与凯尔文波的类似的有限和，且k_-和k_+相互交换。

强迫振荡

强迫的赤道拦截波问题，对大气和海洋来说都是有意义的。在前一种情况下，具有臭氧和水汽这类吸收物质的大气层中热量之周期性释放，和对流层中水汽凝结的非绝热热量释放，都被看作为赤道波的强迫源。在海洋的情况下，作用于表面混合层深度上的、随时间变化的风应力，给赤道运动提供了非定常的强迫作用。为了模拟这些机制，我们回到(8.5.7a,b)和(8.5.12)式，并把它们改写成包含代表外加强迫作用的非齐次项，即

$$\frac{\partial u}{\partial t}-yv=-\frac{\partial p}{\partial x}+X(x,y,z,t), \tag{8.5.67a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+yu=-\frac{\partial p}{\partial y}+Y(x,y,z,t), \tag{8.5.67b}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial p}{\partial z}+ws(z)=\frac{\partial Q}{\partial z}(x,y,z,t), \tag{8.5.67c}$$

式中的 X、Y 分别是在纬向和经向上的外加动量源，而 $\partial Q/\partial z$ 是外加热源。假设这些源为已知量，但是实际上它们可以依赖于 u、v 和 p。在推导(8.5.67c)的过程中我们已使用了(8.5.11)式，而该式和(8.5.7c)式被认为是不被强迫作用所改变的。为方便起见，我们定义算子：

$$\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\rho_s}{s(z)}\frac{\partial}{\partial z}\equiv\mathscr{D}^2. \tag{8.5.68}$$

可以用连续方程(8.5.7c)和动量方程及(8.5.67c)式来消去 p，从而得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial t^2}[\mathscr{D}^2 u]=-\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}+y\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{D}^2 v+\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{D}^2 X-\frac{\partial}{\partial x}\mathscr{D}^2 Q, \tag{8.5.69a}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial t^2}[\mathscr{D}^2 v]=-\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}-y\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{D}^2 u+\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{D}^2 Y-\frac{\partial}{\partial y}\mathscr{D}^2 Q. \tag{8.5.69b}$$

对于 X、Y 和 Q 为零的自由振荡，若假定有分离形式的解 (8.5.17)，则(8.5.69a,b)可简化为(8.5.22a,b)。

若在(8.5.69a,b)中消去 u，则可得只含 v 的方程：

$$\frac{\partial^4}{\partial t^4}\mathscr{D}^4 v+\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla_1^2\mathscr{D}^2 v+\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\mathscr{D}^2 v+y^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathscr{D}^4 v=J, \tag{8.5.70}$$

式中，

$$\nabla_1^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}, \tag{8.5.71a}$$

$$J=\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathscr{D}^2\right]\left[\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{D}^2 Y-\frac{\partial}{\partial y}\mathscr{D}^2 Q\right]-\left[y\mathscr{D}^2+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\right]\times\left[\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{D}^2 X-\frac{\partial}{\partial x}\mathscr{D}^2 Q\right]. \tag{8.5.71b}$$

现设 J 是 x 和 t 的周期函数，即令

$$J=Re J_0(y,z)e^{i(kx-\sigma t)}. \tag{8.5.72}$$

显然，任何强迫作用可以分解为这类强迫作用的线性组合，由于(8.5.70)式的线性性质，其中每一项都可分别处理。如果寻找如下形式的 v 的解：

$$v = Re V(y,z)e^{i(kx-\sigma t)},\tag{8.5.73}$$

则$V(y,z)$必须满足：

$$\left\{(\sigma^2-y^2)\mathscr{D}^2 V-\left[\frac{d^2}{dy^2}-k^2-\frac{k}{\sigma}\right]\mathscr{D}^2 V\right\}=\frac{J_0(y,z)}{\sigma^2}.\tag{8.5.74}$$

仅当乘以 $\mathscr{D}^2 V$ 的算子等于一个常数乘以(σ^2-y^2)时，即当

$$V=A_j(z)V_j(y)\tag{8.5.75}$$

时，而

$$\frac{d^2}{dy^2}V_j+\left[\lambda_j^2(\sigma^2-y^2)-\frac{k}{\sigma}-k^2\right]V_j=0,\tag{8.5.76}$$

其中 λ_j 即为上面提到的常数，则(8.5.74)式的齐次部分才可能有分离形式的解。重要的问题是，(8.5.76)式等价于以 λ_j^2 置换 m^2 的(8.5.34)式。因此，在赤道区被拦截的(8.5.76)式之解是

$$V_j(y)=\psi_j(\lambda_j^{1/2}y),\tag{8.5.77}$$

其中 λ_j 必须满足本征值关系(8.5.41)：

$$\sigma^2\lambda_j^2-2\left(j+\frac{1}{2}\right)\lambda_j-\frac{k}{\sigma}-k^2=0,\tag{8.5.78a}$$

或者，

$$\lambda_j=\lambda_{j\pm}=\frac{j+1/2}{\sigma^2}\left\{1\pm\left[1+\frac{k\sigma(1+k\sigma)}{(j+1/2)^2}\right]^{1/2}\right\}.\tag{8.5.78b}$$

对于自由振荡，(8.5.36)式中的m^2作为齐次垂直结构方程的本征值而被确定，且 σ^2 是(8.5.36)式对每一相应的m_i的无限本征值集合之一。对于有固定频率的振荡，λj是 (8.5.76)式的本征值，而(8.5.76)式等价于 (8.5.36)式，只不过现在是对于一个固定的 σ 而言。ψ_i 的正交关系可以立即从(8.5.76)式导出：

$$\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma^2-y^2)V_j(\lambda_j y)V_l(\lambda_l y)dy=0,\quad \lambda_l\neq\lambda_j,\tag{8.5.79}$$

并且重要的是注意到，(8.5.79)式适用于两个不同的 λ_j，如(8.5.78b)所给出的那样，这两个不同的 λ_j 都对应于同一个指标 j。对于那些当$|y|$很大时趋于零(即拦截)的函数来说，$V_j(y)$在区间$(-\infty,\infty)$上构成完全集。只考虑这种运动和这类强迫作用时，V可以写为

$$V=\sum_{\lambda_j}A_j(z)V_j(y).\tag{8.5.80}$$

若将(8.5.80)式代入(8.5.74)式，并使用正交关系(8.5.79)，我们得到

$$\mathscr{D}^2B_j+\lambda_j^2B_j=M_j(z),\tag{8.5.81}$$

式中

$$B_j=\mathscr{D}^2A_j,$$

$$M_j=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}V_j(y)J_0(y,z)dy}{\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma^2-y^2)V_j^2dy},\tag{8.5.82}$$

该式可先对B_j求解，然后再对A_j求解。强迫作用的效应现在只出现在垂直结构方程(8.5.81)

式中，该式是非齐次的。从(8.5.81)的形式可以看出，对于每一个y方向波型，在$M_j(z)$不为零的层之外的区域中，强迫响应的垂直尺度由λ_j^{-1}给出。也就是说，除了强迫作用邻域以外，任意j的响应之垂直尺度，通过(8.5.78b)而作为σ和k的函数，即这个垂直尺度不是流体固有的，而是强迫作用参数的灵敏函数。用有量纲单位表示，垂直尺度由下式给出：

$$\lambda_{j*}^{-1}=\frac{D}{\lambda_j}; \tag{8.5.83}$$

借助于(8.5.6)和(8.5.14)式的基本尺度而恢复为有量纲单位，我们有

$$\lambda_{j*}=\left(j+\frac{1}{2}\right)\frac{N_0\beta_0}{\sigma_*^2}\left\{1\pm\left[1+\frac{(k_*\sigma_*/\beta_0)(1+k_*\sigma_*/\beta_0)}{(j+1/2)^2}\right]^{1/2}\right\}. \tag{8.5.84}$$

由(8.5.84)式显而易见，所有的λ_j是实数。但是，为了使V_j当$|y|$很大时趋于零，我们还必须只取λ_j为正的根作为有物理意义的根。若$k_*\sigma_*>0$，相当于该强迫作用有向东的相速度，则(8.5.78b)的负根将使$\lambda_j<0$，故必须舍弃。另一方面，若$-1<k_*\sigma_*/\beta_0<0$，则λ_j的两个根均为正。这一特性相当于在$k_*\sigma_*<0$的限制性区域和由"混合"波描写的边界层内，存在着自由罗斯贝标准模态。实际上负根对应于强迫罗斯贝波，而正根对应于强迫惯性重力波。对于很低的频率，λ_j的两个根变得很大，相当于垂直尺度很短、而且在经向被严重拦截的波动。例如，Wunsch(1977)指出，Luyten和Swallow(1976)在印度洋的洋流构造中发现的复杂的多涡胞结构现象，正是这种作为对有年变化周期的季风强迫作用响应现象的证据。在大气中，由观测资料推断出强迫"混合"波和强迫凯尔文波(Holton,1975)，但是这些波动的能源仍不清楚。

附录一 数学基础

A1.1 矢量分析

假定读者已具备关于三维矢量分析的基本知识．我们在此复习一下比较重要的矢量关系式。

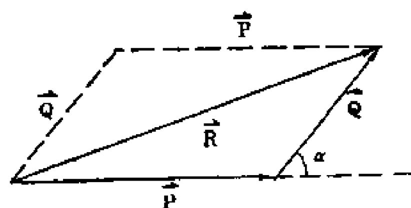
矢量用黑体字母标记，其标量大小用外加两条竖线的同样的黑体字母标记，或就用同一字母的斜体表示。因此，矢量**P**的标量大小可表示为|**P**|，或表示为 p。

有时为方便起见，用某矢量对于 X、Y 和 Z 轴的三维方向余弦 l、m 和 n 来说明该矢量的方向，读者应记得下述的几何关系：

$$l^2+m^2+n^2=1, \tag{A1.1}$$

$$\cos\theta=l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2. \tag{A1.2}$$

在（A1.2）中，θ 是方向余弦分别为 l_1、m_1、n_1 和 $_2$、m_2、n_2 的两条直线之间的夹角。



图A1.1

如图 A1.1 所示，二矢量相加，其和或合成矢量 **R** 之大小为

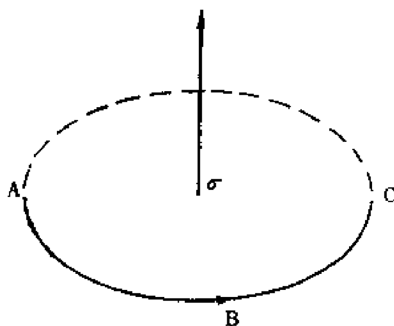
$$R^2=P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha \tag{A1.3}$$

矢量 **P** 之分量可以是任意的、其和为 **P** 的矢量。最常用的分量是平行于 X、Y 和 Z 轴的分量 P_x、P_y 和 P_z，它们是直角分量，满足以下的关系式：

$$P^2=P_x^2+P_y^2+P_z^2. \tag{A1.4}$$

图 A1.2 中的一个面 ABC 可用一个矢量**σ** 来表示，**σ**的大小等于 ABC 这个面的面积，其方向与该面垂直。对于一个闭合面，其外法线方向取为正；对于一个非闭合面，其同界的正方向与法线的正方向一致，如图 A1.2所示。

矢量 **P** 的分量从一组直角轴到另一组直角轴的变换，与它们本身的坐标变换相同．于是我们从图 A1.3（其中 l_1、l_2 和 l_3 分别是 X' 对于 X、Y 和 Z 的方向余弦，等等）看出，



图A1.2

	X	Y	Z
X′	l_1	l_2	l_3
Y′	m_1	m_2	m_3
Z′	n_1	n_2	n_3

图A1.3

*：本附录译自C. B. Officer《Introduction to Theoretical Geophysics》，1974.

$$x'=l_1x+l_2y+l_3z,$$
$$y'=m_1x+m_2y+m_3z, \qquad (A1.5a)$$
$$z'=n_1x+n_2y+n_3z,$$

或

$$x=l_1x'+m_1y'+n_1z',$$
$$y=l_2x'+m_2y'+n_2z', \qquad (A1.5b)$$
$$z=l_3x'+m_3y'+n_3z',$$

同样可用 P_x、P_y 和 P_z 来表示 P'_x 等等，用 $\mathbf{i}$、$\mathbf{j}$ 和 $\mathbf{k}$ 来表示 $\mathbf{i}'$ 等等，反之亦然。

两个矢量的标量积或点乘积，定义为一个在大小上等于该二矢量的大小与它们间的夹角余弦之乘积的标量。根据这个定义，我们得到下述关系式：

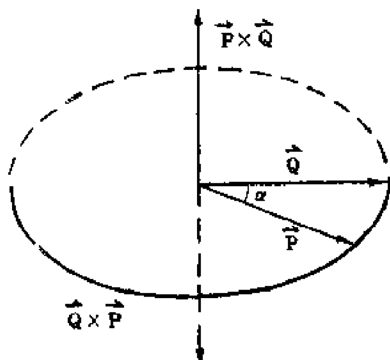
$$\mathbf{Q}\cdot\mathbf{P}=\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}, \qquad (A1.6)$$
$$(\mathbf{P}+\mathbf{Q})\cdot\mathbf{R}=\mathbf{P}\cdot\mathbf{R}+\mathbf{Q}\cdot\mathbf{R}, \qquad (A1.7)$$

和

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=1,$$
$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}=0, \qquad (A1.8)$$

以及

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}=P_xQ_x+P_yQ_y+P_zQ_z,$$
$$P^2=\mathbf{P}\cdot\mathbf{P}=P_x^2+P_y^2+P_z^2. \qquad (A1.9)$$



图A1.4

两个矢量的矢量积或叉乘积，是一个垂直于该二矢量所在平面的矢量，如图 A1.4 所示，以第一个矢量正方向到第二个矢量正方向的较小夹角的右手螺旋旋转方向为其正方向，而其大小等于该二矢量的大小与它们间的夹角正弦之乘积。根据这个定义，我们得到下述关系式：

$$\mathbf{Q}\times\mathbf{P}=-\mathbf{P}\times\mathbf{Q},\quad \mathbf{P}\times\mathbf{P}=0, \qquad (A1.10)$$

$$(\mathbf{P}+\mathbf{Q})\times\mathbf{R}=\mathbf{P}\times\mathbf{R}+\mathbf{Q}\times\mathbf{R}, \qquad (A1.11)$$

$$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k},\ \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i},\ \mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j},$$
$$\mathbf{i}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\times\mathbf{k}=0, \qquad (A1.12)$$

$$\mathbf{P}\times\mathbf{Q}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ P_x & P_y & P_z\\ Q_x & Q_y & Q_z\end{vmatrix} \qquad (A1.13)$$
$$=\mathbf{i}(P_yQ_z-P_zQ_y)+\mathbf{j}(P_zQ_x-P_xQ_z)+\mathbf{k}(P_xQ_y-P_yQ_x),$$

其中(A1.13)式右端的表达式是行列式。

对于三个矢量的积，我们有两种截然不同的组合。三矢量的标量积为一标量：

$$(\mathbf{P}\times\mathbf{Q})\cdot\mathbf{R}=\mathbf{R}\cdot(\mathbf{P}\times\mathbf{Q})=-\mathbf{R}\cdot(\mathbf{Q}\times\mathbf{P})=-(\mathbf{Q}\times\mathbf{P})\cdot\mathbf{R}, \qquad (A1.14a)$$

其中先构成矢量积 $\mathbf{P}\times\mathbf{Q}$，然后取该矢量与 $\mathbf{R}$ 的标量积。于是我们可以得到进一步的关系：

$$(\mathbf{P}\times\mathbf{Q})\cdot\mathbf{R}=\mathbf{P}\cdot(\mathbf{Q}\times\mathbf{R}) \tag{A1.14b}$$

$$(\mathbf{P}\times\mathbf{Q})\cdot\mathbf{R}=\begin{vmatrix} P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix} \tag{A1.15}$$

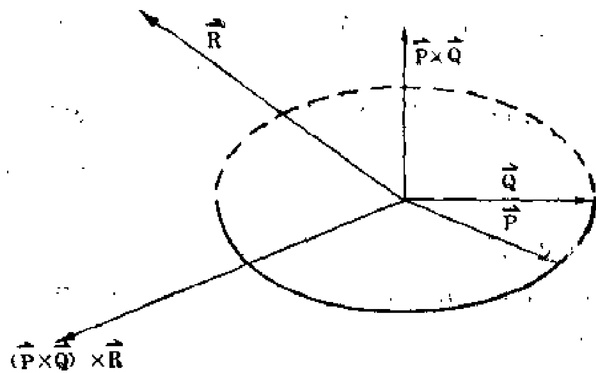
$$\mathbf{i}\times\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}\times\mathbf{k}=-\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}\times\mathbf{j}=1. \tag{A1.16}$$

三矢量的矢量积是一个矢量：

$$(\mathbf{P}\times\mathbf{Q})\times\mathbf{R}=-\mathbf{R}\times(\mathbf{P}\times\mathbf{Q})=\mathbf{R}\times(\mathbf{Q}\times\mathbf{P}), \tag{A1.17}$$

其中先构成矢量积 $\mathbf{P}\times\mathbf{Q}$，然后取该矢量与 $\mathbf{R}$ 的矢量积。从图 A1.5 可以看出，$(\mathbf{P}\times\mathbf{Q})\times\mathbf{R}$ 将位于 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{Q}$ 的平面内。于是我们可得下述关系：

$$(\mathbf{P}\times\mathbf{Q})\times\mathbf{R}=\mathbf{R}\cdot\mathbf{P}\mathbf{Q}-\mathbf{R}\cdot\mathbf{Q}\mathbf{P},$$
$$\mathbf{R}\times(\mathbf{P}\times\mathbf{Q})=\mathbf{R}\cdot\mathbf{Q}\mathbf{P}-\mathbf{R}\cdot\mathbf{P}\mathbf{Q}. \tag{A1.18}$$



图A1.5

对于由

$$\mathbf{r}(t)=\mathbf{i}x(t)+\mathbf{j}y(t)+\mathbf{k}z(t)$$

定义的标量 t 之矢量函数 $\mathbf{r}$，当 X、Y 和 Z 是固定的直角坐标轴时，其导数为

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{i}\frac{dx}{dt}+\mathbf{j}\frac{dy}{dt}+\mathbf{k}\frac{dz}{dt};$$
$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=\mathbf{i}\frac{d^2x}{dt^2}+\mathbf{j}\frac{d^2y}{dt^2}+\mathbf{k}\frac{d^2z}{dt^2}. \tag{A1.19}$$

对于标量积和矢量积的导数，我们有

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q})=\frac{d\mathbf{P}}{dt}\cdot\mathbf{Q}+\mathbf{P}\cdot\frac{d\mathbf{Q}}{dt},$$
$$\frac{d}{dt}(\mathbf{P}\times\mathbf{Q})=\frac{d\mathbf{P}}{dt}\times\mathbf{Q}+\mathbf{P}\times\frac{d\mathbf{Q}}{dt}. \tag{A1.20}$$

矢量微分算子 ∇ 定义为

$$\nabla=\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}. \tag{A1.21}$$

如果使用球坐标、r、θ、ϕ、——其中 r 是径向矢量，θ 是极角，ϕ 是方位角，并且 $\mathbf{r}_1$、$\boldsymbol{\theta}_1$、和 $\boldsymbol{\varphi}_1$ 分别为单位矢量——则 ∇ 将为

$$\nabla=\mathbf{r}_1\frac{\partial}{\partial r}+\boldsymbol{\theta}_1\frac{\partial}{r\partial\theta}+\boldsymbol{\phi}_1\frac{\partial}{r\sin\theta\partial\phi}. \tag{A1.22}$$

如果使用柱坐标 ρ、φ、z——其中 ρ 是垂直于柱轴的距离坐标，φ 是方位角，z 是沿轴方向的距离坐标，并且 $\boldsymbol{\rho}_1$、$\boldsymbol{\varphi}_1$ 和 $\mathbf{k}_1$ 分别为单位矢量——则 ∇ 将为

$$\nabla=\boldsymbol{\rho}_1\frac{\partial}{\partial\rho}+\boldsymbol{\varphi}_1\frac{\partial}{\rho\partial\varphi}+\mathbf{k}_1\frac{\partial}{\partial z}. \tag{A1.23}$$

如果$\Phi(x、y、z)$是坐标$x、y、z$的一个适当的标量函数，那末矢量

$$\nabla\phi=\mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial\phi}{\partial z} \tag{A1.24}$$

称为Φ的梯度．考虑$\Phi(x,y,z)=C$（C为确定空间一个面的常数），则$\nabla\Phi$的几何意义是：它是一个矢量，其大小和方向都与Φ在空间的最大增长率相同．它与$\Phi=C$的面垂直，并且，它在某一方向的分量等于Φ在该方向的空间增长率．如图A1.6所示，Φ从A到B的增量就是

$$d\Phi=\nabla\Phi d\lambda\cos\theta=\nabla\Phi\cdot d\boldsymbol{\lambda}. \tag{A1.25}$$

若$\mathbf{V}(x,y,z)$是坐标的一个适当的矢量函数，则标量

$$\nabla\cdot\mathbf{V}=\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}+\frac{\partial V_z}{\partial z} \tag{A1.26}$$

称为$\mathbf{V}$的散度．考虑用$\mathbf{V}=\rho\mathbf{v}$来表示单位时间内流体通过单位截面的质量（其中$\rho$是流体密度，$\mathbf{v}$是速度），则$-\nabla\cdot\mathbf{V}$表示流动造成的单位时间内单位体积的质量增加．这直接给出连续方程：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\nabla\cdot\mathbf{V}, \tag{A1.27}$$

或

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\mathbf{v})=0. \tag{A1.28}$$

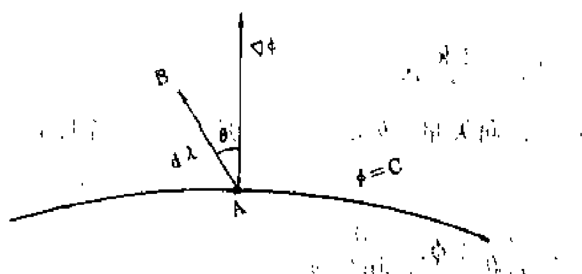
如果流体是不可压缩的，即ρ为常数，那末这些方程就简化为

$$\nabla\cdot\mathbf{V}=\nabla\cdot\mathbf{v}=0. \tag{A1.29}$$

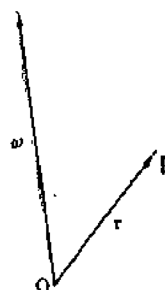
若$\mathbf{V}(x,y,z)$还是坐标的一个适当的矢量函数，则矢量

$$\nabla\times\mathbf{V}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ V_x&V_y&V_z\end{vmatrix} \tag{A1.30}$$

称为$\mathbf{V}$的旋度．考虑一个刚性物体，它具有相对于固定在该物体内的原点O旋转的常值角速度ω，而O本身具有一个常值线速度$\mathbf{v}_0$，如图A1.7所示，则P点总的线速度为



图A1.6



图A1.7

$$\mathbf{V}=\mathbf{V}_0+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}\qquad(A1.31)$$

并且我们可得下面这个关系式

$$\nabla\times\mathbf{V}=2\boldsymbol{\omega}\qquad(A1.32)$$

所以，线速度的旋度等于角速度的两倍。

相继使用∇，我们得到梯度之散度为

$$\nabla\cdot\nabla\Phi=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2},\qquad(A1.33)$$

其中

$$\nabla\cdot\nabla=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\qquad(A1.34)$$

称为拉普拉斯算子，它同样可以应用于矢量函数 **V**。此外，梯度的旋度恒为零，即

$$\nabla\times\nabla\Phi=0,\qquad(A1.35)$$

并且旋度的散度也恒为零，即

$$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{V}=0.\qquad(A1.36)$$

如果某矢量函数 **W** 的旋度在空间区域 τ 内处处为零，则 **W** 称为无旋场；从(A1.35)式可以看出，若 **W** 是标量函数 Φ 的梯度，则 **W** 是无旋场。其次，若矢量函数 **W** 的散度在区域 τ 内处处为零，则 **W** 称为管形场；从(A1.36)式可以看出，若 **W** 为矢量函数 **V** 的旋度，则 **W** 是管形场。矢量 **V** 之旋度的矢量积 $\nabla\times\nabla\times\mathbf{V}$ 也是重要的，它为

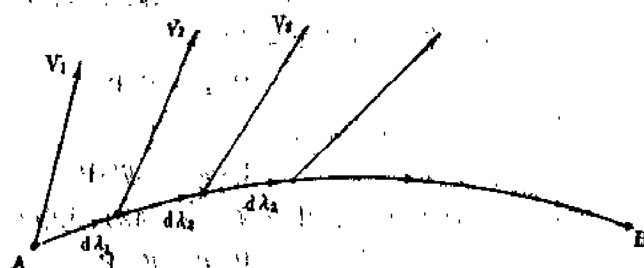
$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{V}=\nabla\times(\nabla\times\mathbf{V})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{V})-\nabla\cdot\nabla\mathbf{V}.\qquad(A1.37)$$

根据以上的关系式，我们还可以得出一个有用的结果，即任意一个矢量（设它可用另一矢量的拉普拉斯来表示）可以认为是由两个矢量函数组成的，其中一个是无旋的，另一个是管形的，即

$$\begin{aligned}&\mathbf{W}=\Phi\nabla+\nabla\times\mathbf{A},\\&\nabla\cdot\mathbf{A}=0,\end{aligned}\qquad(A1.38)$$

其中 Φ 为 **W** 的标量位势，**A** 是 **W** 的矢量位势。

若 $\mathbf{V}(x,y,z)$ 仍是一个适当的矢量函数，则如图 A1.8 所定义的，



图A1.8

$$\int_A^B\mathbf{V}d\lambda$$

是 **V** 沿路径 AB 的线积分。考虑 **V** 是作用在运动质点上的力，那末 **V** 在质点移动路径上的积分就是该力所作的功。如果 **V** 是位置标量函数的梯度 $\nabla\Phi$，那末就得出，线积分与 A 至 B 的路径无关，并且沿一闭合曲线的线积分

$$\oint\mathbf{V}d\lambda$$

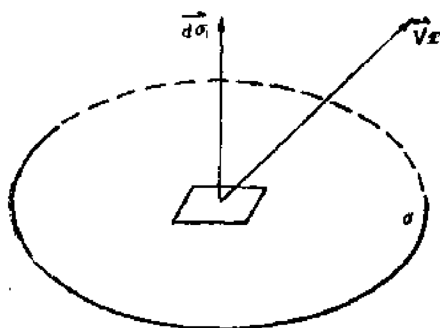
恒为零。还得出，若 **V** 沿每条闭合路径的线积分都为零，则 **V** 必定是某个标量函数 ϕ 的梯度，因而也是无旋的。

考虑一个如图 A1.9 所示的面 σ，则

$$\int_\sigma\mathbf{V}\cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

称为 **V** 在 σ 面上的面积分。矢量 **V** 的面积分叫做通过该面的 **V** 通量。如果 **V** 是单位时间

内流体通过单位横截面的质量，那末面积分就是单位时间内通过整个面的流量。



图A1.9

其次，我们给出称为高斯定理的积分关系，它表示矢量函数 **V** 之散度在任意体积 τ 上的体积分，等于 **V** 在围绕体积 τ 的闭合面上的面积分，即

$$\int_\tau \nabla\cdot \mathbf{V} d\tau=\int_\sigma \mathbf{V}\cdot d\boldsymbol{\sigma}, \tag{A1.39}$$

作为其推论的格林定理可表示为

$$\int_\tau (u\nabla\cdot\nabla v-v\nabla\cdot\nabla u)d\tau=\int_\sigma (u\nabla v-v\nabla u)\cdot d\boldsymbol{\sigma}, \tag{A1.40}$$

其中 u 和 v 是是标的两个标量函数。

以下我们给出称为斯托克斯定理的积分关系，它表示矢量函数之旋度在任意面 τ 上的面积分等于 **V** 沿该面周线入的线积分，即

$$\int_\sigma \nabla\times\mathbf{V}\cdot d\boldsymbol{\sigma}=\oint \mathbf{V}\cdot d\boldsymbol{\lambda}. \tag{A1.41}$$

如果对于斯托克斯定理成立的一个面是闭合面，则该面的周线长度为零，因而(A1.41)式右端等于零。

我们还需给出把一个矢量变换为另一个矢量的最简单的矢量算子，即称为二阶张量的 Ψ，其定义为

$$\Psi=a_{11}\mathbf{ii}+a_{12}\mathbf{ij}+a_{13}\mathbf{ik}+a_{21}\mathbf{ji}+a_{22}\mathbf{jj}+a_{23}\mathbf{jk}+a_{31}\mathbf{ki}+a_{32}\mathbf{kj}+a_{33}\mathbf{kk}. \tag{A1.42}$$

取 Ψ 与矢量 **P** 的标量积，得到一个新的矢量 **Q**，它一般在大小和方向上都与 **P** 不同。新矢量 **Q** 被称为 **P** 的线性矢量函数。如果 $aij=aji$，则称二阶张量 Ψ 是对称的。如果 $aij=-aji$，则称 Ψ 是反对称的；对于一个反对称的二阶张量，$a_{11}=a_{22}=a_{33}=0$。

对于一个对称的二阶张量，我们有

$$\mathbf{P}\cdot\Psi=\Psi\cdot\mathbf{P}; \tag{A1.43a}$$

对于一个反对称的二阶张量，有

$$\mathbf{P}\cdot\Psi=-\Psi\cdot\mathbf{P}. \tag{A1.43b}$$

任意二阶张量 Ψ 的共轭 Ψ_c，由交换（A1.42）式中每项的单位矢量之次序面得到，所以

$$\mathbf{P}\cdot\Psi=\Psi_c\cdot\mathbf{P}. \tag{A1.44}$$

一个对称的二阶张量

$$I=\mathbf{ii}+\mathbf{jj}+\mathbf{kk} \tag{A1.45}$$

称为单位张量，它具有如下的简单性质：

$$\mathbf{P}\cdot I=I\cdot\mathbf{P}=\mathbf{P}. \tag{A1.46}$$

可以证明，任意的二阶张量可表示为一个对称的与一个反对称的二阶张量之和，而任意对称的二阶张量可通过选择适当的坐标轴面简化为

$$\Psi=a_x\mathbf{ii}+a_y\mathbf{jj}+a_z\mathbf{kk}. \tag{A1.47}$$

A1.2 曲线坐标系

我们通常需要在非直角坐标系中来推导各种物理定律或解决一些问题。以下四节将给出矢量和矢量算子在比较普遍的曲线是标系中的表达式。

在直角坐标系中，某点的位置由 x、y、z 三个坐标来确定，即该点的位置是分别由这些坐标决定的三个互相垂直的平面之交点。如果我们用 q_1、q_2 和 q_3 来分别标记三个普通坐标，那末我们可用它们来表示 x、y 和 z：

$$
\begin{aligned}
x&=x(q_1,q_2,q_3),\\
y&=y(q_1,q_2,q_3),\\
z&=z(q_1,q_2,q_3),
\end{aligned}
\tag{A1.48}
$$

相反地有

$$
\begin{aligned}
q_1&=q_1(x,y,z),\\
q_2&=q_2(x,y,z),\\
q_3&=q_3(x,y,z).
\end{aligned}
\tag{A1.49}
$$

于是任一点的位置既可用 x、y、z 来给定，也可用 q_1、q_2、q_3 来给定。

根据（A1.48）式，我们可直接写出

$$
\begin{aligned}
dx&=\frac{\partial x}{\partial q_1}dq_1+\frac{\partial x}{\partial q_2}dq_2+\frac{\partial x}{\partial q_3}dq_3,\\
dy&=\frac{\partial y}{\partial q_1}dq_1+\frac{\partial y}{\partial q_2}dq_2+\frac{\partial y}{\partial q_3}dq_3,\\
dz&=\frac{\partial z}{\partial q_1}dq_1+\frac{\partial z}{\partial q_2}dq_2+\frac{\partial z}{\partial q_3}dq_3.
\end{aligned}
\tag{A1.50}
$$

我们用 ds 来标记相邻两点间的距离元，显然，在直角坐标系中，$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$，或用我们的曲线坐标系，由(A1.50)式有

$$
\begin{aligned}
ds^2&=dx^2+dy^2+dz^2\\
&=Q_1^2dq_1^2+Q_2^2dq_2^2+Q_3^2dq_3^2\\
&\quad+2Q_{12}dq_1dq_2+2Q_{13}dq_1dq_3+2Q_{23}dq_2dq_3,
\end{aligned}
\tag{A1.51}
$$

其中

$$
Q_i^2=\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2 \qquad (i=1,2,3),
$$

和

$$
Qi_j=\frac{\partial x}{\partial q_i}\frac{\partial x}{\partial q_j}+\frac{\partial y}{\partial q_i}\frac{\partial y}{\partial q_j}+\frac{\partial z}{\partial q_i}\frac{\partial z}{\partial q_j} \qquad (i,j=1,2,3,i\neq j).
$$

为方便起见，我们用 s_1、s_2、s_3 分别标记沿任意曲线坐标方向的，对应于 q_1、q_2、q_3 的距离。一般说来，在曲线坐标系中，距离元与坐标元不是一回事，这一点与直角坐标系不同，例如，在二维极坐标系中，坐标是极角和弧长的距离。根据(A1.51)式，我们可以写出当变量仅限于一个 q_i 时的坐标距离元：

$$
ds_i=Q_idq_i \qquad (i=1,2,3).
\tag{A1.52}
$$

一般说来，我们只对正交的曲线坐标系（即三个坐标面总是以直角相交的坐标系）感兴趣。对于正交坐标系，两点之间的距离元用坐标距离元来表示时就是

$$
ds^2=ds_1^2+ds_2^2+ds_3^2
\tag{A1.53}
$$

我们从(A1.51)和(A1.52)式可以看出，(A1.53)式只适用于 $Qi_j=0$ 的各点。对于正交曲线坐标系，(A1.51)式化为

$$ds^2=Q_1^2dq_1^2+Q_2^2dq_2^2+Q_3^2dq_3^2. \tag{A1.54}$$

小体积元 $d\tau$ 和垂直于三个坐标方向的三个小面积元变为：

$$d\tau=ds_1ds_2ds_3=Q_1Q_2Q_3dq_1dq_2dq_3, \tag{A1.55}$$

和

$$d\sigma_{ij}=ds_ids_j=Q_iQ_jdq_idq_j \qquad (i,j=1,2,3,i\neq j). \tag{A1.56}$$

A1.3 曲线坐标系中的矢量关系

为方便起见，与沿直角坐标轴的 i、j、k 相对应，我们用 $\mathbf{u}_1$、$\mathbf{u}_2$、$\mathbf{u}_3$ 分别标记沿曲线坐标轴的三个单位矢量。于是对于任一适当的矢量函数 V，我们可用它沿曲线坐标轴的分量 V_1、V_2、V_3 来表示，即

$$\mathbf{V}=\mathbf{u}_1V_1+\mathbf{u}_2V_2+\mathbf{u}_3V_3. \tag{A1.57}$$

我们从 A1.1节已知，$\nabla\Phi$ 是一个其大小和方向给出 ϕ 的最大空间变化率的矢量，而 $\nabla\Phi$ 的分量是它沿给定坐标方向的方向导数。对于这些空间导数，我们可根据（A1.52）式写出

$$\frac{\partial}{\partial s_i}=\frac{1}{Q_i}\frac{\partial}{\partial q_i} \qquad (i=1,2,3). \tag{A1.58}$$

由于 ∇ 是一适当的矢量算子，于是我们可在正交曲线坐标系中写出 ∇：

$$\nabla=\frac{\mathbf{u}_1}{Q_1}\frac{\partial}{\partial q_1}+\frac{\mathbf{u}_2}{Q_2}\frac{\partial}{\partial q_2}+\frac{\mathbf{u}_3}{Q_3}\frac{\partial}{\partial q_3}, \tag{A1.59}$$

而对于梯度则有

$$\nabla\Phi=\frac{\mathbf{u}_1}{Q_1}\frac{\partial\Phi}{\partial q_1}+\frac{\mathbf{u}_2}{Q_2}\frac{\partial\Phi}{\partial q_2}+\frac{\mathbf{u}_3}{Q_3}\frac{\partial\Phi}{\partial q_3}. \tag{A1.60}$$

现在我们希望找到用曲线坐标 q_1、q_2、q_3 和曲线单位矢量 $\mathbf{u}_1$、$\mathbf{u}_2$、$\mathbf{u}_3$ 表示的 $\nabla\cdot\mathbf{v}$ 和 $\nabla\times\mathbf{v}$ 的表达式。为此，我们首先必须计算 $\nabla\times\mathbf{u}_i$ 和 $\nabla\cdot\mathbf{u}_i$。根据（A1.60）式可写出

$$\nabla q_1=\frac{\mathbf{u}_1}{Q_1},$$

利用（A1.10）式得

$$\begin{aligned}\nabla\times\nabla q_1&=\nabla\times\frac{\mathbf{u}_1}{Q_1}=\nabla\left(\frac{1}{Q_1}\right)\times\mathbf{u}_1+\frac{1}{Q_1}\nabla\times\mathbf{u}_1\\&=-\mathbf{u}_1\times\nabla\left(\frac{1}{Q_1}\right)+\frac{1}{Q_1}\nabla\times\mathbf{u}_1.\end{aligned} \tag{A1.61}$$

由（A1.35）式得，标量函数的梯度之旋度恒为零，所以（A1.61）式变为

$$\mathbf{u}_1\times\nabla\left(\frac{1}{Q_1}\right)=\frac{1}{Q_1}\nabla\times\mathbf{u}_1. \tag{A1.62}$$

完成（A1.62）式左端第二项的微分，并利用（A1.59）式，便得

$$\nabla\left(\frac{1}{Q_1}\right)=-\frac{\mathbf{u}_1}{Q_1^3}\frac{\partial Q_1}{\partial q_1}-\frac{\mathbf{u}_2}{Q_1^2Q_2}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}-\frac{\mathbf{u}_3}{Q_1^2Q_3}\frac{\partial Q_1}{\partial q_3}. \tag{A1.63}$$

由于我们使用的是正交曲线坐标系，所以对于单位矢量的矢量积，有与（A1.12）式相同的关系式，即

$$\mathbf{u}_1\times\mathbf{u}_2=\mathbf{u}_3,\quad \mathbf{u}_2\times\mathbf{u}_3=\mathbf{u}_1,\quad \mathbf{u}_3\times\mathbf{u}_1=\mathbf{u}_2;$$
$$\mathbf{u}_1\times\mathbf{u}_1=\mathbf{u}_2\times\mathbf{u}_2=\mathbf{u}_3\times\mathbf{u}_3=0. \tag{A1.64}$$

在计算（A1.62）式右端项时利用上述关系式，则对于 $\nabla\times\mathbf{u}_1$ 我们得

$$\nabla\times\mathbf{u}_1=\frac{\mathbf{u}_2}{Q_1Q_3}\frac{\partial Q_1}{\partial q_3}-\frac{\mathbf{u}_3}{Q_1Q_2}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2},$$

同样有

$$\nabla\times\mathbf{u}_2=\frac{\mathbf{u}_3}{Q_1Q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}-\frac{\mathbf{u}_1}{Q_2Q_3}\frac{\partial Q_2}{\partial q_3}, \tag{A1.65}$$

$$\nabla\times\mathbf{u}_3=\frac{\mathbf{u}_1}{Q_2Q_3}\frac{\partial Q_3}{\partial q_2}-\frac{\mathbf{u}_2}{Q_1Q_3}\frac{\partial Q_3}{\partial q_1}.$$

对于单位矢量 $\mathbf{u}_1$、$\mathbf{u}_2$、$\mathbf{u}_3$ 的标量积，我们得出与(A1.8) 式同样的关系式，即

$$\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_1=\mathbf{u}_2\cdot\mathbf{u}_2=\mathbf{u}_3\cdot\mathbf{u}_3=1,$$
$$\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_2=\mathbf{u}_2\cdot\mathbf{u}_3=\mathbf{u}_3\cdot\mathbf{u}_1=0. \tag{A1.66}$$

于是我们利用（A1.64)式可以写出 $\nabla\mathbf{u}_1$

$$\nabla\cdot\mathbf{u}_1=\nabla\cdot(\mathbf{u}_2\times\mathbf{u}_3)=\mathbf{u}_3\cdot(\nabla\times\mathbf{u}_2)-\mathbf{u}_2\cdot(\nabla\times\mathbf{u}_3). \tag{A1.67}$$

利用（A1.65）和（A1.66）式来计算（A1.67）式的右端，得

$$\nabla\cdot\mathbf{u}_1=\frac{1}{Q_1Q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}+\frac{1}{Q_1Q_3}\frac{\partial Q_3}{\partial q_1}=\frac{1}{Q_1Q_2Q_3}\frac{\partial(Q_2Q_3)}{\partial q_1},$$

同样有

$$\nabla\cdot\mathbf{u}_2=\frac{1}{Q_1Q_2Q_3}\frac{\partial(Q_1Q_3)}{\partial q_2},$$
$$\nabla\cdot\mathbf{u}_3=\frac{1}{Q_1Q_2Q_3}\frac{\partial(Q_1Q_2)}{\partial q_3}. \tag{A1.68}$$

利用（A1.6）式，并注意到 $\mathbf{u}_i$ 为矢量，而 V_i 为标量，于是可在正交坐标系中写出 $\nabla\cdot\mathbf{V}$：

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{V}&=\nabla\cdot(\mathbf{u}_1V_1)+\nabla\cdot(\mathbf{u}_2V_2)+\nabla\cdot(\mathbf{u}_3V_3)\\&=V_1\nabla\cdot\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_1\cdot\nabla V_1+V_2\nabla\cdot\mathbf{u}_2\\&\quad+\mathbf{u}_2\cdot\nabla V_2+V_3\nabla\cdot\mathbf{u}_3+\mathbf{u}_3\nabla V_3.\end{aligned} \tag{A1.69}$$

利用（A1.68)、(A1.59)和（A1.66)式来计算上式右端的前两项，得

$$V_1\nabla\cdot\mathbf{u}_1=\frac{V_1}{Q_1Q_2Q_3}\frac{\partial(Q_2Q_3)}{\partial q_1} \tag{A1.70}$$

和

$$\mathbf{u}_1\cdot\nabla V_1=\frac{1}{Q_1}\frac{\partial V_1}{\partial q_1}. \tag{A1.71}$$

把（A1.70)、(A1.71）以及对于（A1.69）式右端其他项的类似表达式代入（A1.69）式，合并同类项后得

$$\nabla\cdot\mathbf{V}=\frac{1}{Q_1Q_2Q_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(V_1Q_2Q_3)+\frac{\partial}{\partial q_2}(V_2Q_1Q_3)+\frac{\partial}{\partial q_3}(V_3Q_1Q_2)\right]. \tag{A1.72}$$

对于正交曲线坐标系中的 $\nabla \times \mathbf{V}$，我们可用同样的方法来处理，利用 (A1.10) 式，并再次注意到 $\mathbf{u}_i$ 为矢量，而 V_i 为标量，则有

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{V} &= \nabla \times (\mathbf{u}_1 V_1) + \nabla \times (\mathbf{u}_2 V_2) + \nabla \times (\mathbf{u}_3 V_3) \\ &= V_1 \nabla \times \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_1 \times \nabla V_1 + V_2 \nabla \times \mathbf{u}_2 \\ &\quad - \mathbf{u}_2 \times \nabla V_2 + V_3 \nabla \times \mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_3 \times \nabla V_3 .\end{aligned} \tag{A1.73}$$

与前面一样，利用 (A1.65)、(A1.59) 和 (A1.64) 式来计算上式右端的前两项，得

$$V_1 \nabla \times \mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{u}_2 V_1}{Q_1 Q_3} \frac{\partial Q_1}{\partial q_3} - \frac{\mathbf{u}_3 V_1}{Q_1 Q_2} \frac{\partial Q_1}{\partial q_2} \tag{A1.74}$$

和

$$\mathbf{u}_1 \times \nabla V_1 = \frac{\mathbf{u}_3}{Q_2} \frac{\partial V_1}{\partial q_2} - \frac{\mathbf{u}_2}{Q_3} \frac{\partial V_1}{\partial q_3}. \tag{A1.75}$$

从 (A1.74) 式中减去 (A1.75) 式，得

$$\begin{aligned}V_1 \nabla \times \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_1 \times \nabla V_1 &= \mathbf{u}_2 \left(\frac{V_1}{Q_1 Q_3} \frac{\partial Q_1}{\partial q_3} + \frac{1}{Q_3} \frac{\partial V_1}{\partial q_3} \right) - \mathbf{u}_3 \left(\frac{V_1}{Q_1 Q_2} \frac{\partial Q_1}{\partial q_2} + \frac{1}{Q_2} \frac{\partial V_1}{\partial q_2} \right) \\ &= \mathbf{u}_2 \frac{1}{Q_1 Q_3} \frac{\partial (V_1 Q_1)}{\partial q_3} - \mathbf{u}_3 \frac{1}{Q_1 Q_2} \frac{\partial (V_1 Q_1)}{\partial q_2}.\end{aligned} \tag{A1.76}$$

把 (A1.76) 式和对于 (A1.73) 式右端其他项的类似表达式代入 (A1.73)，并把各项合并成行列式，则有

$$\nabla \times \mathbf{V} = \frac{1}{Q_1 Q_2 Q_3} \begin{vmatrix} Q_1 \mathbf{u}_1 & Q_2 \mathbf{u}_2 & Q_3 \mathbf{u}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3} \\ V_1 Q_1 & V_2 Q_2 & V_3 Q_3 \end{vmatrix}. \tag{A1.77}$$

我们只要把 (A1.72) 式中的 $\mathbf{V}$ 用 $\nabla \Phi$ 代替，并注意到对应于 $\mathbf{V}$ 的三个分量 V_1、V_2、V_3 的 $\nabla \Phi$ 之分量由 (A1.60) 式给出，那末就可以得到正交曲线坐标系中的拉普拉斯算子的形式：

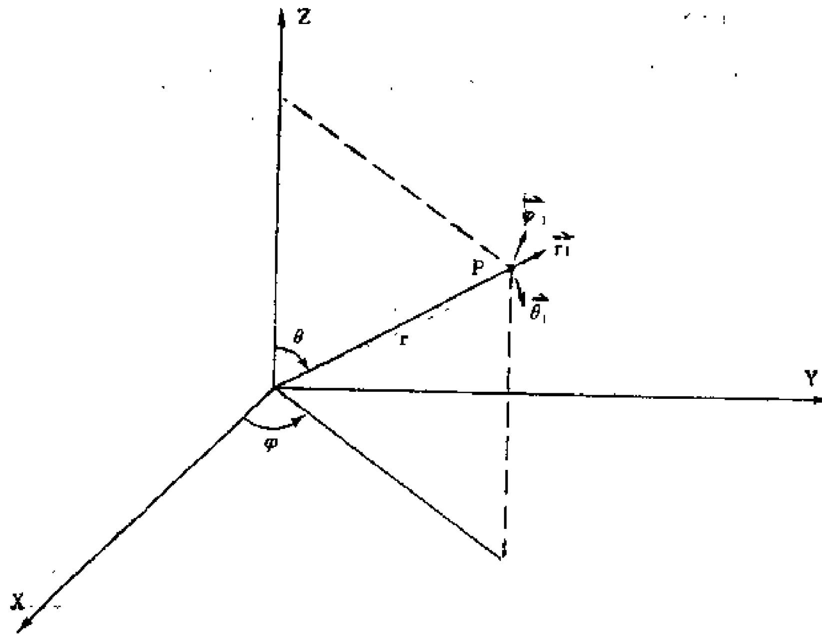
$$\begin{aligned}\nabla \cdot \nabla \Phi = \frac{1}{Q_1 Q_2 Q_3} \Big[& \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{Q_2 Q_3}{Q_1} \frac{\partial \Phi}{\partial q_1} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{Q_1 Q_3}{Q_2} \frac{\partial \Phi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{Q_1 Q_2}{Q_3} \frac{\partial \Phi}{\partial q_3} \right) \Big].\end{aligned} \tag{A1.78}$$

A1.4 球坐标系

在球坐标系中，任意点 P 的位置由三个坐标 r、θ、φ 确定，其中 r 是径向矢量，θ 是极角，φ 是方位角(见图 A1.10). 三个正交坐标面分别是以原点为中心的同心球面，以原点为顶点、并以 z 为轴的圆锥面，以及通过 z 轴的半平面。三个单位矢量 $\mathbf{r}_1$、$\boldsymbol{\theta}_1$、$\boldsymbol{\varphi}_1$ 分别指向 $\mathbf{r}$ 的增加方向，与 $\mathbf{r}_1$ 成直角的 θ 增加方向，以及 Xy 平面中与 $\mathbf{r}_1$、$\boldsymbol{\theta}_1$ 均成直角的 φ 增加方向。根据图 A1.10，用 r、θ、φ 来表示 x、y、z 的 (A1.48) 式变为

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\varphi, \\ y &= r \sin\theta \sin\varphi, \\ z &= r \cos\theta. \end{aligned} \tag{A1.79}$$

根据图A1.10，我们还可以写出(A1.52)式在 $\mathbf{r}_1$、$\boldsymbol{\theta}_1$、$\boldsymbol{\varphi}_1$ 方向的距离元：



图A1.10

$$ds_r = dr,$$
$$ds_\theta = r d\theta,$$
$$ds_\varphi = r\sin\theta d\varphi,$$

或

$$Q_r = 1,$$
$$Q_\theta = r, \qquad (A1.81)$$
$$Q_\varphi = r\sin\theta.$$

于是我们利用（A1.59）式可直接确定 ∇ 算子：

$$\nabla = \mathbf{r}_1 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\boldsymbol{\theta}_1}{r}\frac{\partial\theta}{\partial\theta} + \frac{\boldsymbol{\varphi}_1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}, \qquad (A1.82)$$

它与我们在前面得出的（A1.22）式是一样的，并且，我们还可根据（A1.78）式来确定拉普拉斯的形式：

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial_2}{\partial\varphi^2}\right]. \qquad (A1.83)$$

可以证明，在球坐标系中的散度和旋度分别为：

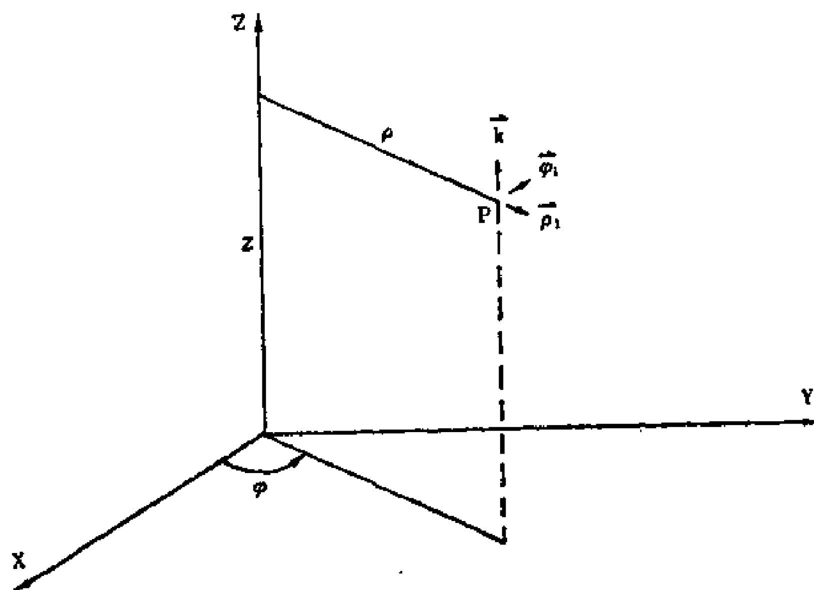
$$\nabla\cdot\mathbf{V} = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2V_r)\right] + \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta V_\theta)\right] + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi},$$

$$\nabla\times\mathbf{V} = \left\{\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta V_\varphi) - \frac{\partial V_\theta}{\partial\varphi}\right]\right\}\mathbf{r}_1 + \left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_\varphi)\right]\boldsymbol{\theta}_1$$
$$+ \left[\frac{1}{r}\frac{\partial(rV_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial\theta}\right]\boldsymbol{\varphi}_1.$$

其中V_r、V_θ和V_φ分别是$\mathbf{r}_1$、$\boldsymbol{\theta}_1$和$\boldsymbol{\varphi}_1$方向的速度。

A1.5 柱坐标系

在柱坐标系中，任意点P的位置由ρ、φ、z、三个坐标确定，其中ρ是垂直于柱轴（Z轴）的距离坐标，φ是方位角，z是笛卡尔z坐标（见图A1.11)。三个正交坐标面分别为绕



图A1.11

Z轴的圆柱面，通过Z轴的半平面，以及与XY面平行的平面。三个单位矢量$\boldsymbol{\rho}_1$、$\boldsymbol{\varphi}_1$、$\mathbf{k}_1$分别指向ρ增加的方向，与$\boldsymbol{\rho}_1$成直角的φ增加方向，以及与Z轴平行的方向。根据图A1.11，用ρ、φ、k来表示x、y、z的(A1.48)式变为

$$
\begin{aligned}
x &= \rho\cos\varphi, \\
y &= \rho\sin\varphi, \\
z &= z.
\end{aligned}
\tag{A1.84}
$$

根据图A1.11，我们还可写出(A1.52) 式在$\boldsymbol{\rho}_1$、$\boldsymbol{\varphi}_1$、$\mathbf{k}_1$方向的距离元：

$$
\begin{aligned}
ds_\rho &= d\rho, \\
ds_\varphi &= \rho d\varphi, \\
ds_z &= dz.
\end{aligned}
\tag{A1.85}
$$

或

$$
\begin{aligned}
Q_\rho &= 1, \\
Q_\varphi &= \rho, \\
Q_z &= 1.
\end{aligned}
\tag{A1.86}
$$

于是我们可以利用(A1.86) 而从(A1.59) 式中直接∇确定算子：

$$
\nabla = \boldsymbol{\rho}_1\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\boldsymbol{\varphi}_1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \mathbf{k}_1\frac{\partial}{\partial z}, \tag{A1.87}
$$

它与我们在前面得出的（A1.23）式一样，并且，我们还可根据(A1.78) 式来确定拉普拉

斯的形式：

$$\nabla^2=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\rho\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]. \tag{A1.88}$$

可以证明，在柱坐标系中的散度和旋度分别为：

$$\nabla\cdot\mathbf{V}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho V_\rho)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial V_z}{\partial z},$$

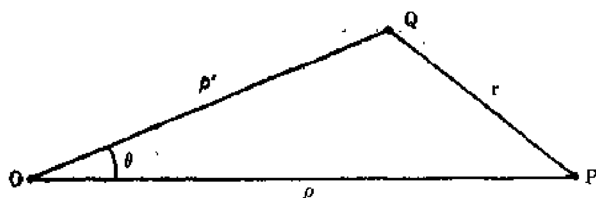
$$\nabla\times\mathbf{V}=\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial V_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial V_\varphi}{\partial z}\right)\boldsymbol{\rho}_1+\left(\frac{\partial V_\rho}{\partial z}-\frac{\partial V_z}{\partial\rho}\right)\boldsymbol{\varphi}_1$$

$$+\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho V_\varphi)}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial V_\rho}{\partial\varphi}\right)\mathbf{k}_1.$$

其中 V_ρ、V_φ 和 V_z 分别是 $\boldsymbol{\rho}_1$、$\boldsymbol{\varphi}_1$ 和 $\mathbf{k}_1$ 方向的速度。

A1.6 勒让德多项式

勒让德多项式对于用球坐标系来确定的一些问题有特殊的意义。我们可以借助于考虑下述几何问题来推导勒让德多项式和有关的级数。



图A1.12

参照图A1.12，我们用坐标距离 ρ 和 ρ' 以及角 θ 来写 r 的表达式。距离 ρ 和 ρ' 分别是从原点 O 到点 ρ 和 Q 的经向距离，θ 是它们之间的夹角，若 OP 是极轴的话，则 θ 是球坐标中的极角。根据余弦定理，有

$$r^2=\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos\theta.$$

于是可以写出

$$\frac{\rho'}{r}=\frac{1}{\sqrt{1-2\frac{\rho}{\rho'}\cos\theta+\frac{\rho^2}{\rho'^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1-2ux+x^2}}, \tag{A1.89}$$

其中我们已令 $\rho/\rho'=x$ 和 $\cos\theta=u$. 现在我们想在 x 满足 $|2ux-x^2|<1$ 时用 x 的幂级数展开式来表达（A1.89）式。根据二项式定理，对于这样的展开式有

$$(1-z)^{-1/2}=a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots+a_nz^n+\cdots, \tag{A1.90}$$

其中

$$a_n=\frac{1\cdot3\cdots\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots\cdots(2n)}. \tag{A1.91}$$

因此，

$$(1-2ux+x^2)^{-1/2}=a_0+a_1(2ux-x^2)+a_2(2ux-x^2)^2+a_3(2ux-x^2)^3$$
$$+\cdots+a_n(2ux-x^2)^n+\cdots. \tag{A1.92}$$

合并 x 的同次幂项，得

$$(1-2ux+x^2)^{-1/2}=a_0+[a_1(2u)]x+[-a_1+a_2(4u^2)]x^2$$
$$+[-a_2(4u)+a_3(8u^3)]x^3\cdots$$

$$=P_0+P_1(u)x+P_2(u)x^2+P_3(u)x^3+\cdots$$
$$+P_n(u)x^n+\cdots\cdots, \quad (A1.93)$$

其中 $P_0(u)$、$P_1(u)$、$P_2(u)$、$P_3(u)$、…、$P_n(u)$、…分别是 x^0、x^1、x^2、x^3、…、x^n、…的系数。系数 $P_n(u)$是 u 的多项式，它就是我们所要求的对于级数展开式（A1.93）的勒让德多项式。

我们可以借助合并(A1.92)式中 x^n 的同次幂项来确定 P_n 的一般表达式。根据 $a_n(2ux-x^2)^n=a_nx^n(2u-x)^n$ 的项，我们得到二项式$(2u-x)^n$ 的展开式中第一项对 x^n 的贡献。根据 $a_{n-1}(2ux-x^2)^{n-1}=a_{n-1}x^{n-1}(2u-x)^{n-1}$的项，我们得到二项式$(2u-x)^{n-1}$ 的展开式中第二项对 x^2 的贡献，以此类推，一直进行到$(2u-x)^{n-k}$ 的展开式。因此我们有

$$P_n(u)x^n=a_nx^n[(2u)^n]+a_{n-1}x^{n-1}[(n-1)(2u)^{n-2}(-x)]$$
$$+a_{n-2}x^{n-2}\left[\frac{(n-2)(n-3)}{2!}(2u)^{n-4}(-x)^2\right]+\cdots$$
$$+a_{n-k}x^{n-k}\left[\frac{(n-k)(n-k-1)\cdots(n-2k+1)}{k!}(2u)^{n-2k}(-x)^k\right]$$
$$+\cdots$$

或

$$P_n(u)=\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n-2k-1)}{2\cdot4\cdot\cdots\cdot(2n-2k)}$$
$$\times\left[\frac{(n-k)(n-k-1)\cdots(n-2k+1)2^{n-2k}(-1)^k}{k!}\right]u^{n-2k}$$

其中，$[n/2]=\frac{n}{2}$(n偶)，或者$=\frac{n-1}{2}$(n奇)。

根据阶乘的定义，我们有

$$2\cdot4\cdot\cdots\cdot(2n-2k)=2^{n-k}(n-k)!=2^{n-k}(n-2k)!(n-2k+1)\cdots(n-k),$$

把它代入 $P_n(u)$的表达式，最后得

$$P_n(u)=\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n-2k-1)}{2^kk!(n-2k)!}(-1)^ku^{n-2k}. \quad (A1.94)$$

我们看到 $P_n(u)$ 是一个 n 阶多项式，其中只出现相间的 n 次幂，所以，偶数阶的勒让德多项式是 u 的偶函数，而奇数阶的勒让德多项式是 u 的奇函数。

现在我们要推导 P_n 及其导数的递推公式。将(A1.93)式对 x 取导数，我们得

$$\frac{u-x}{(1-2ux+x^2)^{3/2}}=P_1(u)+2P_2(u)x+3P_3(u)x^2+\cdots. \quad (A1.95)$$

把（A1.95）与（A1.93）式相比较，并把各项重新排列次序后可写出：

$$(u-x)[P_0+P_1+P_2x^2+\cdots+P_nx^n+\cdots]$$
$$=(1-2ux+x^2)[P_1+2P_2x+3P_3x^2+\cdots+(n+1)P_{n+1}x^n+\cdots].$$

令方程两边 x^n 的系数相等（对于一切 x 值均成立的表达式必须满足这个条件），得

$$uP_nx^n-xP_{n-1}x^{n-1}=(n+1)P_{n+1}x^n-2uxnP_nx^{n-1}+x^2(n-1)P_{n-1}x^{n-2},$$
$$uP_n-P_{n-1}=(n+1)P_{n+1}-2unP_n+(n-1)P_{n-1},$$

或

$$(n+1)P_{n+1}-(2n+1)uP_n+nP_{n-1}=0. \quad (A1.96)$$

现将(A1.93)式对 u 取导数，得

$$\frac{x}{(1-2ux+x^2)^{3/2}}=P'_0(u)+P'_1(u)x+P'_2(u)x^2+\cdots. \tag{A1.97}$$

这次把(A1.97)与(A1.95)式相比较，并把各项重新排列次序后可写出：

$$(u-x)[P'_0+P'_1x+P'_2x^2+\cdots+P'_nx^n+\cdots]$$
$$=x[P_1+2P_2x+3p_3x^2+\cdots+(n+1)P_{n+1}x^n\cdots].$$

令上式两边 x^n 的系数相等，得

$$uP'_nx^n-xP'_{n-1}x^{n-1}=nP_nx^{n-1},$$

或

$$uP'_n-P'_{n-1}=nP_n. \tag{A1.98}$$

从方程(A1.98)和(A1.96)可导出勒让德多项式满足的微分方程。我们只推导一个对于 P_n 及其导数的方程。将(A1.96)式对 u 微商，得

$$(n+1)P'_{n+1}-(2n+1)P_n-(2n+1)uP'_n+nP'_{n-1}=0, \tag{A1.99}$$

把(A1.98) 代入(A1.99)式，得

$$(n+1)P'_{n+1}-(2n+1)P_n-(2n+1)uP'_n+nuP'_n-n^2P_n=0,$$
$$(n+1)P'_{n+1}-(n+1)uP'_n-(n+1)^2P_n=0, \tag{A1.100}$$

再将用于 P_{n+1} 的(A1.100)式写成用于 P_n 的，则有

$$P'_n-uP'_{n-1}-nP_{n-1}=0. \tag{A1.101}$$

现在把(A1.98) 代入 (A1.101) 式，得

$$P'_n+nuP_n-u^2P'_n-nP_{n-1}=0,$$
$$(1-u^2)P'_n+nuP_n-nP_{n-1}=0. \tag{A1.102}$$

把 (A1.102) 式对 u 微商，并再次将 (A1.98) 式代入，
得

$$\frac{d}{du}\left[(1-u^2)P'_n\right]+nP_n+nuP'_n+n^nP_n-nuP'_n=0,$$

$$\frac{d}{du}\left[(1-u^2)P'_n\right]+n(n+1)P_n=0, \tag{A1.103}$$

(A1.103)式就是我们所要得到的方程。它被称为勒让德微分方程，是一个二阶的齐次线性微分方程。

我们现在来推导 $P_n(u)$的、与(A1.94)式不同的另一个表达式，在某些应用上，它较简单且更有用。我们首先考察下述表达式的二次式展开：

$$(u^2-1)^n=u^{2n}+nu^{2(n-1)}(-1)+\frac{n(n-1)}{2!}u^{2(n-2)}(-1)^2$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}u^{2(n-3)}(-1)^3+\cdots$$
$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!(n-k)!}u^{2(n-k)}.$$

把这表达式对 u 微商 n 次，得

$$\frac{d^n}{du^n}(u^2-1)^n=\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!}u^{n-2k}, \tag{A1.104}$$

其中因为连续微商而去掉一些项，所以求和只要继续到$[n/2]$。考察$(2n-2k)$的阶乘，我们得

$$\begin{aligned}(2n-2k)!&=[1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-2k-1)][2\cdot4\cdot6\cdots\cdots(2n-2k)]\\&=[1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-2k-1)]2^{n-k}(n-k)!.\end{aligned}$$

把它代回到(A1.104) 式，并与(A1.94)式作比较，得

$$P_n(u)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{du^n}(u^2-1)^n. \tag{A1.105}$$

这个$P_n(u)$的表达式称为罗巨格公式。

最后，我们要说明勒让德多项式的一个非常有用的性质，即正交性。一个函数族，如果其中任意两个函数之积在一指定区间内的积分为零，并且，其中任一函数的平方在该区间内的积分不为零，则该函数族是正交的。勒让德多项式的这个性质，与从富里叶正弦级数和余弦级数得到的正交性类似。

我们可以用$P_m(u)$乘以勒让德微分方程(A1.103)，并把它从-1到1积分来证明这个性质：

$$\int_{-1}^{1}P_m(u)\frac{d}{du}\Big[(1-u^2)P_n'(u)\Big]du+n(n+1)\int_{-1}^{1}P_m(u)P_n(u)du=0.$$

对第一个表达式作分部积分，被积项在上、下限为零，于是我们得

$$-\int_{-1}^{1}(1-u^2)P_m'(u)P_n'(u)du+n(n+1)\int_{-1}^{1}P_m(u)P_n(u)du=0. \tag{A1.106}$$

如果我们在(A1.103)式中使用$P_m(u)$作因变量，并用$P_n(u)$来相乘，那末我们会得到一个与(A1.106) 式相同的表达式，只是m与n交换一下位置而已。从 (A1.06) 式中减去这 个式子，即得

$$n[(n+1)-m(m+1)]\int_{-1}^{1}P_m(u)P_n(u)du=0.$$

由此我们直接得出正交性的第一个性质：

$$\int_{-1}^{1}P_m(u)P_n(u)du=0 \qquad (m\neq n). \tag{A1.107}$$

利用洛德利格斯公式，我们可以得到正交性的第二个性质：

$$\int_{-1}^{1}P_n^2(u)du=\frac{2}{2n+1}. \tag{A1.108}$$

现在我们来确定一个给定函数展成勒让德多项式时的系数。如果我们有这样一个级数：

$$\begin{aligned}V(u)&=C_0P_0(u)+C_1P_1(u)+C_2P_2(u)+\cdots\\&=\sum_{n=0}^{\infty}C_nP_n(u),\end{aligned} \tag{A1.109}$$

以$P_m(u)$与它相乘，并从-1到1积分，再利用 (A1.107) 和 (A1.108)式，则得

$$\int_{-1}^{1}V(u)P_m(u)du=C_m\int_{-1}^{1}P_m^2(u)du=C_m\frac{2}{2m+1},$$

或

$$C_m=\frac{2m+1}{2}\int_{-1}^{1}V(u)P_m(u)du. \tag{A1.110}$$

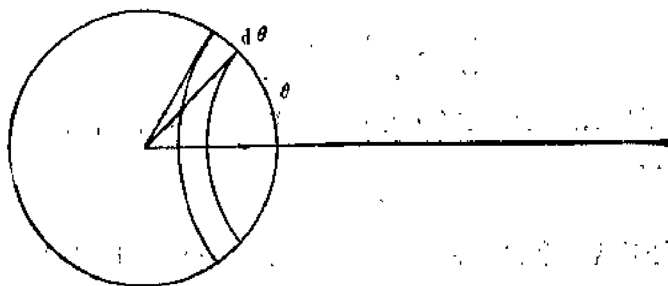
对于某些在球面上含有边界条件的问题，用立体角元$d\omega$来表示 (A1.110) 式更方便一些。

我们从图A1.13看出：

$$d\omega=2\pi\sin\theta d\theta=-2\pi du,$$

所以，（A1.110）式在更换积分限后变为

$$C_m=\frac{2m+1}{4\pi}\int_0^\pi V(u)P_m(u)d\omega. \tag{A1.111}$$



图A1.13

A1.7 拉普拉斯方程

令一个标量的拉普拉斯算子(A1.34)为零，就得到拉普拉斯方程，即

$$\nabla\cdot\nabla\phi=0. \tag{A1.112}$$

拉普拉斯方程在物理海洋学、大气热力学、地震学、地磁学和重力等问题中具有重要意义。它是理论地球物理学中最常出现的偏微分方程。所以，在此讨论一下它的某些解对我们是有益的。

在处理偏微分方程的解时，我们会遇到满足给定方程的不同函数。我们只考虑那些对于我们所要讨论的问题有用的解，即满足这些问题的充分必要的边条件和初条件的唯一解。为了得到这些解，我们将利用大家熟悉的分离变量的解法。

首先，我们考虑拉普拉斯方程解的两个非常明显的特征。第一，若 ϕ_1、$\phi_1\cdots$、ϕ_n 是拉普拉斯方程的不同的解，则

$$\phi=A_1\phi_1+A_2\phi_2+\cdots+A_n\phi_n$$

也是一个解，其中 A_1、$A_2\cdots A_n$ 是任意常数。

这是因为

$$\nabla\cdot\nabla\phi=A_1\nabla\cdot\nabla\phi_1+A_2\nabla\cdot\nabla\phi_2+\cdots+A_n\nabla\cdot\nabla\phi_n=0,$$

其中每项含有一个为零的因子，故其和为零。其次，若ϕ是拉普拉斯方程的一个解，则 ϕ 对坐标 x、y、z 的任意阶偏导数也是一个解。用对 x、y、z 的偏导数来写$\nabla\cdot\nabla$，则拉普拉斯方程的形式为

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0,$$

对 x 微分得

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)=0.$$

因此，若 ϕ 是拉普拉斯方程的一个解，则$\partial\phi/\partial x$也是该方程的解。同样可以证明

$$\frac{\partial \phi}{\partial y},\ \frac{\partial \phi}{\partial z},\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2},\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y},\cdots$$

和矢量 $\nabla\phi$ 也都是该方程的解。

现在我们来考察直角坐标系中的二维拉普拉斯方程：

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}=0. \qquad (A1.113)$$

为了利用分离变量法，我们假定（由于它的成功，可以看出该假定是合理的），ϕ 的一个特解可以写成如下形式：

$$\phi=X(x)Y(y), \qquad (A1.114)$$

其中 X 和 Y 分别是只含一个独立变量 x 或 y 的函数。把（A1.114）代入(A1.113) 式，得

$$X''Y+XY''=0,$$

或

$$\frac{X''}{X}+\frac{Y''}{Y}=0. \qquad (A1.115)$$

如果方程（A1.115）有解的话，那末它左端的每一项必须分别等于一个常数；x 的变化不会改变第二项的值，而 y 的变化不会改变第一项的值. 因此，我们可以得出结论：

$$\frac{X''}{X}=k^2,\ \frac{Y''}{Y}=-k^2, \qquad (A1.116)$$

其中常值参数 k^2 可以为任意实数、虚数或复数。方程(A1.116) 是两个常微分方程，它们的解就是

$$X=a_1e^{\pm kx},\quad Y=a_2e^{\pm iky}, \qquad (A1.117)$$

把它们代回（A1.116）式可以验证。于是，形式为（A1.114）的解用参数 k 来表示即为

$$\phi_k=C_ke^{\pm k(x+iy)}, \qquad (A1.118)$$

或者，由于 k 是不确定的任意常数，所以更普遍的解为

$$\phi=\sum_k C_ke^{\pm k(x+iy)}. \qquad (A1.119)$$

现在我们来考察球坐标系中的拉普拉斯方程。根据(A1.83)式有

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}=0. \qquad (A1.120)$$

如果我们用 u 来代替$\cos\theta$，则有

$$\frac{\partial}{\partial \theta}=\frac{\partial}{\partial u}\frac{du}{d\theta}=-\sin\theta\frac{\partial}{\partial u},$$

所以(A1.120)式变为

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial u}\left[(1-u^2)\frac{\partial \phi}{\partial u}\right]+\frac{1}{1-u^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}=0. \qquad (A1.121)$$

我们在此只对作为 r 和 θ 的函数的解感兴趣，而不考虑作为 φ 的函数的解。于是

(A1.121) 式中最后一项为零，我们得

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial u}\left[(1-u^2)\frac{\partial\phi}{\partial u}\right]=0. \tag{A1.122}$$

我们再利用分离变量法，并假定解的形式为

$$\phi=R(r)U(u). \tag{A1.123}$$

把它代入 (A1.122) 式，得

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2R'U)+\frac{\partial}{\partial u}\left[(1-u^2)RU'\right]=0,$$

或

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}(r^2R')+\frac{1}{U}\frac{\partial}{\partial u}\left[(1-u^2)U'\right]=0. \tag{A1.124}$$

我们看到它与 (A1.115) 式具有相同的形式，只不过这里是变量 r 与 u 的分离。为方便起见，在这种情况下，我们将选常值参数为 $n(n+1)$。于是得到两个与(A1.116)式对应的常微分方程：

$$\frac{d}{dr}(r^2R')-n(n+1)R=0, \tag{A1.125}$$

和

$$\frac{d}{du}\left[(1-u^2)U'\right]+n(n+1)U=0. \tag{A1.126}$$

考察方程，(A1.125)，我们有

$$r^2R''+2rR'-n(n+1)R=0.$$

这是一个我们所熟悉的常微分方程，它的解具有 $R=r^\alpha$ 的形式。把该解代入上式，我们得到用于 α 的条件方程：

$$\alpha(\alpha-1)+2\alpha-n(n+1)=0,$$

或

$$(\alpha-n)\ (\alpha+n+1)=0,$$

它的解为

$$\alpha=n,\quad -(n+1).$$

因此有

$$R=a_1r^n+a_2r^{-(n+1)}. \tag{A1.127}$$

回到方程，(A1.126)，我们注意到它就是勒让德微分方程(A1.103)，其解为勒让德多项式 P_n。于是，对于形如(A1.119)的最终解，我们可以写出：

$$\phi=\sum_n\left[a_nr^n+b_nr^{-(n+1)}\right]P_n(\cos\theta). \tag{A1.128}$$

现在我们来考察柱坐标系中的拉普拉斯方程。根据 (A1.88) 式有

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0. \tag{A1.129}$$

我们在此只对作为 ρ 和 z 的函数的解感兴趣，而不考虑作为 φ 的函数的解。所以方程(A1.129)中第二项为零，于是有

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\rho}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0. \tag{A1.130}$$

再利用分离变量法，并假定解的形式为

$$\phi=M(\rho)Z(z). \tag{A1.131}$$

把它代入(A1.130)式，我们得

$$M''Z+\frac{1}{\rho}M'Z+MZ''=0,$$

或

$$\frac{M''}{M}+\frac{1}{\rho}\frac{M'}{M}+\frac{Z''}{Z}=0 \tag{A1.132}$$

我们看到(A1.132) 式有适当的变量分离，我们将选常值参数为 k^2。象前面一样，得

$$M''+\frac{1}{\rho}M'+k^2M=0,$$

或

$$\rho^2M''+\rho M'+\rho^2k^2M=0, \tag{A1.133}$$

和

$$Z''-k^2Z=0. \tag{A1.134}$$

考察(A1.134) 式，我们看到，它与 (A1.116)的第一个方程相同，其解为

$$Z=a_1e^{\pm kz}. \tag{A1.135}$$

在方程(A1.133)中，如果我们把变量变换成 x，即令 $x=k\rho$，则有

$$\frac{\partial}{\partial\rho}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{dx}{d\rho}=k\frac{\partial}{\partial x},$$

所以方程(A1.133)变为

$$x^2\frac{d^2M}{dx^2}+x\frac{dM}{dx}+x^2M=0, \tag{A1.136}$$

它是贝塞尔微分方程的简化形式。我们将寻找方程(A1.136)的收敛级数形式的解.我们假定

$$M=\sum_{\lambda=0}^{\infty}a_\lambda x^\lambda=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_\lambda x^\lambda+\cdots. \tag{A1.137}$$

把它代入(A1.136)式，得

$$\sum_\lambda a_\lambda\lambda(\lambda-1)x^\lambda+\sum_\lambda a_\lambda\lambda x^\lambda+\sum_\lambda a_\lambda x^{\lambda+2}=0.$$

这个方程必须满足 x 的任意值，并且仅当 x 的各次幂的系数恒为零时才成立。令 x^λ 的系数为零，得

$$a_\lambda\lambda(\lambda-1)+a_\lambda\lambda+a_{\lambda-2}=0,$$

或把λ增加到 $\lambda+2$，有

$$a_{\lambda+2}(\lambda+2)(\lambda+1)+a_{\lambda+2}(\lambda+2)+a_\lambda=0,$$

$$a_{\lambda+2}(\lambda+2)^2=-a_\lambda,$$

$$a_{\lambda+2}=\frac{-1}{(\lambda+2)^2}a_\lambda. \tag{A1.138}$$

这给出用 a_λ 来表示 $a_{\lambda+2}$ 的递推关系。因此，如果系数 a_0 和 a_1 给定，则所有其他的 a_λ 可由(A1.138) 式来确定。我们对 a_0 取为常数（为方便起见取为1）、而 a_1 等于零时得出的解特别感兴趣。对于 x 的所有值，它给出一个收敛级数，并且是(A1.136)式两个特解之一。因

此，方程(A1.137)变为

$$M=1-\frac{1}{2^2}x^2+\frac{1}{2^2\cdot 4^2}x^4-\frac{1}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}x^6+\cdots$$

$$+\frac{(-1)^m}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot\cdots\cdot m^2}x^{2m}+\cdots.$$

这就是零阶贝塞尔函数 $J_0(x)$，利用阶乘的定义，它变为求和形式：

$$M=J_0(x)=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{(-1)^\lambda}{\lambda!\lambda!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda}. \tag{A1.139}$$

函数 $J_0(x)$ 象正弦函数和余弦函数那样，穿过 x 轴来回振荡，但它的振荡是逐渐减小的。对于形如(A1.119)式的最终解，我们可写出：

$$\phi=\sum_{\lambda}C_kJ_0(k\rho)e^{\pm kz}. \tag{A1.140}$$

我们考虑以上所得的任意一个特解，在表示无奇点区域问题的完整解时所要求的条件。我们将说明，如果在拉普拉斯方程成立的区域之边界面的所有点上 ϕ 值均给定，则满足指定边条件的方程的解是唯一的。设 ϕ_1 是满足该边条件的拉普拉斯方程的解。假定存在另一个满足同样边条件的完全不同的解 ϕ_2。我们将证明 ϕ_2 一定与 ϕ_1 等同。令 $\Psi=\phi_1-\phi_2$；由于 ϕ_1 和 ϕ_2 在所考虑区域内分别满足拉普拉斯方程，所以 Ψ 也满足该方程。把表达式 $\nabla\cdot(\Psi\nabla\Psi$ 展开，得

$$\nabla\cdot(\Psi\nabla\Psi)=\nabla\Psi\cdot\nabla\Psi+\Psi\nabla\cdot\nabla\Psi,$$

或

$$\nabla\Psi\cdot\nabla\Psi=\nabla\cdot(\Psi\nabla\Psi)-\Psi\nabla\cdot\nabla\Psi.$$

把这个表达式在拉普拉斯方程成立的区域 τ 上积分，得

$$\int_\tau(\nabla\Psi)^2d\tau=\int_\tau\nabla\cdot(\Psi\nabla\Psi)d\tau-\int_\tau\Psi\nabla\cdot\nabla\Psi d\tau.$$

因为 Ψ 满足拉普拉斯方程，所以右端最后一项的被积函数在整个区域 τ 内为零。右端第一项可以利用高斯定理而变为面积分。因此，有

$$\int_\tau(\nabla\Psi)^2d\tau=\int_\tau(\Psi\nabla\Psi)\cdot d\sigma.$$

但是，由于在包围体积 τ 的面 σ 上，ϕ_1 处处等于 ϕ_2，所以该方程右端为零。又由于体积分的被积函数是平方和，所以被积函数本身必定为零，即

$$(\nabla\Psi)^2=\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)^2=0.$$

因为该方程对所有的 x、y、z 都为零，所以它的每一项必定为零，即

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x}=0,\quad\frac{\partial\Psi}{\partial y}=0,\quad\frac{\partial\Psi}{\partial z}=0.$$

因此 Ψ 是一个常数。但因 Ψ 在边界上为零，故该常数就是零本身。所以得

$$\phi_1=\phi_2.$$

因而拉普拉斯方程的两个解是相同的。

假设在解某一个物理问题时我们发现，某个坐标函数 ϕ 必须在区域 τ 内满足拉普拉斯方程，而在包围该区域的面上具有一些指定值。于是，只要我们找到一个满足给定边条件的拉普拉斯方程的解，那末我们知道这就是问题的正确解。我们不必再考虑拉普拉斯方程还可能

存在一些满足给定边条件、同时也满足我们已忽略掉的进一步的必要条件（而这些必要条件却不被第一个解满足）的其他解。因为可以满足给定边条件的拉普拉斯方程的解只有一个，用数学语言来表达，拉普拉斯方程和给定的边条件对于确定函数 ϕ 来说是充分的。

A1.8 富里叶级数

有时用一个三角函数的级数来表示某个确定的函数$f(x)$是很有益的，这与用勒让德函数来展开的幂级数展式大不相同。这样一个三角函数的级数叫做富里叶级数，它的一般式可写为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+a_2\cos 2x+\cdots+a_n\cos nx+\cdots$$
$$+b_1\sin x+b_2\sin 2x+\cdots+b_n\sin nx+\cdots. \tag{A1.141}$$

为了以后估计 a_n 时方便起见，常数项写成 $a_0/2$，而不是 a_0。我们立即可看出，由于 $\cos x$ 和 $\sin x$、以及随后的 $\cos 2x$、$\sin 2x$、…、$\cos nx$、$\sin nx$、…具有以 2π 为周期的周期性，所以函数 $f(x)$也必为一个以 2π 为周期的周期函数；在物理意义上，这意味着我们可以只在 2π 区间上定义$f(x)$。以后我们将看到，这个似乎很严格的限制可以完全去掉，所以富里叶级数在气象学和海洋学上是非常有用的。富里叶级数解及其合理的延拓在处理波传播问题时是经常用到的。

富里叶级数的三角函数象勒让德多项式一样，在 2π 区间上表现出同样有用的正交性质。为方便起见，我们取从 $-\pi$ 到 π 的 2π 区间。根据三角恒等式：

$$\sin mx\cos nx=\frac{1}{2}[\sin(m-n)x+\sin(m+n)x],$$

$$\sin mx\sin nx=\frac{1}{2}[\cos(m-n)x-\cos(m+n)x],$$

$$\cos mx\cos nx=\frac{1}{2}[\cos(m-n)x+\cos(m+n)x],$$

我们立即可看出

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx dx$$
$$=\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx dx=0, \tag{A1.142}$$

其中后两个积分中 $m\neq n$，还可看出

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx dx&=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 2nx)dx=\pi,\\ \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx dx&=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2nx)dx=\pi.\end{aligned} \tag{A1.143}$$

根据这些正交关系，我们可以确定(A1.141)式中的系数a_n和b_n。以下我们用与确定勒让德多项式级数中系数时所用的类似方式来确定 a_n 和 b_n。用 $\cos mx$ 乘以(A1.141)式，并从 $-\pi$ 到 π 积分，利用(A1.142)和(A1.143)式得

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx dx = a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx dx = a_m \pi,$$

或

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx dx, \qquad (A1.144)$$

其中包括 $m=0$。类似地，我们得

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx dx. \qquad (A1.145)$$

我们先来考察偶函数和奇函数的性质。根据定义，若 $f(-x)=f(x)$，则函数 $f(x)$ 就叫做偶函数。于是我们看到，由于 $\cos(-nx)=\cos(nx)$，所以 $\cos(nx)$ 是一个偶函数。还是根据定义，若 $f(-x)=-f(x)$，则函数 $f(x)$ 就叫做奇函数。于是我们看到，由于 $\sin(-nx)=-\sin(nx)$，所以 $\sin(nx)$ 是一个奇函数。如果(A1.141)式中的 $f(x)$ 恰好是一个偶函数，那末三角展开式的系数为

$$a_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos mx dx,$$
$$b_m = 0, \qquad (A1.146)$$

其中 $b_m=0$ 是由于(A1.145)式中从 $-\pi$ 到 0 的贡献正好被从 0 到 π 的贡献抵消。对于一个偶函数，$f(x)$，它的富里叶级数展式只用余弦函数表示。类似地，如果(A1.141)中的 $f(x)$ 是一个奇函数，那末三角展开式的系数为

$$a_m = 0,$$
$$b_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin mx dx. \qquad (A1.147)$$

对于一个奇函数 $f(x)$，它的富里叶展式只用正弦函数表示。

在地球物理问题中，我们通常感兴趣于在 x 正值上定义或得到 $f(x)$ 的值，因此我们可以只在 0 到 π 的区间上定义 $f(x)$，即只考虑前面所考虑的区间的一半。我们可以定义 $f(x)$ 在 $-\pi$ 到 0 的区间上的值使 $f(x)$ 是一个偶函数，在这种情况下，$f(x)$ 将只由余弦级数给出，其系数由(A1.146)式来确定。另一种方法是，我们可以定义 $f(x)$ 在 $-\pi$ 到 0 的区间上的值使 $f(x)$ 是一个奇函数，在这种情况下，$f(x)$ 将只由正弦级数给出，其系数由(A1.147)式来确定。

一般说来，我们不想把问题限于 $-\pi$ 到 π 或 0 到 π 的区间。因此有必要建立一些方法和公式，使我们能把一个函数在任意区间 $-l$ 到 l 或 0 到 l 上展开。考虑 $F(z)$ 有(A1.141)形式的富里叶级数展开式：

$$F(z) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos z + a_2\cos 2z + \cdots + a_n\cos nz + \cdots$$
$$+ b_1\sin z + b_2\sin 2z + \cdots + b_n\sin nz + \cdots. \qquad (A1.148)$$

我们对(A1.148)式中的 z 作变量替换：

$$z = \frac{\pi x}{l}, \qquad (A1.149)$$

由此我们定义 $f(x)$ 为

$$F(z)=F\left(\frac{\pi x}{l}\right)=f(x). \tag{A1.150}$$

把(A1.149)和(A1.150)代入(A1.148)式，得

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos\frac{\pi x}{l}+a_2\cos\frac{2\pi x}{l}+\cdots+a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+\cdots$$

$$+b_1\sin\frac{\pi x}{l}+b_2\sin\frac{2\pi x}{l}+\cdots+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}+\cdots. \tag{A1.151}$$

利用(A1.144)和(A1.145)式来计算（A1.148）和（A1.151）式中的系数，于是得

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(z)\cos mzdz$$

$$=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}dx \tag{A1.152}$$

和

$$b_m=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{m\pi x}{l}dx. \tag{A1.153}$$

对于富里叶余弦级数的系数，我们得

$$a_m=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}dx, \tag{A1.154}$$

对于富里叶正弦级数的系数，我们得

$$b_m=\frac{2}{l}\int_0^l f(z)\sin\frac{m\pi x}{l}dx. \tag{A1.155}$$

在某些情况下，把富里叶级数展开式用复数形式表示较为方便。如果把余弦函数和正弦函数用它们的指数形式来写的话，那末对于(A1.151）式，有

$$f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}c_m e^{i(m\pi x/l)}, \tag{A1.156}$$

其中系数 c_m 为复数，它由下式给出，

$$c_m=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(\xi)e^{-i(m\pi\xi/l)}d\xi, \tag{A1.157}$$

为方便起见，其中已用了变量 ξ 作为确定系数 c_m 时所用的积分变量，以区别于最终表达式中的变量 x.

A1.9 富里叶积分

在前几小节中，我们已看到如何能把一个定义在 $-\pi$ 到 π 区间上的函数 $f(x)$ 用富里叶级数来表示，并且我们已把它推广到 $-l$ 到 l 的任意区间。在本节中我们把这个分析推广到定义在 $-\infty$ 到 ∞ 的整个实数轴上的函数是有意义的。

根据（A1.151)、(A1.152）和(A1.153)式，我们可写出定义在 $-l$ 到 l 区间上的函数 $f(x)$，

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(\xi)d\xi+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos\frac{n\pi x}{l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\cos\frac{n\pi\xi}{l}d\xi\right.$$

$$+\sin\frac{n\pi x}{l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi\Bigg],\tag{A1.158}$$

为方便起见，其中已用 ξ 作为确定系数 a_n 和 b_n 时的积分变量，以区别于最终表达式中的变量x。根据三角恒等式

$$\cos\frac{n\pi\xi}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}+\sin\frac{n\pi\xi}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}=\cos\frac{n\pi}{l}(\xi-x),$$

我们可把(A1.158)式写为

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(\xi)d\xi+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}f(\xi)\cos\frac{n\pi}{l}(\xi-x)d\xi.\tag{A1.159}$$

如果 l 取得足够大，那末我们可以忽略(A1.159)式中的第一项，只要当 $l\to\infty$ 时该项的积分收敛。于是我们只剩下第二项，它可表示为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}f(\xi)\cos\frac{n\pi}{l}(\xi-x)d\xi\\&=\frac{1}{\pi}\Bigg[\delta k\int_{-l}^{l}f(\xi)\cos\delta k(\xi-x)d\xi\\&+\delta k\int_{-l}^{l}f(\xi)\cos 2\delta k(\xi-x)d\xi+\cdots\Bigg]\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l}f(\xi)d\xi\left\{\Big[\cos\delta k(\xi-x)+\cos 2\delta k(\xi-x)+\cdots\Big]\delta k\right\},\end{aligned}\tag{A1.160}$$

其中被积函数中的 l 已替换成

$$\delta k=\frac{\pi}{l}.$$

(A1.160)式中大括号内的表达式就是下述定积分的一个级数近似：

$$\int_{0}^{\infty}\cos k(\xi-x)dk=\lim_{\delta k\to 0}\left\{\Big[\cos\delta k(\xi-x)+\cos 2\delta k(\xi-x)+\cdots\Big]\delta k\right\}.$$

假定当 $l\to\infty$ 时，上式的和有极限，于是我们现在可写出定义在 $-\infty$ 到 ∞ 区间上的 $f(x)$，

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)d\xi\int_{0}^{\infty}\cos k(\xi-x)dk\\&=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}dk\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cos k(\xi-x)d\xi.\end{aligned}\tag{A1.161}$$

方程(A1.161)称为富里叶积分定理。$f(x)$对于该积分存在的条件(我们将只叙述而不证明)是积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx$$

存在。

用与以上相同的方法，或直接根据(A1.161)式，我们可得到富里叶余弦积分，其中 $f(x)$被定义在 0 到∞的区间上，且$f(-x)=f(x)$：

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}dk\int_0^{\infty}f(\xi)\cos k\xi\cos kx d\xi. \qquad (A1.162)$$

类似地，对于富里叶正弦积分，其中$f(x)$被定义在0到∞的区间上，且$f(-x)=-f(x)$，有：

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}dk\int_0^{\infty}f(\xi)\sin k\xi\sin kx d\xi. \qquad (A1.163)$$

方程(A1.162)和(A1.163)式可以用对称形式来写，对于富里叶余弦积分有

$$\begin{aligned} f(x)&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}g(k)\cos kx dk, \\ g(k)&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(\xi)\cos k\xi d\xi, \end{aligned} \qquad (A1.164)$$

而对于富里叶正弦积分有

$$\begin{aligned} f(x)&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}h(k)\sin kx dk, \\ h(k)&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(\xi)\sin k\xi d\xi. \end{aligned} \qquad (A1.165)$$

表达式(A1.164)和(A1.165)式就是富里叶余弦变换和正弦变换。

如果我们用复数形式来表示本节对富里叶级数展式所作的分析，那末我们就得到复数形式的富里叶积分定理：

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{ik(x-\xi)}d\xi, \qquad (A1.166)$$

和富里叶变换：

$$\begin{aligned} f(x)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(k)e^{ikx}dk, \\ g(k)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{-ik\xi}d\xi. \end{aligned} \qquad (A1.167)$$

富里叶变换(A1.164)、(A1.165)或更普遍的形式(A1.167)，在描述波传播问题中的源函数时是很有用的。我们通常希望考虑一个源函数$f(t)$，它一般用简谐分量而作为压力、速度、或位移对于时间的函数给出。用简谐分量是因为对于时间有一个以余弦或正弦表达式表示的振荡。我们考虑这样一个分量，其较普遍的形式为

$$y=a\cos(\omega t-\delta). \qquad (A1.168)$$

它的图形由图A1.14给出。它在最大值a和$-a$之间穿过t轴来回振荡，最大位移a称为运动的振幅。运动的周期P是完成一个全振荡所需的时间。由(A1.168)式直接得

$$[\omega(t+P)-\delta]-[\omega t-\delta]=2\pi,$$

或

$$P=\frac{2\pi}{\omega}. \qquad (A1.169)$$

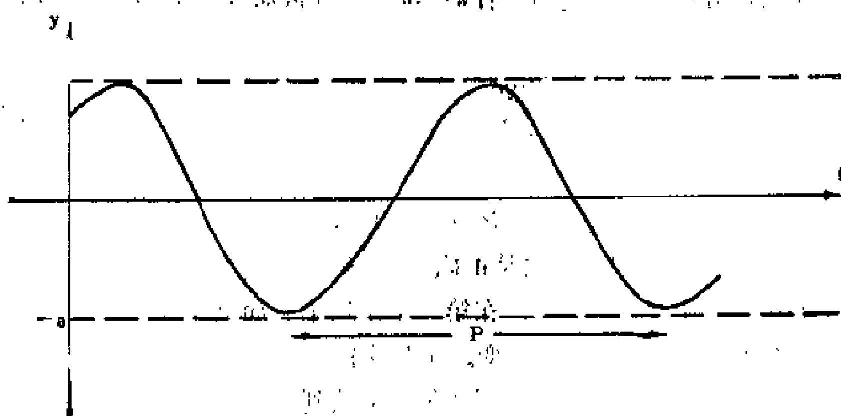
频率ν定义为单位时间内振荡的次数。因此，它就是周期的倒数：

$$\nu=\frac{1}{P}=\frac{\omega}{2\pi},$$

或

$$\omega=2\pi\nu.$$

ω 被称为圆频率或角频率，而 δ 是初始位相。简谐运动概念的用处之一在于，这种函数通常是物理问题的偏微分方程的解。



图A1.14

我们现在想把简谐运动分量推广到任意的源函数。这可以借助富里叶变换来进行。例如，我们考虑一个源函数 $f(t)$，它是 t 的一个偶函数。在(A1.164)式中用时间 t 替换变量 x，用 τ 替换积分变量 ξ，用角频率 ω 替换变量 k，并用函数 $s(\omega)$ 替换函数 $(2/\pi)^{1/2}g(\omega)$。于是我们得到所希望的结果：

$$f(t)=\int_0^\infty s(\omega)\cos\omega t d\omega,$$

$$s(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(\tau)\cos\omega\tau d\tau. \tag{A1.171}$$

源函数 $f(t)$ 由对所有的简谐分量之频率 ω 求和给出，每个分量的振幅为 $s(\omega)$。分量的振幅由(A1.171)的第二个式子来确定。$s(\omega)$ 被称为频谱，当各分量被此相加时，它给出所需要的脉冲 $f(t)$。

用复数形式表示，从(A1.167)式得出同样的方程：

$$f(t)=\int_{-\infty}^\infty s(\omega)e^{i\omega t}d\omega,$$

$$s(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau. \tag{A1.172}$$

(A1.172)中第一个积分的被积函数通常是一个偶函数，因此排除了考虑负频率的必要性。于是谱函数为 $2s(\omega)$。在这种情况下，$s(\omega)$ 一般是用复数同时表示简谐分量的振幅和位相。

A1.10 波动方程

在地球物理问题中另一个重要的偏微分方程是波动方程。它是设函数 Ψ 对 t 的二阶偏

导数等于Ψ的拉普拉斯乘上一个系数而得到的，即

$$C^2\nabla^2\Psi=\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}. \tag{A1.173}$$

为方便起见，用C^2来标记比例系数，因为我们很快就会发现，C就是Ψ的传播速度。系数C一般是一个或几个空间坐标的函数。对于本节的讨论，我们只考虑C为常数的情况。

在此我们简单讨论该方程的一类通解的性质，对于一维运动，$\Psi=\Psi(x,t)$，因而(A1.173)式变为

$$C^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}. \tag{A1.174}$$

该方程的通解是

$$\Psi=f(x-Ct)+F(x+Ct). \tag{A1.175}$$

把这代回到(A1.174)式中，可以证实它是正确的，(A1.175)式中的f和F是任意函数。我们考察一下这些函数具有什么样的意义。在第一个函数中，如果时间t增加了一个量δt，则当x增加一个量$C\delta t$时，f的值将保持不变。于是我们可看到，在t时刻、x位置上出现的函数f的某确定值，将在$t+\delta t$时刻、$x+C\delta t$位置上找到，并且，以相应的方式对于所有其他的x值也成立。函数f代表在x正方向以速度C传播的扰动。同样，函数F在$t+\delta t$时刻、$x-C\delta t$位置上保持不变；它代表在x负方向以速度C传播的扰动。这些关系在图A1.15中说明。



图A1.15

其次，我们考虑一个在三维空间传播、并对称于中心O的扰动。于是有$\Psi=\Psi(r,t)$，而且球坐标系中的拉普拉斯(A1.83)和方程(A1.173)
将化为

$$\frac{C^2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)=\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2},$$

$$C^2\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)=\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2},$$

$$C^2\frac{\partial^2(r\Psi)}{\partial r^2}=\frac{\partial^2(r\Psi)}{\partial t^2}, \tag{A1.176}$$

它具有与(A1.174)相同的形式，给出Ψ为

$$\Psi=\frac{1}{r}f(r-Ct)+\frac{1}{r}F(r+Ct). \tag{A1.177}$$

函数$f(r-Ct)$代表从O点辐散的球面波，而函数$F(r+Ct)$代表向O点辐合的球面波。$f(r-Ct)$的振幅呈r^{-1}的形式减小。振幅因子将根据物理考虑来给出；因为当球面波向外传

播时，波阵面（球面）的面积呈 r^2 的形式增加。所以，单位面积的能流量将呈 r^{-2} 的形式减小。以后将证明，单位面积的能流量与 Ψ^2 成正比。

在此考察使用分离变量法而得出的波动方程解的类型是有意义的。为简单起见，我们将考察一维波动方程(A1.174)得出的解的类型。利用 A1.7 节中的例子，我们将假设解的形式为

$$\Psi = X(x)T(t). \tag{A1.178}$$

把(A1.178)代入(A1.174)式，得

$$C^2X''T = XT'',$$

$$C^2\frac{X''}{X} - \frac{T''}{T} = 0. \tag{A1.179}$$

变量分离过程同前面的一样。为方便起见，指定第一项的常数为 $-\omega^2$，而对于第二项则必须为 ω^2。于是方程(A1.179)给出下述两个方程：

$$T'' + \omega^2 T = 0, \tag{A1.180}$$

和

$$X'' + \frac{\omega^2}{C^2}X = 0,$$

$$X'' + k^2 X = 0, \tag{A1.181}$$

其中我们已在第二个方程中作了替换

$$k = \frac{\omega}{C}. \tag{A1.182}$$

这两个常微分方程的解用复数形式表示就是

$$T = a_1 e^{i\omega t} + a_2 e^{-i\omega t}, \tag{A1.183}$$

和

$$X = b_1 e^{ikx} + b_2 e^{-ikx}. \tag{A1.184}$$

我们来考察该解的四个实值分量之一。为方便起见，我们根据(A1.183)和(A1.184)式，取

$$\Psi = XT = a\cos(kx - \omega t). \tag{A1.185}$$

这是简谐运动的一个表达式。如果我们是在特定的时刻考察运动，那末它就代表一个穿过 x 轴的来回振荡。两个相继重复的点之间的距离，例如图 A1.16 中给出的两个槽之间的距离，定义为波长。根据(A1.185)式，波长 λ 即为

$$kx = k\lambda = 2\pi,$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}. \tag{A1.186}$$

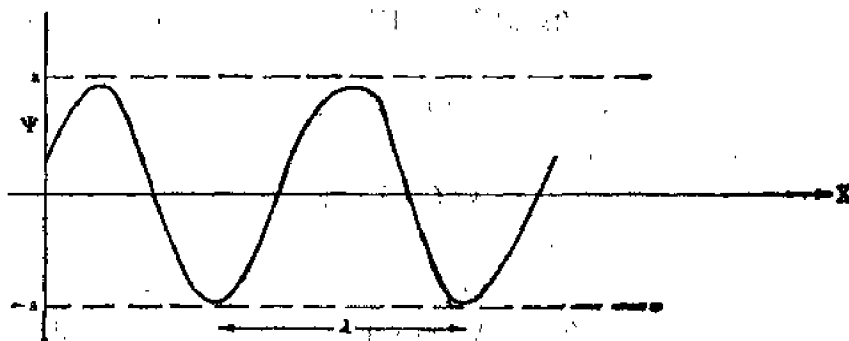
k 称为波数。同样，如果我们固定在空间某特定点，来观察作为时间的函数之运动，那末就有如图A1.14所示的一系列振荡。我们由(A1.185)式得出关于周期 P 和频率 ν 的与前面相同的关系式，即

$$P = \frac{2\pi}{\omega}, \tag{A1.187}$$

和

$$\nu=\frac{\omega}{2\pi}. \tag{A1.188}$$

我们看到，常数ω仍是角频率．根据(A1.182)、(A1.186)和(A1.188)式，我们得到



图A1.16

类似的关系式：

$$C=\frac{\omega}{k}=\nu\lambda, \tag{A1.189}$$

它说明简谐运动的传播速度等于频率与波长之积．这在物理上是可以理解的．如果我们在空间某固定点观测在单位时间内通过的波动数目（频率），那末，波动的传播速度就是频率与一个波动的长度之积，即（A1.189）式所表示的．如果我们考察(A1.183)和(A1.184)式中的其他三项，那末，对于在x正负方向传播的运动，我们都会得到同样的结果．

我们先来考察简谐运动中的能量分布情况．正如我们将在以后几节中所看到的，我们把波动和质点运动两种类型的能量合并在一起．一种是与运动有关的能量，即动能；另一种是与应力状态有关的能量，即位能．位能是质点达传定应力状态时所需作功的负值．如果我们暂时假设(A1.185)式中的Ψ是一个位移形式，并把(A1.174)式改写为

$$\mu\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}=\rho\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}, \tag{A1.190}$$

其中ρ是密度，μ定义为

$$\mu=C^2\rho, \tag{A1.191}$$

那末我们就可看到，(A1.190)式右端是单位体积的质量（即密度）与加速度的乘积．因此，根据牛顿第二定律，左端必定是单位体积的力．于是，我们可以把单位体积的动能T写成

$$T=\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)^2=\frac{1}{2}\rho\omega^2a^2\sin^2(kx-\omega t), \tag{A1.192}$$

而单位体积的位能V可写成

$$\begin{aligned}V&=-\mu\int_0^{\Psi}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}d\Psi=\mu\int_0^{\Psi}k^2a\cos(kx-\omega t)d\Psi\\&=\mu k^2\int_0^{\Psi}\Psi d\Psi=\frac{1}{2}\mu k^2\Psi^2\\&=\frac{1}{2}\mu k^2a^2\cos^2(kx-\omega t).\end{aligned} \tag{A1.193}$$

由于简谐运动在每个循环上是重复的，所以我们可借助在一个周期上的积分，并利用(A1.187)、(A1.189)和(A1.191)式，求出单位体积的平均动能$\bar{T}$和平均位能$\bar{V}$，即

$$\bar{T}=\frac{1}{2}\rho\omega^2a^2\left[\frac{1}{P}\int_0^P\sin^2(kx-\omega t)\,dt\right]$$

$$=\frac{1}{2}\rho\omega^2a^2\left\{\frac{-1}{2\pi}\left[\frac{1}{2}(kx-\omega t)-\frac{1}{4}\sin 2(kx-\omega t)\right]\right\}_0^{2\pi/\omega}$$

$$=\frac{1}{4}\rho\omega^2a^2. \tag{A1.194}$$

和

$$\bar{V}=\frac{1}{2}\mu k^2a^2\left[\frac{1}{P}\int_0^P\cos^2(kx-\omega t)dt\right]$$

$$=\frac{1}{2}\mu k^2a^2\left\{\frac{-1}{2\pi}\left[\frac{1}{2}(kx-\omega t)+\frac{1}{4}\sin 2(kx-\omega t)\right]\right\}_0^{2\pi/\omega}$$

$$=\frac{1}{4}\mu k^2a^2=\frac{1}{4}\rho\omega^2a^2. \tag{A1.195}$$

对于简谐运动，平均动能和平均位能是相等的。总能量是动能与位能之和。于是我们得到单位体积的平均总能量$\bar{U}$：

$$\bar{U}=\bar{T}+\bar{V}=\frac{1}{2}\rho\omega^2a^2. \tag{A1.196}$$

我们看到，不论是由Ψ给出位移，还是由Ψ的一些空间和时间导数给出位移，平均动能和平均位能之间的这个关系式总是成立的。

在直角坐标系中把分离变量解推广到二维和三维情况是很容易的。对于二维波动方程，我们得

$$\Psi=ae^{\pm ik_xx}e^{\pm ik_yy}e^{\pm i\omega t}, \tag{A1.197}$$

其中

$$k^2=k_x^2+k_y^2. \tag{A1.198}$$

按照与前面同样的推理，当k_x和k_y为实数时，(A1.197)式代表在$\mathbf{r}=\mathbf{i}x+\mathbf{j}y$方向上传播的简谐运动，它在$x$、$y$方向的波数分量为$k_x$和$k_y$。我们从图A1.17可以理解(A1.198)式的物理意义。设AB和CD是在$\mathbf{r}$方向传播的平面波两个相邻波峰的迹线。于是，波长λ将是如图所示的距离PQ，而沿x、y方向测得的波长λ_x和λ_y分别是距离AC和BD。根据图A1.17和方程(A1.186)，我们有

$$k_x=\frac{2\pi}{\lambda_x}=\frac{2\pi\cos\theta}{\lambda}$$

和 (A1.199)

$$k_y=\frac{2\pi}{\lambda_y}=\frac{2\pi\sin\theta}{\lambda},$$

而

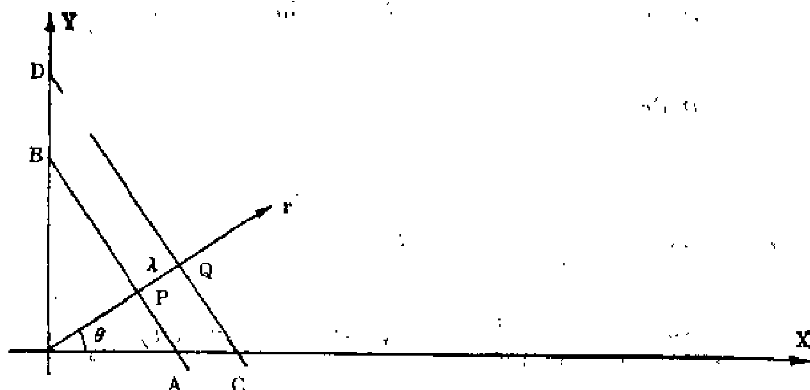
$$k^2=k_x^2+k_y^2.$$

对于直角坐标系中的三维波动方程，按照同样的推理，其解为

$$\Psi=ae^{\pm ik_x x}e^{\pm ik_y y}e^{\pm ik_z z}e^{\pm i\omega t},\tag{A1.200}$$

其中

$$k^2=k_x^2+k_y^2+k_z^2.\tag{A1.201}$$



图A1.17

我们可以把(A1.201)认为是定义了一个矢量 K,其分量为 k_x、k_y 和 k_z. 于是方程(A1.200)可以写为

$$\Psi=be^{\pm i(\vec{k}\cdot\vec{r}\pm\omega t)}.\tag{A1.202}$$

下面用分离变量法来考察波动方程解的另一种特殊类型。这就是在柱坐标系中表示的拉普拉斯，其中 Ψ 只是 ρ 和 z 的函数，而与方位角φ无关。我们由(A1.88)和(A1.173)式得

$$C^2\left[\frac{\partial^2\Psi}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\right]=\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}.\tag{A1.203}$$

选择解的形式为

$$\Psi=M(\rho)Z(z)T(t),\tag{A1.204}$$

把它代入(A1.203)式后得

$$\begin{aligned}&C^2\left[M''ZT+\frac{1}{\rho}M'ZT+MZ''T\right]-MZT''=0,\\&C^2\left[\frac{M''}{M}+\frac{1}{\rho}\frac{M'}{M}+\frac{Z''}{Z}\right]-\frac{T''}{T}=0.\end{aligned}\tag{A1.205}$$

我们再次指定 $-\omega^2$ 为第一项的常数，而 ω^2 为第二项的常数。这个算子对于第二项得出方程(A1.180),其解为 (A1.183);面对于第一项得

$$\left[\frac{M''}{M}+\frac{1}{\rho}\frac{M'}{M}+\left[\frac{Z''}{Z}+k^2\right]\right]=0.\tag{A1.206}$$

我们再次作变量分离，并且选$-\kappa^2$ 作为第一项的常数，而把 κ^2 作为第二项的常数，于是得

$$\rho^2M''+\rho M'+\rho^2\kappa^2M=0,\tag{A1.207}$$

和

$$Z''+(k^2-\kappa^2)Z=0.\tag{A1.208}$$

方程(A1.207)与解为(A1.139)的方程(A1.133)相同，而(A1.208)与(A1.181)具有同样形

式。于是我们可写出普遍形式的解：

$$\Psi=\sum_{\omega}\sum_{\kappa}a_{\omega\kappa}J_0(k\rho)e^{\pm i\sqrt{k^2-\kappa^2}\,z}e^{\pm i\omega t}, \tag{A1.209}$$

其中对 ω (或 k)和 κ 都要求和。当 κ 为实数并小于k时，它具有下述物理意义。(A1.209)式的 z 分量的形式表明那项指数中的根号是 Z 方向的波数。根据(A1.198)式，ρ 方向的波数为

$$k_\rho^2=k^2-k_z^2=k^2-(k^2-\kappa^2)=\kappa^2, \tag{A1.210}$$

ρ 方向的波数就是常数 κ。

A1.11 连带勒让德多项式

虽然我们所要涉及的问题大部分都利用球坐标系中在方位角方向的对称性，但推导在球坐标系的三维拉普拉斯方程解中出现的函数还是有意义的。

我们从A 1.6 节知道，勒让德多项式 P_n 是勒让德微分方程(A1.103)的解，而(A1.103)式可写为

$$(1-u^2)P_n''-2uP_n'+n(n+1)P_n=0. \tag{A1.211}$$

把上式对 u 微商 m 次，我们相继得出各次微商的方程。对于首次微商有

$$(1-u^2)\frac{d}{du}P_n''-2uP_n''-2u\frac{d}{du}P_n'-2P_n'+n(n+1)\frac{d}{du}P_n=0,$$

$$(1-u^2)\frac{d}{du}P_n''-2(2)\,u\frac{d}{du}P_n'+[n(n+1)-2]\frac{d}{du}P_n=0.$$

对于二次微商有

$$(1-u^2)\frac{d^2}{du^2}P_n''-2(3)\frac{d^2}{du^2}P_n'+\left[n(n+1)-2(3)\right]\frac{d^2}{du^2}P_n=0,$$

对于三次微商有

$$(1-u^2)\frac{d^3}{du^3}P_n''-2(4)u\frac{d^3}{du^3}P_n'+\left[n(n+1)-3(4)\right]\frac{d^3}{du^3}P_n=0,$$

对于 m 次微商有

$$(1-u^2)\frac{d^m}{du^m}P_n''-2(m+1)u\frac{d^m}{du^m}P_n'+\left[n(n+1)-m(m+1)\right]\frac{d^m}{du^m}P_n=0. \tag{A1.212}$$

现在设函数 $\Theta(u)$由下式定义：

$$\frac{d^m}{du^m}P_n(u)=(1-u^2)^{-m/2}\Theta(u), \tag{A1.213}$$

我们要看 Θ 满足什么样的微分方程。于是有

$$\frac{d^m}{du^m}P_n'(u)=(1-u^2)^{-m/2}\Theta'+mu(1-u^2)^{-(m/2)-1}\Theta$$

$$=(1-u^2)^{-(m/2)-1}\left[(1-u^2)\Theta'+mu\Theta\right],$$

$$\frac{d^m}{du^m}P_n^{\prime}(u)=(1-u^2)^{-m/2}\Theta''+2mu(1-u^2)^{-(m/2)-1}\Theta'+m(1-u^2)^{-(m/2)-1}\Theta$$

$$+m(m+2)u^2(1-u^2)^{-(m/2)-2}\Theta$$

$$=(1-u^2)^{-(m/2)-1}\left[(1-u^2)\Theta''+2mu\Theta'+m\Theta+\frac{m(m+2)u^2}{1-u^2}\Theta\right].$$

把这些关系代入(A1.212)式，得

$$(1-u^2)^2\Theta''+2mu(1-u^2)\Theta'+m(1-u^2)\Theta+m(m+2)u^2\Theta$$
$$-2(m+1)u(1-u^2)\Theta'-2m(m+1)u^2\Theta+[n(n+1)-m(m+1)](1-u^2)\Theta=0,$$

或作代数简化后为

$$(1-u^2)\Theta''-2u\Theta'+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-u^2}\right]\Theta=0, \qquad (A1.214)$$

这就是我们所要求的结果。函数$\Theta(u)$通常记为$P_n^m(u)$，而$P_n^m(u)$由(A1.213)式给出：

$$\Theta(u)=P_n^m(u)=(1-u^2)^{m/2}\frac{d^m}{du^m}P_n(u), \qquad (A1.215)$$

它就是连带勒让德多项式，或连带球谐函数。

球坐标系中的拉普拉斯方程由(A1.121)式给出。再利用A1.7节的分离变量法，我们假设解的形式为

$$\phi=R(r)\Theta(u)H(\varphi). \qquad (A1.216)$$

把上式代入 (A1.121)式，得

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2R'\Theta H)+\frac{\partial}{\partial u}\left[(1-u^2)R\Theta'H\right]+\frac{1}{1-u^2}R\Theta H''=0,$$

或

$$\frac{1-u^2}{R}\frac{\partial}{\partial r}(r^2R')+\frac{1-u^2}{\Theta}\frac{\partial}{\partial u}\left[(1-u^2)\Theta'\right]+\frac{H''}{H}=0. \qquad (A1.217)$$

令第三项等于$-m^2$,得与(A1.116)中第二式相同的方程，其解为

$$H=Ce^{\pm im\varphi}. \qquad (A1.218)$$

于是 (A1.217) 式变为

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}(r^2R')+\frac{1}{\Theta}\frac{\partial}{\partial u}\left[(1-u^2)\Theta'\right]-\frac{m^2}{1-u^2}=0. \qquad (A1.219)$$

方程 (A1.219) 与(A1.124) 类似，再用$n(n+1)$作为常参数，于是(A1.219)式就化为(A1.125)式[其解为(A1.127)]，和

$$\frac{d}{du}\left[(1-u^2)\Theta'\right]-\frac{m^2}{1-u^2}\Theta+n(n+1)\Theta=0,$$

或

$$(1-u^2)\Theta''-2u\Theta'+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-u^2}\right]\Theta=0,$$

该方程的解是连带勒让德多项式。于是最终具有(A1.128)形式的解为

$$\phi=\sum_{m,n}\left[a_{mn}r^n+b_{mn}r^{-(n+1)}\right]P_n^m(\cos\theta)e^{\pm im\varphi}. \qquad (A1.220)$$

A1.12 贝塞尔函数

贝塞尔函数是在地球物理偏微分方程解中出现的一个比较重要的函数。尤其是，它出现在有柱对称问题的解中，以及涉及热传导、扩散和电磁感应方程的解中，所有这些方程都是以一个量的拉普拉斯与同一量对时间的偏导数相等的形式给出的。我们有必要推导一些涉及贝塞尔函数的基本关系式。

n 阶的贝塞尔函数 $J_n(x)$ 定义为

$$y=J_n(x)=\frac{x^n}{2^n n!}\left(1-\frac{x^2}{2(2n+2)}+\frac{x^4}{2\cdot4(2n+2)(2n+4)}+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{(-1)^m x^{2m}}{2\cdot4\cdot\cdots\cdot2n(2n+2(2n+4)\cdot\cdots\cdot(2n+2m)}+\cdots\right)$$

$$=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{(-1)^\lambda}{\lambda!(\lambda+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}. \tag{A1.221}$$

将 $J_n(x)$ 对 x 求一次和二次微商，得

$$J'_n(x)=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{(-1)^\lambda}{\lambda!(\lambda+n)!}\frac{n+2\lambda}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1+2\lambda},$$

和

$$J''_n(x)=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{(-1)^\lambda}{\lambda!(\lambda+n)!}\frac{(n+2\lambda)(n-1+2\lambda)}{2^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-2+2\lambda}.$$

用 x^2 乘以二次微商，用 x 乘以一次微商，然后相加，并减去 $n^2\times J_n(x)$，我们就得到 $(x/2)^{n+2\lambda}$ 项的系数。

$$\frac{(-1)^\lambda}{\lambda!(\lambda+n)!}\left[(n+2\lambda)(n-1+2\lambda)+(n+2\lambda)-n^2\right]$$

$$=\frac{(-1)^\lambda}{\lambda!(\lambda+n)!}\left[(n+2\lambda)^2-n^2\right]=\frac{(-1)^\lambda}{\lambda!(\lambda+n)!}\left[4\lambda(\lambda+n)\right].$$

如果我们用 x^2 乘以 $J_n(x)$，就会得到那个表达式中 $(x/2)^{n+2\lambda}$ 项的系数：

$$\frac{(-1)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!(\lambda+n-1)!}\left[4\right]=-\frac{(-1)^\lambda}{\lambda!(\lambda+n)!}\left[4\lambda(\lambda+n)\right].$$

于是我们看到，$J_n(x)$ 满足微分方程：

$$x^2J''_n(x)+xJ'_n(x)-n^2J^n(x)=-x^2J_n(x)$$

或

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-n^2)y=0. \tag{A1.222}$$

(A1.222)式就是 n 阶的贝塞尔微分方程。我们知道，$J_n(x)$ 是该方程的两个特解之一。我们由方程(A1.222)和(A1.221)式可知，(A1.136)和(A1.139)式分别是零阶贝塞尔方程和零阶贝塞尔函数。

我们现在想得到各阶贝塞尔函数之间的递推公式。对于 $J_{n-1}(x)$ 和 $J_{n+1}(x)$，我们有

$$J_{n-1}(x)=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{(-1)^\lambda}{\lambda!(\lambda+n-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1+2\lambda},$$

和

$$J_{n+1}(x)=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\lambda}}{\lambda!(\lambda+n+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1+2\lambda}.$$

把这两个表达式相加，我们就得到$(x/2)^{n-1+2\lambda}$阶的项：

$$\left[\frac{(-1)^{\lambda}}{\lambda!(\lambda+n-1)!}+\frac{(-1)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!(\lambda+n)!}\right]\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1+2\lambda}$$

$$=\frac{(-1)^{\lambda}(\lambda+n)+(-1)^{\lambda-1}(\lambda)}{\lambda!(\lambda+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1+2\lambda}$$

$$=\frac{(-1)^{\lambda}}{\lambda!(\lambda+n)!}\frac{2n}{x}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}.$$

把它与定义$J_n(x)$的(A1.221)相比较，看出

$$\frac{2n}{x}J_n(x)=J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x). \tag{A1.223}$$

从$J_{n-1}(x)$中减去$J_{n+1}(x)$，我们得$(x/2)^{n-1+2\lambda}$阶的项：

$$\frac{(-1)^{\lambda}}{\lambda!(\lambda+n)!}(n+2\lambda)\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1+2\lambda}.$$

把它与$J'_n(x)$的表达式相比较，可以看出，

$$2J'_n(x)=J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x). \tag{A1.224}$$

从 (A1.223)和(A1.224)式中消去$J_{n-1}(x)$，得

$$\frac{n}{x}J_n(x)-J'_n(x)=J_{n+1}(x), \tag{A1.225}$$

或

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-n}J_n(x)\right]=-x^{-n}J_{n+1}(x). \tag{A1.226}$$

从(A1.223)和(A1.224)式中消去$J_{n+1}(x)$，得

$$\frac{n}{x}J_n(x)+J'_n(x)=J_{n-1}(x), \tag{A1.227}$$

或

$$\frac{d}{dx}\left[x^nJ_n(x)\right]=x^nJ_{n-1}(x). \tag{A1.228}$$

当n为奇整数的一半，即(A1.222)式中的n用$p+\frac{1}{2}$来代替（p是一个整数）时，我们对这种情况的贝塞尔方程的解比较感兴趣。在此情况下，解具有与三角函数有关的特别简单的形式。我们先来解 $p=0$ 时的方程（A1.222）即

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-\frac{1}{4})y=0. \tag{A1.229}$$

把因变量 y 变换到 z

$$y=x^{-1/2}z,$$

我们得

$$y' x^{-1/2}(z' - \frac{1}{2}x^{-1}z),$$

和

$$y'' = x^{-1/2}(z'' - x^{-1}z' + \frac{3}{4}x^{-2}z).$$

把这些表达式代入(A1.229)，得

$$z'' + z = 0;$$

它用 y 表示的解就是

$$y = ax^{-1/2}\sin x + bx^{-1/2}\cos x. \tag{A1.230}$$

把积分常数选为$a = b = (2/\pi)^{1/2}$，就可以得出解分别在 $n = \frac{1}{2}$和$n = -\frac{1}{2}$时贝塞尔函数的简化形式，即

$$J_{1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\sin x,$$

$$\tag{A1.231}$$

$$J_{-1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\cos x.$$

于是，其他半阶的贝塞尔函数可以直接应用递推公式(A1.226)和(A1.228)得到。

我们还将简单地考察一下与三角函数和超越函数之间的关系相对应的贝塞尔函数之间的关系。我们在(A1.222)中用 kx 来代替 x，其中 k 是一个常数，于是我们得

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (k^2x^2 - n^2)y = 0, \tag{A1.232}$$

其解就是$J_n(kx)$。现在我们令 k 等于一个虚数，$k = i = \sqrt{-1}$，此时方程(A1.232)就变为

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dx}{dx} - (x^2 + n^2)y = 0. \tag{A1.233}$$

(A1.233)式叫作修正的 n 阶贝塞尔方程。与(A1.221)相对应，我们将取它的解的形式为

$$y = I_n(x) = \frac{x^n}{2^n n!}\Big(1 + \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(2n+2)(2n+4)} + \cdots$$

$$+ \frac{x^{2m}}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot 2n(2n+2)(2n+4)\cdot\cdots\cdot(2n+2m)} + \cdots\Big) \tag{A1.234}$$

我们从(A1.221)式中注意到，

$$I_n(x) = i^{-n}J_n(ix). \tag{A1.235}$$

函数 $I_n(x)$叫做修正的贝塞尔函数。尤其是根据(A1.235)和(A1.231)式，我们得到

$$I_{1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\sin hx,$$

$$\tag{A1.236}$$

$$I_{-1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{-1/2}\cos hx.$$

附录二 奇异摄动理论简介

在近代海洋与大气动力学的理论研究中，应用摄动理论求解某些非线性问题，已经取得了不少成果。本书第三章的频散波能量传播和罗斯贝波的共振相互作用理论、第四章的粘性边界层理论、第五章的大洋环流西部强化理论和艾克曼上升流理论以及第七章的长波弱非线性不稳定理论等，都应用了摄动理论的基本概念和一些重要的奇异摄动方法，特别是多尺度方法和匹配渐近展开法。在此我们对书中涉及到的摄动理论与方法作扼要的补充介绍。

A2.1 摄动理论的基本概念

A2.1.1 摄动理论的性质　流体力学是求解非线性偏微分方程的先驱学科之一。控制流体运动的基本方程，与数学物理其他分支的方程不同，它在本质上是非线性的（更确切地说是拟线性的）。正因为如此，所以在流体力学的各个分支中，都很少有精确解。为了求解非线性方程，通常不得不借助于近似方法寻求渐近解，或者借助于数值方法寻求数值解，或者把近似法和数值法结合起来求解。

摄动方法是寻求渐近解的最有效的近似方法。它的基本思路如下。首先把方程和定解条件无量纲化，选择一个合适的摄动量。摄动量常选为一个无量纲小（或大）参数，这个参数有时出现在微分方程中，有时出现在定解条件中，或同时出现在方程和定解条件中，甚至还可以人为地引入解法中。这种以小（或大）参数为摄动量进行展开的方法，叫做参数摄动。此外也可以选一个自变量（用无量纲形式）为摄动量，这种方法叫坐标摄动。摄动量的选择一般不是唯一的，合理的选择往往依赖于个人对物理问题理解的深入程度。选定摄动量后，可对未知函数作渐近展开。当摄动量趋于零（或无穷）时，这类近似式也变得更为精确，因此它是一个渐近解。原则上说，可以把它作为一系列逐步近似的第一步来进一步改进所得之结果。所得到的级数，尽管不一定收敛，但却可以构造出一个渐近展开式。经验表明，对许多物理问题来说，只要摄动量足够小（或大），那末取渐近展开式中少数的前几项就足够正确了。实际上，通常只计算第一近似，有时也计算第二近似。第二近似的作用常常是有助于理解第一近似。只在极少数情况下才计算到第五或第六近似。但是可以一直进行到无穷阶，这一点有着根本性的意义。我们称这类近似叫合理近似。我们所要讨论的是流体运动方程之解对于某些小（或大）参数或自变量的渐近展开式。为方便起见，我们常用 ε 表示摄动量，并定义它为小量，当 $\varepsilon \to 0$ 时，必须假定运动趋于一个极限，该极限叫做基本解。

在最好的情况下，摄动解可以导致完全令人满意的结果。一般说来，不能假定渐近级数是收敛的，特别对参数摄动更是如此。但是，它的渐近性意味着，对于合理的小 ε，它的前几项可以给出流场各处的适当的精度。我们称这种在区域上有一致成立的渐近解的问题为正规摄动问题。

另一方面我们可以发现，有时直接的摄动解在整个区域上并不一致成立。最著名的例子是高雷诺数时的非分离粘性流，其中基本粘性运动的摄动在流体表面附近失效，必须用边界层近似作补充。在这种情况下，不仅第一近似确实局部失效，而且高阶近似也同样如此，所

以在非一致成立区域，渐近解不是变好，而是变坏。这种渐近解在区域上非一致成立的问题称为奇异摄动问题。

在讨论具体方法之前，先介绍一些有关摄动方法的基本概念、定义和重要的分析过程。

A2.1.2 摄动方法概要 （1）极限过程，标准函数和量级符号 我们所关心的是寻求流体运动方程的近似解，这种近似解在某种意义上逼近精确解。它包括下述记号表示的各种相等和次于相等程度的量：

$\equiv$ 恒等于

$=$ 等　于

$\sim$ 渐近地等于（在某种已知的极限上）

$\approx$ 近似地等于（在任何有用的意义上）

$\propto$ 正比于

下面考虑一种依赖于极限过程的近似，即当摄动量趋于零或某个其他临界值时，该结果变为精确的结果。我们常常碰到双极限过程或多极限过程，其中有两个以上的摄动量同时趋于其极限。因为取几种极限的次序一般不能交换，所以常常需要规定趋近极限的相对速率。

流体力学问题的解依赖于坐标，如 x, y, z, t，也取决于各种参数。这些量中的一个或几个，通过适当的重新定义，在摄动解中可以认为是无限小量。我们来考虑当其他坐标与参数固定时，解答取决于某一个参数的特性，即考虑描写当 ε 趋于零时，函数 $f(\varepsilon)$ 所表现的渐近方式。

可以用几种可能方法描写。第一，我们可以简单地说极限是否存在。例如，当 $\varepsilon\to 0$ 时，$\sin 2\varepsilon$ 有极限，而 $\sin\dfrac{2}{\varepsilon}$ 没有极限。但是我们只关心那些确有极限存在的问题。

第二、可以定性地描写极限值，这有三种可能性：

$$\left.\begin{array}{l}(a)\text{为零：}f(\varepsilon)\to 0,\\(b)\text{有界：}f(\varepsilon)<\infty,\\(c)\text{无界：}f(\varepsilon)\to\infty,\end{array}\right\}\text{当}\varepsilon\to 0\text{时.}$$

趋于零的函数也是有界的，但是只要有可能，我们总是使用第一种描述方式，因为它更为确切。

第三，可以定量地描写极限值，也有三种可能性：

$$\left.\begin{array}{l}(a)\lim f(\varepsilon)=0\\(b)\lim f(\varepsilon)=c\quad(\text{常数}),\\(c)\lim f(\varepsilon)=\infty\end{array}\right\}\text{当}\varepsilon\to 0\text{时.}$$

第四，可以定性地描述 $f(\varepsilon)$ 趋于极限的速率。其方法是通过与一组标准函数 $\delta(\varepsilon)$ 作比较。这些标准函数 $\delta(\varepsilon)$ 是我们所熟悉的（如 ε 的整数幂级数），其极限性质已知。作比较时可用量级符号 O（大写）和 o（小写），其定义如下：

设有一正数A，它与 ε 无关，又有一正数 $\varepsilon_0>0$，使下述关系成立：

$$|f(\varepsilon)|\leqslant A|\delta(\varepsilon)|,\ (\text{对任意}|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0)\tag{A2.1}$$

则称 $f(\varepsilon)$ 为 $\delta(\varepsilon)$ 的量级，记为

$$\varepsilon\to 0\text{时},\ f(\varepsilon)=O[\delta(\varepsilon)].\tag{A2.2}$$

条件(A2.1) 也可表示为

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\frac{f(\varepsilon)}{\delta(\varepsilon)}\right|<\infty. \tag{A2.1$'$}$$

又若 f 是自变量 x 的函数，即 $f=f(x;\varepsilon)$，而 $\delta(x;\varepsilon)$ 为一标准函数，设有与 ε 无关的 $A>0$ 和 $\varepsilon_0>0$，对于所有 $|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0$ 均有

$$|f(x;\varepsilon)|\leqslant A|\delta(x;\varepsilon)| \tag{A2.3}$$

成立，则 $f(x;\varepsilon)$ 是 $\delta(x;\varepsilon)$ 的量级，记为

$$f(x;\varepsilon)=O(\delta(x;\varepsilon)).$$

类似地，可以给出小 o 的定义．设对任何与 ε 无关的正数 δ 而言，总存在 $\varepsilon_0>0$，使得当 $|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0$ 时有

$$|f(\varepsilon)|\leqslant\delta|g(\varepsilon),| \tag{A2.4}$$

则称当 $\varepsilon\to 0$ 时，

$$f(\varepsilon)=o[g(\varepsilon)] \tag{A2.5}$$

条件A(2.4)可以改写为

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)}\right|=0, \tag{A2.4$'$}$$

例如：

$$\sin\ 2\varepsilon=O(\varepsilon),\qquad 1-\cos\varepsilon=O(\varepsilon^2)=o(\varepsilon),$$

$$\sqrt{1-\varepsilon^2}=O(1),\qquad sec^{-1}(1+\varepsilon)=O(\varepsilon^{1/2})=o(1),$$

$$cot\varepsilon=O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right),\qquad exp(-{}^1/\varepsilon)=o(\varepsilon^m),\text{对于任意}m.$$

注意，数学上的量级与物理上的量级是不同的．对于数学上的量级，比例系数的大小是不重要的，例如 $R\varepsilon=O(\varepsilon)$，其中即使 $R=10^5$，该式仍然成立，它还是数学上的 ε 量级．但在物理上，人们总希望 $O(\varepsilon)$ 和 ε 量级的实际情况有可比的联系，即谈到 $R\varepsilon$ 和 ε 的数值是同量级时，人们希望 R 的数值在 10 以内．

量级符号的简单运算规则．显然来自物理上的量级关系．例如，乘积（或比）的量级是量级的乘积（或比）；和与差的量级是主要项的量级等．量级符号可以对 ε 或其他变量积分，但一般不能对量级关系作微分运算．然而在物理问题中常假定可以对另一个变量求导数，且导数与原来的量具有同量级．

（1）渐近表示和渐近级数． 第五种方法是定量描写一个函数趋于其极限的速率．这是对第四种方法（使用量级符号）的改进．如果

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(\varepsilon)}{\delta(\varepsilon)}=c,$$

即

$$f(\varepsilon)=c\delta(\varepsilon)+o[\delta(\varepsilon)],$$

则可以表示为

$$\text{当 }\varepsilon\to 0\text{ 时，}f(\varepsilon)\sim c\delta(\varepsilon), \tag{A2.6}$$

这就是函数的渐近形式或渐近表示，并构成以下讨论的渐近展开式中的主要项，例如，

$$\sin 2\varepsilon\sim 2\varepsilon,\qquad sech^{-1}\varepsilon\sim log\frac{2}{\varepsilon},$$

$$\sqrt{1-\varepsilon^2}\sim 1, \qquad K_0\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\sim\sqrt{\frac{\pi}{2}}\varepsilon^{1/2}e^{-1/\varepsilon},$$

$$\cot\varepsilon\sim 1/\varepsilon, \qquad \int_0^\infty\frac{e^{-t}dt}{1+\varepsilon t}\sim 1.$$

第六种方法是通过进一步增加项数，来使前一种描述——它是仅使用一个标准函数所能得到的最确切的描述——得到改进。把所要求的未知函数与其渐近形式之差考虑为一个新函数，并确定它的渐近形式。结果可表示为

$$f(\varepsilon)\sim c_1\delta_1(\varepsilon)+c_2\delta_2(\varepsilon), \qquad \text{当 } \varepsilon\to 0 \text{ 时},$$

其中第二个标准函数 $\delta_2(\varepsilon)$ 的量级必须小于第一个，即

$$\delta_2(\varepsilon)=o[\delta_1(\varepsilon)] \text{ 或} \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\delta_2(\varepsilon)}{\delta_1(\varepsilon)}=0,$$

而且误差的量级更小：

$$f(\varepsilon)=c_1\delta_1(\varepsilon)+c_2\delta_2(\varepsilon)+o[\delta_2(\varepsilon)].$$

重复上述过程，可以进一步增加其他项。于是可以构造含 N 项的渐近展开式或渐近级数，记为

$$f(\varepsilon)\sim c_1\delta_1(\varepsilon)+c_2\delta_2(\varepsilon)+\cdots\cdots+c_N\delta_N(\varepsilon)$$

$$=\sum_{n=1}^{N}c_n\delta_n(\varepsilon), \qquad \text{当}\varepsilon\to 0\text{时}, \tag{A2.7}$$

且可定义为

$$f(\varepsilon)=\sum_{n=1}^{N}c_n\delta_n(\varepsilon)+o[\delta_N(\varepsilon)], \qquad \text{当}\varepsilon\to 0. \tag{A2.8}$$

若函数 $f(\varepsilon)$ 和标准函数 $\delta_n(\varepsilon)$ 已知，则渐近展开式之系数 c_n 可用递推方法，由

$$c_m=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(\varepsilon)-\sum_{n=1}^{m-1}c_n\delta_n(\varepsilon)}{\delta_m(\varepsilon)}$$

计算。如果标准函数是 ε 的所有正整数幂，则称为渐近幂级数。当项数 N 无限增加时，可以得到无穷渐近级数，它可以收敛，也可以发散。渐近展开式的例子如下：

$$\sin 2\varepsilon\sim 2\varepsilon-\frac{4}{3}\varepsilon^3+\frac{4}{15}\varepsilon^5+\cdots\cdots,$$

$$\operatorname{sech}^{-1}\varepsilon\sim\log\frac{2}{\varepsilon}-\frac{1}{4}\varepsilon^2-\frac{3}{32}\varepsilon^4+\cdots\cdots$$

$$K_0\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\sim\sqrt{\frac{\pi}{2}}\varepsilon^{1/2}e^{-1/\varepsilon}\left(1-\frac{1}{8}\varepsilon+\frac{9}{128}\varepsilon^2+\cdots\cdots\right).$$

前两个是收敛的，第三个是发散的。

（3）渐近序列及其收敛性和精度。 上述逐项构造展开式的过程，实际上是摄动解中用的方法，所以在每个具体问题中，一个摄动解产生了一个特殊的标准函数序列：

$$\delta_1(\varepsilon)、\delta_2(\varepsilon)、\delta_3(\varepsilon)\cdots\cdots,$$

它们按量级减小的次序排列：$\delta_{n+1}=o(\delta_n)$，这是与该问题有关的渐近序列。如果给定了摄动量（如 ε）和标准函数（如 ε^m，$\log^{1/\varepsilon}$ 等），那末渐近序列和渐近展开式本身都是唯一的。

解决摄动问题的一个方法是假定未知函数有级数形式的解。这就要求猜测一个合适的渐

近序列。最简单的可能性是由整数幂 ε^n 组成，也可用分数次幂组成，尤其是在奇异摄动问题中（参见第七章 7.16 节）。

无穷渐近级数，或者对 ε 的某一范围收敛，或者对所有的 ε 均不收敛。在摄动问题中，人们常常既不知道，也不关心这种级数是否收敛。数学上的收敛取决于无穷高阶项的性质，而在物理问题中，人们可以只计算前几项，并希望它们能迅速地接近真解。这种要求有时可能更适合于发散级数而不是收敛级数。例如贝塞尔函数的展开式

$$J_0(\varepsilon)=1-\frac{1}{4}\varepsilon^2+\frac{1}{64}\varepsilon^4-\frac{1}{2304}\varepsilon^6+\cdots\cdots$$

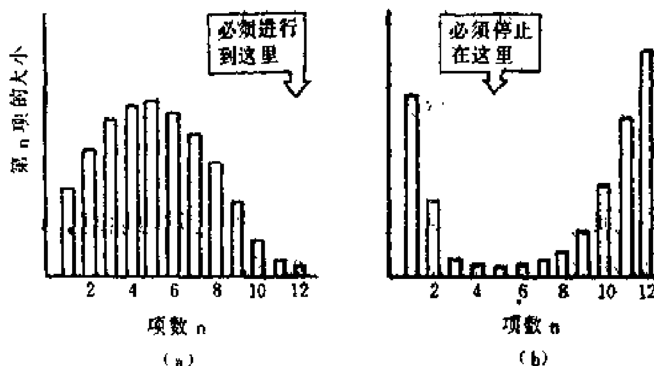
的收敛半径无限大，但是除非 ε 很小，否则要得到准确结果需要计算许多项。在 $\varepsilon\geqslant 4$ 时，前三项在大小上实际上是增加的（所以级数似乎是发散的），为了得到三位数字的精度，至少要算 8 项。另一方面，渐近级数

$$J_0\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\sim\sqrt{\frac{2\varepsilon}{\pi}}\left[\left(1-\frac{9}{128}\varepsilon^2+\cdots\cdots\right)\cos\left(\frac{1}{\varepsilon}-\frac{\pi}{4}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{8}\varepsilon-\frac{75}{1024}\varepsilon^3+\cdots\cdots\right)\sin\left(\frac{1}{\varepsilon}-\frac{\pi}{4}\right)\right],\text{当}\varepsilon\to 0,$$

不论 ε 多小总是发散的，但当 ε 适当小时，级数前几项却给出很好的精度。对 $1/\varepsilon=4$ 来说，只用第一项就精确到三位有效数字。

渐近展开式的用途如下所述。根据定义，它的误差的量级是第一个可略去项的量级，因而当 ε 减小时，它迅速趋于零。对于一个固定的 ε 值，开始时通过增加项数，误差也可能是减小的，但若级数是发散的，则总要有一个点存在，此点之后再增加项数，将使误差增大。这种性质如图 A2.1 所示。对实用的目的来说，这类性质往往是很理想的。此时，只有小 ε 值才有实际意义，且只需计算几项，所以达不到使误差增加的那些点。



图A2.1 级数中的项的特性：
(a)缓慢收敛的级数 (b)发散的渐近级数。

(4)逐次近似 流体力学中遇到的摄动问题，通常包括一个常微分方程组或偏微分方程组以及适当的初始条件与边界条件。在包含热辐射的问题中，也会遇到积分微分方程。用逐次近似求解时，有两种系统的方法：

(i)用假设的级数代替未知函数；

(ii)迭代近似法。

前一种方法是较普遍的方法，其主要原则是，由于展开式至少在渐近的意义上对摄动量 ε 的任意值都必须成立，所以 ε 的同量级项必须分别满足每个方程。也就是说，可以令 ε 的同次幂项相等，而得到逐级近似问题。这两种方法各有其优缺点，有时也可结合使用。

不论用哪种方法，对所有摄动解都存在一些共同的特征。基本解可以是线性的或非线性

的，但除了极个别的例子外，较高阶近似都受具有线性边界条件的线性方程控制，从而把非线性问题转化为逐次求解线性问题。

A2.1.3　正规摄动的简例　下面举两个简单例子说明上述的摄动方法。

(1)参数摄动的例子　例1.当 ε 为小量时，求方程组

$$\begin{cases} s\dfrac{dx}{ds}=x+\varepsilon y \\ s\dfrac{dy}{ds}=-(2+x)y \end{cases} \tag{A2.9}$$

满足边界条件

$$y(1)=e^{-1},\qquad x(1)=1$$

的精确到 $O(\varepsilon)$ 的摄动解。

这是一个拟线性方程组，可以化为二阶拟线性方程。设 x、y 的解可以展开为下述级数：

$$\begin{aligned} x&=x_0+x_1\varepsilon+x_2\varepsilon^2+\cdots\cdots, \\ y&=y_0+y_1\varepsilon+y_2\varepsilon^2+\cdots\cdots. \end{aligned} \tag{A2.10}$$

把(A2.10)代入(A2.9)式和边界条件，分别令 ε 的同次幂系数相等，得到

$O(1)$问题

$$s\frac{dx_0}{ds}-x_0=0, \tag{A2.11a}$$

$$s\frac{dy_0}{ds}+2y_0+x_0y_0=0, \tag{A2.11b}$$

$$y_0(1)=e^{-1},\qquad x_0(1)=1. \tag{A2.11c}$$

以及 $O(\varepsilon)$问题

$$s\frac{dx_1}{ds}-x_1-y_0=0, \tag{A2.12a}$$

$$s\frac{dy_1}{ds}+2y_1+x_1y_0+x_0y_1=0, \tag{A2.12b}$$

$$y_1(1)=0,\qquad x_1(1)=0. \tag{A2.12c}$$

等等。(A2.11)的解为

$$x_0=s,\qquad y_0=\frac{1}{s^2}e^{-s}. \tag{A2.13}$$

把(A2.13)代入方程(A2.12)可得

$$s\frac{dx_1}{ds}-x_1-s^{-2}e^{-s}=0, \tag{A2.14a}$$

$$s\frac{dy_1}{ds}+2y_1+x_1s^{-2}e^{-s}+sy_1=0, \tag{A2.14b}$$

$$x_1(1)=0.,\qquad y_1(1)=0. \qquad\text{(A2.14)c)}$$

解(A2.14)得

$$x_1=s\int_1^s t^{-4}e^{-t}dt,$$

$$y_1=\frac{e^{-s}}{s^2}\int_1^s du\int_1^u t^{-4}e^{-t}dt.$$

故一阶近似的摄动解为

$$x=s+\varepsilon s\int_1^s e^{-t}t^{-4}dt+O(\varepsilon^2),$$

$$y=\frac{e^{-s}}{s^2}\left[1+\varepsilon\int_1^s du\int_1^u t^{-4}e^{-t}dt\right]+O(\varepsilon^2). \tag{A2.15}$$

许多物理问题，在数学上可化为微分方程 $L(u,x,\varepsilon)=0$ 和边界条件 $B(u,\varepsilon)=0$，欲求函数 $u(x,\varepsilon)$，其中 L,B 是微分算子，x 可以是标量变量或矢量变量，ε 为无量纲参数。一般地说，无法求得精确解，我们希望在 ε 较小时，求形如

$$u(x,\varepsilon)=u_0(x)+\varepsilon u_1(x)+\varepsilon^2u_2(x)+\cdots\cdots \tag{A2.16}$$

的渐近解，其中$u_n(x)$都不是 ε 的函数。为此，将上式代入方程 $L(u,x,\varepsilon)=0$ 和边界条件 $B(u,\varepsilon)=0$，再合并 ε的幂次相等的项。因为这些微分方程和边界条件在任意 ε 下均适用，所以它的 ε^n 的所有系数都必须单独满足这些微分方程和边界条件。由此得到一系列微分方程和边界条件，并由它们逐次求得u_0、u_1、u_2，……，从而得到渐近解(A2.16)。

（2）坐标摄动的例子 例2．邦加莱型的渐近级数解

求方程

$$\frac{dy}{dx}+y=\frac{1}{x} \tag{A2.17}$$

在较大的 x 值时的解．当 x 为大量时，设

$$y=\sum_{m=1}^{\infty}a_m x^{-m}. \tag{A2.18}$$

把(A2.18)式代入方程(A2.17)，稍加整理后可得

$$(a_1-1)x^{-1}+\sum_{m=1}^{\infty}(a_{m+1}-ma_m)x^{-m-1}=0.$$

由于这个方程是 x 的恒等式，所以 x^{m} 的所有系数都恒等于零．即

$$a_1=1,\qquad a_{m+1}=ma_m\qquad (m\geqslant1),$$

于是得到

$$a_2=1,a_3=2!,a_4=3!,\cdots\cdots a_n=(n-1)!,\cdots\cdots,$$

而(A2.18)式可以写成

$$y=\frac{1}{x}+\frac{1!}{x^2}+\frac{2!}{x^3}+\cdots\cdots+\frac{(n-1)!}{x^n}+\cdots\cdots. \tag{A2.19}$$

由于该级数的第 n 项与第 n-1 项的比值是$(n-1)x^{-1}$，不论 x 的取值如何，它在 $n\to\infty$ 时都趋于无限，故级数(A2.19)对所有的 x 值都是发散的。但是这种渐近展开式，当 x 很大时，对数值计算很有用处。

容易直接解方程(A2.17)，其一个特解为

$$y=e^{-x}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{x}e^{x}dx, \tag{A2.20}$$

这个积分对任意负的x值都收敛。把(A2.20)式分部积分得

$$y=\frac{1}{x}+e^{-x}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{x^2}e^x dx$$

$$=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+2e^{-x}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{x^3}e^x dx=\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{2!}{x^3}+\cdots\cdots+\frac{(n-1)!}{x^n}+R_n, \tag{A2.21}$$

其中

$$R_n=n!e^{-x}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{x^{n+1}}e^x dx.$$

对于负x来说,

$$|R_n|\leqslant n!|x^{-n-1}|e^{-x}\int_{-\infty}^{x}e^x dx=\frac{n!}{|x^{n+1}|}. \tag{A2.22}$$

这表明当n一定时，若在(A2.19)式中取n项，则其误差必定小于$\frac{n!}{|x^{n+1}|}$，而且当$|x|\to\infty$时，对一定的n来说，$R_n\to 0$.因此，尽管级数是发散的，值当x足够大时，指定取n项，仍能使误差变得很小。这种级数称为邦加莱型级数，表示为

$$y\sim\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{2!}{x^3}+\frac{3!}{x^4}+\cdots\cdots+\frac{n!}{x^{n+1}}+\cdots\cdots$$

$$(\text{当}|x|\to\infty\text{时}). \tag{A2.23}$$

还需指出，当$x>0$时，有效的特解可写为

$$y=e^x\int_{x}^{\infty}\frac{1}{x}e^{-x}dx.$$

由此，也可证明渐近解的形式是(A2.23)。

一般地说，如果一个物理问题可以用微分方程$L(u,\ x)=0$及边界条件$B(u)=0$来表示，当$x\to x_0$时，$u(x)\to u_0$为已知，则在$x_0=0$时，可以通过把$u(x)$展开为x的幂级数而求出u在$x=0$附近的渐近解；当$x_0=\infty$时，可以用把$v(x)$展开为$\frac{1}{x}$的幂级数的办法，求x在渐近于∞时的渐近解，这就是坐标摄动法。

A2.1.4　奇异摄动问题产生的由来　正规摄动是邦加莱型的渐近展开

$$f(x;\varepsilon)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\delta_n(\varepsilon)f_n(x), \tag{A2.24}$$

其中$\delta_n(\varepsilon)$是以值动量ε为基础的渐近序列。当$\delta_n(\varepsilon)$为ε的n次幂时，这种渐近序列就是最常见的幂级数序列。在很多情况下，邦加莱型渐近展开不能在自变量x的整个定义域上一致成立，即存在不成立的某些区域，这种区域叫非一致成立区域。如前所述，渐近解在区域上非一致成立的问题，称为奇异摄动问题。其产生原因常有如下四种。

（1）　自变量区域无限的问题　例如时间无限长的问题，物体四周无限远处的流动问题等。在无限域上，物理问题要求解有限，但邦加莱渐近展开式常常是无穷大，这时邦加莱展

开式不再成立。第七章讨论的非线性不稳定问题就属于这类奇异摄动问题。关于这类问题的产生，在 A2.3 节中将进一步地加以讨论。

（2） 函数的导数与函数本身量级不同的问题 在邦加莱展开式中，$f_n(x)$、$f'_n(x)$、$f''_n(x)$ 等都是同量级的量，这就预先肯定了当 $\varepsilon\to 0$ 时，f、$\partial f/\partial x$、$\partial^2 f/\partial x^2$ 等都是同量级的量。但有一类微分方程的最高阶导数项带有一个小参数系数。用邦加莱展开式作渐近展开时，其一级近似摄动解的微分方程的阶数，往往低于原方程的阶数，这样就不能满足全部边界条件，说明邦加莱型渐近展开式也不适用于这类奇异摄动问题。在 A2.2 节中介绍的匹配渐近展开法中对这类奇异摄动问题将作进一步的讨论。

（3） 在摄动中微分方程类型发生变化的问题 椭圆型、抛物线型或双曲线型方程的解，随其类型不同而有本质的区别。但用邦加莱展开式研究问题时，当 $\varepsilon\to 0$ 时，微分方程的类型可能发生变化，使最低阶近似方程和原方程在类型上有了本质的改变，此时显然正规摄动不适用。

（4） 具有奇点的问题 有些问题中，原方程的精确解并无奇点，但在渐近展开式中出现了奇点，而且这种奇点的奇异性在高阶问题中越来越强，使邦加莱型展开式失效。

解决奇异摄动问题的方法仍处于应用数学的发展阶段。近年来已经提出了研究奇异摄动问题的几类比较普遍的方法。一类方法是对邦加莱提出的思想的推广，称之为应变坐标方法；第二类方法是边界层理论之概念的推广，称为匹配渐近展开方法；第三类方法是近十几年中迅速发展起来的一类更有效的方法，称为多尺度方法(*the method of multiple scale*)。在随后几节里，着重讨论匹配渐近展开方法和多尺度方法，因为它们在本书的理论推导过程中多次用到。

A2.2 匹配渐近展开方法

本书第四章边界层理论、第五章大洋环流西部强化理论和艾克曼上升流理论的推导中，都系统地应用了匹配渐近展开方法的概念来解决问题。我们在这里只是通过一个最简单的数学模型来说明这种方法的基本思想。

从普朗特的边界层理论中，人们已经熟悉了，这种经典问题的特征是，微分方程中最高阶导数前乘了一个小参数。在用正规摄动方法求解时，最高阶导数项在一阶近似中消失，从而使方程的阶数降低。这样就必须舍弃一个或几个边界条件，从而使得渐近展开式在某些加边界条件的边界区域内失效。除了原来的边界条件恰好满足简化方程的特殊情况外，都会发生上述情况。

考察线性常微分方程作为说明比较复杂的问题之基本特征的数学模型，往往很有帮助。因此我们在这里选用如下的简单问题，来说明在边界层理论中失去最高阶导数的奇异摄动问题：

$$\varepsilon\frac{d^2f}{dx^2}+\frac{df}{dx}=a, \tag{A2.25}$$

$$f(0)=0,\qquad f(1)=1.$$

其精确解是

$$f(x;\ \varepsilon)=(1-a)\frac{1-e^{-x/\varepsilon}}{1-e^{-1/\varepsilon}}+ax. \tag{A2.26}$$

现在我们来求 $\varepsilon\to 0$ 时的渐近解。当 $\varepsilon\to 0$ 时，微分方程(A2.25)退化为一阶方程

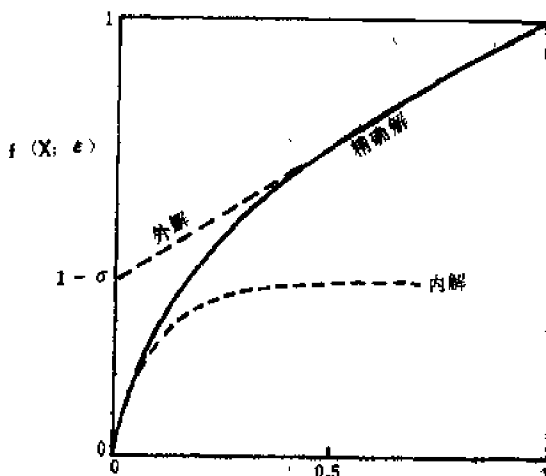
$$\frac{df}{dx}=a.$$

所以除非$a=1$，否则不可能同时满足两个边界条件。精确解(A2.26)说明，退化的一阶方程的解不可能满足$x=0$处的边界条件。因此对小ε的近似解是

$$f(x;\varepsilon)\sim(1-a)+ax \qquad (A2.27)$$

这个解是满足$x=1$处的外边界条件的退化的一阶方程的解，用记号f表示，称之为外解(*outer solution*)。如图A2.2所示，除了$x=o(\varepsilon)$的小区域以外，上式是一个较好的近似，但是在$x=0$点附近，精确解迅速变化(锐变)，使得外解不能满足内边界条件，$f(0)=0$，而在内边界附近失效。在这种小区间上，函数具有锐变的特征，类比于流体力学，可称之为"边界层"。为了求得一个在边界层中有效的展开式，我们引进一个放大的内坐标(内变量)X，使之适合于该边界层内的区域，可令

$$f(x;\varepsilon)=F(X;\varepsilon),\quad X=\frac{x}{\varepsilon}, \qquad (A2.28)$$



图A2.2 模式问题的解

于是原来的问题(A2.25)变为

$$\frac{d^2F}{dX^2}+\frac{dF}{dX}=a\varepsilon, \qquad (A2.29)$$

$$F(0)=0,\qquad F\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)=1.$$

如果我们现在令$\varepsilon=0$，则简化方程为

$$\frac{d^2F}{dX^2}+\frac{dF}{dX}=0.$$

它的通解是

$$F=A+B^{-X},$$

其中A、B是任意常数。显然这个解在边界层内是有效的，必满足$x=0$处的内边界条件：$F(0)=0$，因而我们得到满足内边界条件的微分方程的解为

$$F(X;\varepsilon)\sim A(1-e^{-X}), \qquad (A2.30)$$

式中任意常数A是待定的。在边界层中求出的这个解F，称为内解(*inner solufson*)。如果我们想让它满足$x=1$处的外边界条件，那末必须取A=1，但精确解说明这是错误的。所以对内解必须舍弃外边界条件，就象对外解必须舍弃内边界条件一样。那末内解的任意常数A应当如何确定呢？

一般地说，象本例的情况一样，内解与外解总是相互补充的，在一个解失效的区域里，另一解却成立。相互补充的一个重要特征是，在它们的连接部分应该有相同的表达式，由此可以决定出A来。

注意到

$$\lim_{x\to 0} f(x;\varepsilon)=1-a. \tag{A2.31}$$

此外，对于任何小的固定的 x_0 值，$\varepsilon\to 0$ 相当于 $X\to\infty$，因而有

$$\lim_{X\to\infty} F(X;\varepsilon)=\mathrm{A}. \tag{A2.32}$$

于是，对于一个很小的 $x=x_0\neq 0$ 值，(A2.31) 和(A2.32) 式应设为相等，即

$$\mathrm{A}=1-a.$$

于是内解(A2.30)变为

$$F(X;\varepsilon)\sim(1-a)(1-e^{-X}). \tag{A2.33}$$

以上在决定内、外解（或称内、外展开式）时，利用了两种不同的极限过程。一种叫外极限，其定义为

$$(y)^o=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ x\,\text{固定}}} y(x;\varepsilon), \tag{A2.34}$$

即当摄动参数 ε 趋于零时，外变量 x 固定所得到的极限。另一种叫内极限，其定义为

$$(y)^i=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ X\,\text{固定}}} y(\varepsilon X;\varepsilon), \tag{A2.35}$$

即当摄动参数趋于零而保持内变量 X 固定时所得到的极限。上述决定参数 A 的方法，是通过把内解和外解匹配起来实现的，采用的匹配原则是

$$\lim_{x\to 0} f(x;\varepsilon)=\lim_{X\to\infty} F(X;\varepsilon) \tag{A2.36}$$

如果用记号 $(f)^i$ 表示外解的内极限，用 $(F)^o$ 表示内解的外极限，则上述匹配原则等价于

$$(f)^i=(F)^o. \tag{A2.37}$$

到此为止，我们找到了对小 ε 一致成立的一阶近似解：

$$f(x;\varepsilon)\sim\begin{cases}(1-a)+ax,\ \text{当}\ \varepsilon\to 0,\ x>0\ \text{固定}, & \text{(A2.38a)}\\ (1-a)\,(1-e^{-X}),\ \text{当}\ \varepsilon\to 0,\ X=\dfrac{x}{\varepsilon}\ \text{固定}. & \text{(A2.38b)}\end{cases}$$

但是这个解是分段给出的。为了便于讨论解的性质，有必要进一步考虑如何将解 f 用一单个解表示出来，而且使这个解对一切有意义的 x 值均成立。这种单个的一致成立的解，称为合成解，记为 y^c，它与内解 F 和外解 f 的关系是

$$y^c=f+F-(f)^i=f+F-(F)^o. \tag{A2.39}$$

事实上，根据内外极限的定义(A2.34)和(A2.35)式，并注意到匹配原则，(A2.37)，有

$$((f)^i)^o=(f)^i=(F)^o=((F)^o)^i, \tag{A2.40}$$

从而得

$$\begin{aligned}(y^c)^o&=f+(F)^o-((f)^i)^o\\ &=f+(F)^o-(f)^i=f,\end{aligned} \tag{A2.41a}$$

$$(y^c)^i=(f)^i+F-((F)^o)^i=F. \tag{A2.41b}$$

这说明合成解 y^c 在边界层外部区域逼近于外解，在边界层内部区域则逼近于内解，因此它是在整个 x 区间上一致成立的表达式。

在上述例子中，由于

$$(f)^i=(F)^e=(1-a),$$

所以合成解为

$$y^c=ax+(1-a)(1-e^{-x/\varepsilon}). \tag{A2.42}$$

我们把它与精确解(A2.26)和比较，则立即可以看出，当 $\varepsilon\to 0$ 时，y^c 在整个区域上一致逼近精确解。因此，(A2.42)是方程(A2.25)当 $\varepsilon\to 0$ 时的零阶近似解。也可以用类似的方法求出更高阶近似的外解、内解和合成解。应当指出的是匹配条件不是唯一的，在更复杂的问题中，匹配的原则也不象这里所举的例子中这样简单。

通过上述简单的模型我们看到，由于方程的最高阶导数前乘了一个小参数，所以使正规摄动解不能在区域上一致成立，这种摄动问题的特征是未知函数在自变数范围的某些区域（边界层）中出现突然的锐变。为了得到在整个区域上一致成立的展开式，必须注意到这样的事实：上述锐变是以扩大尺度为其特征的，这个尺度不同于表征锐变区外未知函数性质的那个尺度。换句话说，解决这类奇异摄动问题，应当借助于两种不同的长度尺度：一个适用于边界层内，一个适用于外区。这就引出了无量纲的内变量和外变量。先用外变量确定出一个直接摄动展开式——外展开式或外解；而利用内变量确定出一个描写锐变的展开式——内展开式或内解。外解在锐变的内区域上失效，而内解在内区域以外失效。然后通过匹配方法，得到一个在整个区域上一致成立的合成展开式。

匹配渐近展开方法的关键步骤是选择内变量。即应当解决下述几个问题：

（i） 应当把哪个自变量伸长？

（ii） 应当怎样将它们伸长？

（iii） 未知函数应当怎样伸长？

第一个问题的答案取决于能否辨认出问题的奇异性；包括锐变区的位置和“形状”，即它是否在一个点、线或面的附近。

如果能计算出外展开式的前几项，那末锐变区内自变量需要伸长的程度，通常是显然的。对于问题有深入的物理上的了解，也有助于提出适当的伸长自变量所应引入的尺度。否则可以用尝试法确定自变量的伸长，其主要原则是应尽可能地减少边界层内问题的退化，内区域问题必须把一阶外解中略去的任何基本部分包括在它的第一近似中，而且使内外解匹配。

作为一个例子，考虑模式问题(A2.25)，试验自变量的任意伸长（暂且不试验未知函数的伸长），我们令

$$f(x;\varepsilon)=F(X;\varepsilon),X=\frac{x}{\sigma(\varepsilon)}. \tag{A2.43}$$

问题变为

$$\frac{d^2F}{dX^2}+\frac{\sigma(\varepsilon)}{\varepsilon}\frac{dF}{dX}=\frac{\sigma^2(\varepsilon)}{\varepsilon}a, \tag{A2.44}$$

$$F(0)=0,F\left(\frac{1}{\sigma}\right)=1. \tag{A2.44}$$

因为在外极限中最高阶导数消失，所以在内极限中必须保留 d^2F/dX^2 项。这意味着乘以 dF/dX 的因子 $\sigma(\varepsilon)/\varepsilon$，当 $\varepsilon\to 0$ 时，一定不能变为无穷大。如果它为零，则满足内边界条件

（这一条也必须保留）的解就是 X 的倍数，但这不能与外解（A2.27)匹配。剩下的可能性是 $\sigma(\varepsilon)/\varepsilon$ 趋于一个常数，这也给出最少退化的微分方程。不失一般性，取常数为 1，则给出前面的结果(A2.29)和(A2.30)。在这个例子中不需要伸长因变量，因为一阶内问题是齐次的：但是一般地说，必须容许每个自变量和每个未知函数可以单独伸长。

A2.3 多尺度方法

多尺度方法是本世纪六十年代后迅速发展起来的一种解决奇异摄动问题的最有效的方法。目前，这种方法已经广泛地应用于许多领域的数学物理问题中，特别是波动类型的问题中。本书中论讨频散波的能量传播理论、罗斯贝波共振相互作用理论和非线性不稳定理论等课题时，都系统地使用了多时间尺度分析方法。在此我们着重补充阐明该方法的基本思想。

A2.3.1 多尺度方法的基本思想 在A2.1节中曾经指出，当自变量区域无限时，有可能导致一类奇异摄动问题。多尺度方法对解决这类问题特别有效。我们用一个描写线性阻尼振子的常微分方程作为说明解决这类奇异摄动问题的简单模型。考察二阶常微分方程

$$\ddot{x}+x=-2\varepsilon\dot{x}, \tag{A2.45}$$

其中 ε 是一个小参数，$\dot{x}=dx/dt, \ddot{x}=d^2x/dt^2$.

我们先看一下用正规摄动方法解决这个问题会遇到什么困难，从而弄清这类奇异摄动问题产生的原因。为了求方程(A2.45)的渐近解，首先将未知函数按小参数 ε 作直接展开，

$$x=x_0+\varepsilon x_1+\varepsilon^2x_2+\cdots\cdots. \tag{A2.46}$$

将(A2.46)式代入方程 (A2.45)，并令 ε 的同次幂的系数相等，可得出逐阶方程，其前三阶方程为

$$\ddot{x}_0+x_0=0, \tag{A2.47}$$

$$\ddot{x}_1+x_1=-2\dot{x}_0, \tag{A2.48}$$

$$\ddot{x}_2+x_2=-2\dot{x}_1. \tag{A2.49}$$

$O(\varepsilon^0)$方程(A2.47)的通解可以表示为

$$x_0=a\cos(t+\varphi), \tag{A2.50a}$$

式中 a 与 φ 是任意常数。进一步把 x_0 的表达式代入$O(\varepsilon^1)$ 方程，(A2.48)，解之可得

$$x_1=-at\cos(t+\varphi). \tag{A2.50b}$$

同样，若把(A2.51)式代入 $O(\varepsilon^2)$方程 (A2.49)，则可得到关于 x_2 的方程，其解为

$$x_2=\frac{1}{2}at^2\cos(t+\varphi)+\frac{1}{2}at\sin(t+\varphi). \tag{A2.50c}$$

于是得

$$x=a\cos(t+\varphi)-\varepsilon at\cos(t+\varphi)+\frac{1}{2}\varepsilon^2a[t^2\cos(t+\varphi)+t\sin(t+\varphi)]+O(\varepsilon^3). \tag{A2.51}$$

这个展开式中相邻的后项与前项之比为

$$\frac{\varepsilon x_1}{x_0}=\frac{-\varepsilon at\cos(t+\varphi)}{a\cos(t+\varphi)}=-\varepsilon t,$$

$$\frac{\varepsilon^2x_2}{\varepsilon x_1}=\frac{\frac{1}{2}\varepsilon^2a[t^2\cos(t+\varphi)+t\sin(t+\varphi)]}{-\varepsilon ta\cos(t+\varphi)}$$

$$=\frac{-1}{2}\varepsilon t-\frac{1}{2}\varepsilon\tan(t+\varphi).$$

自变量 t 的取值范围是一个无限域，即 t 可以趋于无穷大。当$t\to\infty$时，

$$\lim_{t\to\infty}\frac{|\varepsilon x_1|}{|x_0|}=\lim_{t\to\infty}\varepsilon t=\infty;$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{|\varepsilon^2 x_2|}{|\varepsilon x_1|}=\infty.$$

因此，展开式已失去了它的渐近性质，这是因为在 A2.1 节中曾经指出，在一个渐近级数（A2.7）式中，后一项的量级必须小于相邻的前一项的量级，即

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\frac{\varepsilon x_n}{x_{n-1}}\right|=0\text{或}\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\frac{x_n}{x_{n-1}}\right|=c<\infty,$$

其次，我们可以看出，甚至不需要$t\to\infty$，只要当$t=O(\varepsilon^{-1})$时，渐近展开式成立的上述条件就已破坏，从而使正规摄动失败。这种导致渐近展开式非一致成立的原因，显然是来自自变量的无限域。在渐近展开式中，因x_1和x_2这种项含有“$t\cos(t+\varphi)$”、“$t^2\cos(t+\varphi)$”等因子，所以在自变量$t\to\infty$时，相邻的后项与前项的系数之比值变为无界，即

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ t\to\infty}}\left|\frac{x_n}{x_{n-1}}\right|=\infty.$$

这种项称为久期项（Secular term），或永年项。正是由于久期项的存在，使邦加莱型渐近展开式在自变量的无限域上不能一致成立。

如何克服上述困难呢？我们从方程（A2.45）的精确解来研究这个问题。不难求出方程（A2.45）的精确解为

$$x=ae^{-\varepsilon t}\cos[\sqrt{1-\varepsilon^2}\,t+\varphi].\tag{A2.52}$$

其中 a 和 φ 是任意常数，分别表示初始振幅和位相。因为

$$e^{-\varepsilon t}=1-\varepsilon t+\frac{1}{2}\varepsilon^2t^2+\cdots\cdots;\tag{A2.53}$$

而且

$$\cos(\sqrt{1-\varepsilon^2}\,t+\varphi)=\cos\left[t\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon^2-\frac{1}{8}\varepsilon^4-\frac{1}{16}\varepsilon^6-\cdots\cdots\right)+\varphi\right]$$

$$=\cos(t+\varphi)+\frac{1}{2}\varepsilon^2t\sin(t+\varphi)+\cdots\cdots,\tag{A2.54}$$

所以把（A2.53）式和（A2.54）式代入（A2.52），即得（A2.51）式。

从（A2.53）式看出，当 εt 很小时，$e^{-\varepsilon t}$ 可以取右端前面有限项和作为其近似值。由于ε是小量，所以这意味着$t=O(1)$。当 t 增加到 $O(\varepsilon^{-1})$时，εt 不再是小量，再利用前面所取的有限项和作为 $e^{-\varepsilon t}$ 的近似值，误差就不一定是小量了。一般地说，如果预先提出某种精度要求，那末当$t=t_1$时，若只取（A2.53）式右端前n_1项作为近似即可，则当 $t=t_2>t_1$ 时，需要取 $n_2>n_1$ 项才行。换句话说，无法找到（A2.53）式右端的一个前几项和作为 $e^{-\varepsilon t}$ 的近似式，使其误差对所有的 t 都满足同一给定的精度要求。这说明尽管 $e^{-\varepsilon t}$ 对 t 是收敛的，但渐近表达式对 t 却不能一致成立。为了确定一个对量级为 ε^{-1} 的时间 t 成立的表达式，应当把

εt 看成是一个变量，即

$$T_1=\varepsilon t,$$

这样就可得到

$$e^{-\varepsilon t}=e^{-T_1}=1-T_1+\frac{1}{2}T_1^2+\cdots\cdots. \tag{A2.55}$$

它对 $t=O(\varepsilon^{-1})$（即 $T=O(1)$）是一致成立的。

同样，我们从 $\cos[\sqrt{1-\varepsilon^2}\,t+\varphi]$ 的表达式(A2.54)可看出，当 $\varepsilon^2 t$ 为小量时，(A2.54)是有效的渐近展开式，但当 $t=O(\varepsilon^{-2})$ 时，展开式的第二项与第一项相比不再是小量。为了得到对 $t=O(\varepsilon^{-2})$ 成立的展开式，应当把 $\varepsilon^2 t$ 考虑为一个变量：$T_2=\varepsilon^2 t$，此时 $T_2=O(1)$，且有：

$$\begin{aligned}\cos[\sqrt{1-\varepsilon^2}\,t+\varphi]&=\cos\left[\left(t-\frac{1}{2}T_2+\varphi\right)-\frac{1}{8}\varepsilon^4 t-\cdots\cdots\right]\\&=\cos\left(t-\frac{T_2}{2}+\varphi\right)+\frac{1}{8}\varepsilon^4 t\sin\left(t-\frac{T_2}{2}+\varphi\right)+\cdots\cdots\\&=\cos\left(t-\frac{T_2}{2}+\varphi\right)+\frac{1}{8}\varepsilon^2 T_2\sin\left(t-\frac{T_2}{2}+\varphi\right)+\cdots\cdots.\end{aligned} \tag{A2.56}$$

当 $t=O(\varepsilon^{-2})$ 时，展开式（A2.56）仍然成立，因为第二项仅是第一项的 $O(\varepsilon^2)$ 修正。当 $t=O(\varepsilon^{-4})$ 时，此展开式的渐近性又将破坏，因为此时，第二项与第一项相比不再是小量。为了得到对 $t=O(\varepsilon^{-4})$ 成立的展开式，必须再引入另一个变量 $T_4=\varepsilon^4 t=O(1)$。

以上的讨论告诉我们，$x(t;\varepsilon)$ 依赖于 t，εt，$\varepsilon^2 t,\cdots\cdots$，以及 ε 本身。从精确解也可以看出这一点。所以，为了确定一个对所有的直到 $O(\varepsilon^{-M})$ 的 t 值都成立的截断展开式，我们应当确定 x 对 $M+1$ 个不同时间变量 T_0，$T_1,\cdots\cdots,T_M$ 的依赖关系，这里

$$T_m=\varepsilon^m t\ (m=0,\ 1,\cdots\cdots,M), \tag{A2.57}$$

其中 T_1 比 T_0 慢，而 T_2 又比 T_1 慢，一般说来，T_m 比 T_{m-1} 慢。引入上述不同时间尺度的变量后，我们可以认为，

$$\begin{aligned}x(t;\varepsilon)&=\tilde{x}(T_0,T_1,\cdots\cdots T_M;\varepsilon)\\&=\sum_{m=0}^{M}\varepsilon^m x_m(T_0,T_1,\cdots\cdots,T_M)+O(\varepsilon T_M).\end{aligned} \tag{A2.58}$$

上式中的截断误差是 $O(\varepsilon T_M)$，说明展开式直到 $O(\varepsilon^{-M})$ 的时间仍成立。超过这个时间后，必须使用更长的时间尺度来保持展开式一致成立。（A2.57）和（A2.58）式还表明，原来的问题已从常微分方程变为偏微分方程。若问题本来就是偏微分方程，则引入不同时间尺度的变量后，将使自变量的个数增加。应用复合函数求导数的法则，在引入上述多时间尺度变量后，时间导数变成

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial T_0}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1}+\varepsilon_2\frac{\partial}{\partial T_2}+\cdots\cdots. \tag{A2.59}$$

方程（A2.57）—（A2.59）形成了解决无限域奇异摄动问题的第一种多尺度方法，Nayfeh称此方法为导数展开法（derivative-expansion procedure），因为（A2.58）和（A2.59）

表明，不仅用小参数 ε 把未知函数作了展开，而且把导数也作了展开，从而得到在扩大了的定义域上一致成立的渐近解。

把（A2.58）和（A2.59）式代入所要求解的方程，令 ε 的同次幂的系数相等，可以得到确定 x_0、x_1、……、x_M 的一系列方程。在这些方程式的解中含有变量 T_1、T_2、T_3、……、T_M 的任意待定函数。为了确定这些函数，必须提出附加条件。如果（A2.58）式对于$t=O(\varepsilon^{-M})$成立，则$\varepsilon^m x_m$应是对于$\varepsilon^{m-1}x_{m-1}$的小修正量，$\varepsilon^{m-1}x_{m-1}$又是 $\varepsilon^{m-2}x_{m-2}$ 的小修正量，于是我们要求，对于任意T_0、T_1、……、T_M，有

$$x_m/x_{m-1}<\infty. \qquad (A2.60)$$

这个条件并不意味着每个x_m是有界的（实际上每个x_m可以是无穷大），但是这个条件要求展开式中后一项的奇异性比前一项少。实际上这一要求相当于消去久期项。

综上所述，这类多尺度方法的基本要点有两个：第一，为了使渐近展开式在更长的时间域（自变量域）上一致成立，引入多尺度变量，然后对未知函数和导数作多尺度渐近展开；第二，提出恰当的条件，消去久期项，以确定近似解的系数。

如果我们进一步考察精确解（A2.52），还会发现，自变量 t 出现在 εt 项或$\sqrt{1-\varepsilon^2}\,t$项中，所以为了确定对很长的时间 t 成立的展开式，似乎也可以引入两个新的时间变量：

$$\xi=\varepsilon t,$$

和

$$\eta=\sqrt{1-\varepsilon^2}\,t=\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon^2-\frac{1}{8}\varepsilon^4+\cdots\cdots\right)t,$$

显然时间变量 ξ 比 η 慢。一般我们可设

$$\xi=\varepsilon t,\eta=(1+\varepsilon^2\alpha_2+\varepsilon^3\alpha_3+\cdots\cdots+\varepsilon^M\alpha_M)t, \qquad (A2.61)$$

其中 α_n 是待定常数，此时 ξ 比 η 慢，未知函数和时间导数的展开式分别为

$$x(t;\varepsilon)\equiv\tilde{x}(\xi,\eta;\varepsilon)=\sum_{m=0}^{M-1}\varepsilon^m x_m(\xi,\eta)+O(\varepsilon^M), \qquad (A2.62)$$

$$\frac{d}{dt}=\varepsilon\frac{\partial}{\partial\xi}+(1+\varepsilon^2\alpha_2+\varepsilon^3\alpha_3+\cdots\cdots+\varepsilon^M\alpha_M)\frac{\partial}{\partial\eta}. \qquad (A2.63)$$

在具体确定 x_m 时，和上述导数展开法一样，也要提出附加条件，所不同的是，这里在确定 x_m 时，也同时定出了待定常数 α_m。这是第二种多尺度方法，称为二元展开法（the two-variable expansion procedure）。

将上述两种方法推广到非线性尺度，可以提出普遍方法（the generalized method）。在上述导数展开方法中，各时间变量按$\{\varepsilon^m\}$引入。如果使用形式更普遍的渐近序列$\{\delta_m(\varepsilon)\}$来代替$\{\varepsilon^m\}$而引入多尺度变量，则有

$$T_n=\delta_n(\varepsilon)t,\ n=1,2,\cdots\cdots,M, \qquad (A2.64)$$

$$\frac{d}{dt}=\sum_{n=0}^{M}\delta_n(\varepsilon)\frac{\partial}{\partial T_n}. \qquad (A2.65)$$

（A2.64）和（A2.65）式还可进一步推广，即将（A2.64）式中的时间变数 t 用以$\mu_n(\varepsilon)t$ 为变数的函数$g_n[\mu_n(\varepsilon)t]$来代替，其中$\{\mu_n(\varepsilon)\}$是一个渐近序列，于是，

$$T_n=\delta_n(\varepsilon)g_n[\mu_n(\varepsilon)t], \qquad (A2.66)$$

$$\frac{d}{dt}=\sum_{n=0}^{M}\delta_n(\varepsilon)\mu_n(\varepsilon)g'_n[\mu_n(\varepsilon)t]\frac{\partial}{\partial T_n}. \qquad (A2.67)$$

(A2.66) 式所引进的新时间变量 T_n 与 t 的关系可以是非线性的。

完全类似地，可以把二元展开方法加以推广，如 (A2.62) 和 (A2.63) 式相应地变为

$$\xi=\mu(\varepsilon)t,\quad \eta=\sum_{n=0}^{M}\delta_n(\varepsilon)g_n[\mu(\varepsilon)t], \qquad (A2.68)$$

$$\frac{d}{dt}=\mu(\varepsilon)\frac{\partial}{\partial\xi}+\left(\sum_{n=0}^{M}\delta_n(\varepsilon)\mu(\varepsilon)g'_n(\mu(\varepsilon)t)\right)\frac{\partial}{\partial\eta}. \qquad (A2.69)$$

A2.3.2 导数展开法 我们以方程 (A2.45) 为例，说明这一方法的具体求解过程。

首先，为了使展开式直到 $t=O(\varepsilon^{-2})$ 均成立，我们引入新的时间变量

$$T_0=t,\ T_1=\varepsilon t,\ \text{和}\ T_2=\varepsilon^2 t.$$

于是可令

$$\begin{aligned}x(t,\varepsilon)&\equiv\tilde{x}(T_0,T_1,T_2;\varepsilon)\\&=\sum_{m=0}^{2}\varepsilon^m x_m(T_0,T_1,T_2)+O(\varepsilon T_2),\end{aligned} \qquad (A2.70)$$

而时间导数变为

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial T_0}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1}+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial T_2}+\cdots\cdots. \qquad (A2.71)$$

把 (A2.70) 和 (A2.71) 式代入方程 (A2.45)，然后令ε的同次幂的系数相等，可得关于 x_0、x_1、x_2 的下述方程：

$$\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2}+x_0=0, \qquad (A2.72)$$

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2}+x_1=-2\frac{\partial x_0}{\partial T_0}-2\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0\partial T_1}, \qquad (A2.73)$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial T_0^2}+x_2=-2\frac{\partial x_1}{\partial T_0}-2\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0\partial T_1}-\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_1^2}-2\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0\partial T_2}-2\frac{\partial x_0}{\partial T_1} \qquad (A2.74)$$

方程 (A2.72) 的通解是

$$x_0=A_0(T_1,T_2)e^{iT_0}+cc. \qquad (A2.75)$$

其中 cc 是前一项的复共轭。注意，在此阶问题上，$A_0(T_1,T_2)$是待定的函数。把 (A2.75) 式代入方程 (A2.73)，得到 x_1 的方程为

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2}+x_1=-2i\left(A_0+\frac{\partial A_0}{\partial T_1}\right)e^{iT_0}+cc, \qquad (A2.76a)$$

其通解为

$$x_1=\left[A_1(T_1,T_2)e^{iT_0}-\left(A_0+\frac{\partial A_0}{\partial T_1}\right)T_0e^{iT_0}\right]+cc, \qquad (A2.76b)$$

式中右边括号中的前一项及其复共轭是对应于 (A2.76a) 的齐次方程之通解，而右端括号中第二项及其复共轭是非齐次方程(A2.76a)的特解。注意，在这个特解中出现了形如$T_0e^{iT_0}$的项。把 (A2.76b) 和 (A2.75) 式相比较可知，仅当 $\varepsilon T_0=\varepsilon t$ 为小量时，εx_1才是对 x_0 的

小修正量，但当 t 增至 $O(\varepsilon^{-1})$ 时，由于 x_1 中 $T_0e^{\pm iT_0}$ 项的出现，使 x_1/x_0 不再保持为有界（当 T_0 增大时），从而使展开式的一致成立性破坏，所以含有 $T_0e^{\pm iT_0}$ 的项正是久期项。为了得到对时间 $t=O(\varepsilon^{-1})$ 成立的渐近展开式，必须令（A2.76b）式中的久期项为零，从而得到一个确定 A_0 的附加条件：

$$A_0+\frac{\partial A_0}{\partial T_1}=0, \tag{A2.77}$$

解之得

$$A_0=a_0(T_2)e^{-T_1}. \tag{A2.78}$$

至此，$a_0(T_2)$ 仍待进一步确定，因此，$A_0(T_1,T_2)$ 还没有完全确定出来。为此需要解 $O(\varepsilon^2)$ 问题（A2.74）。根据（A2.77）式，消去了久期项后的 x_1 的解为

$$x_1=A_1(T_1,T_2)e^{iT_0}+cc. \tag{A2.79}$$

把 x_0 和 x_1 的表达式（A2.75）和（A2.79）代入（A2.74），得

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial T_0^2}+x_2=-Q(T_1,T_2)e^{iT_0}+cc, \tag{A2.80}$$

式中，

$$Q(T_1,T_2)=2iA_1+2i\frac{\partial A_1}{\partial T_1}-a_0e^{-T_1}+2i\frac{\partial a_0}{\partial T_2}e^{-T_1}. \tag{A2.81}$$

不难证明（A2.80）的非齐次特解是

$$x_2'=\frac{1}{2}iQ(T_1,T_2)T_0e^{iT_0}+cc.$$

和上面的分析方法一样，可以辨认出这是一些由 Q 强迫产生的久期项。为了消去这些久期项，我们必须令 $Q=0$，即

$$\frac{\partial A_1}{\partial T_1}+A_1=\frac{1}{2}i\left(-a_0+2i\frac{\partial a_0}{\partial T_2}\right)e^{-T_1}. \tag{A2.82}$$

值得指出的是，一般为了得到条件（A2.82），并不需要解出 x_2 来，仅需考察方程（A2.80）即可得知，右端非齐次项将在解中产生久期项，因而可直接消去这些产生久期项的非齐次项，即可得到（A2.82）式，这是确定任意函数的另一个附加条件。由这个附加条件可以解出

$$A_1=\left[a_1(T_2)+\frac{1}{2}i\left(-a_0+2i\frac{\partial a_0}{\partial T_2}\right)T_1\right]e^{-T_1}. \tag{A2.83}$$

将此式代入（A2.79）式，便得

$$x_1=\left[a_1(T_2)+\frac{1}{2}i\left(-a_0+2i\frac{\partial a_0}{\partial T_2}\right)T_1\right]e^{-T_1}e^{iT_0}+cc. \tag{A2.84}$$

但是由于

$$\begin{aligned}x_0&=[a_0e^{iT_0}+cc]e^{-T_1}\\&=a_0e^{-T_1}e^{iT_0}+cc,\end{aligned} \tag{A2.85}$$

所以，当 $T_1\to\infty$ 时，尽管 x_0 和 $x_1\to 0$，但当 t 增大到 $O(\varepsilon^{-2})$ 时，εx_1 变为 $O(x_0)$，展开式 $x_0+\varepsilon x_1$ 对 $O(\varepsilon^{-2})$ 的 t 失效。为了使展开式在 $O(\varepsilon^{-2})$ 的 t 上一致成立，必须令（A2.84）式方括号中 T_1 的系数为零，即

$$-a_0+2i\frac{\partial a_0}{\partial T_2}=0. \qquad (A2.86)$$

由这个消去久期项的条件可解得

$$a_0=a_{00}e^{-iT_2/2}, \qquad (A2.87)$$

其中a_{00}是一个常数。至此$O(\varepsilon^0)$问题中的任意函数A_0（T_1,T_2）已完全确定，而（A2.84）式变为

$$A_1(T_1,T_2)=a_1(T_2)e^{-T_1},$$

式中的$a_1(T_2)$仍是待定的，要确定它，必须再求解$O(\varepsilon^2)$问题，经过求解可知

$$a_1(T_2)=a_{11}e^{-iT_2/2}.$$

此处a_{11}是一个常数。到此为止，我们得到了方程（A2.45）的解的一个直到$O(\varepsilon^{-2})$的时间都一致成立的展开式：

$$x=e^{-T_1}\{[a_{00}e^{i(T_0-T_2/2)}+cc]+\varepsilon[a_{11}e^{i(T_0-T_2/2)}+cc]\}+O(\varepsilon^2). \qquad (A2.88)$$

式中的常数可以由初始条件决定。设$x(0)=a\cos\varphi$，$\dot{x}(0)=-a(\sin\varphi\sqrt{1-\varepsilon^2}+\varepsilon\cos\varphi)$，再用$\varepsilon^n t$代替$T_n$，最后得到

$$x=ae^{-\varepsilon t}\cos\left(t-\frac{1}{2}\varepsilon^2 t+\varphi\right)+R, \qquad (A2.89)$$

式中R是余项。由精确解（A2.52）和（A2.89）式可得

$$R=ae^{-\varepsilon t}\left[\cos\left(t\sqrt{1-\varepsilon^2}+\varphi\right)-\cos\left(t-\frac{1}{2}\varepsilon^2 t+\varphi\right)\right]$$

$$=-2ae^{-\varepsilon t}\sin\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{1-\varepsilon^2}+1-\frac{1}{2}\varepsilon^2\right)t+\varphi\right]\sin\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{1-\varepsilon^2}-1+\frac{1}{2}\varepsilon^2\right)t\right]$$

$$=-2ae^{-\varepsilon t}\sin\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{1-\varepsilon^2}+1-\frac{1}{2}\varepsilon^2\right)t+\varphi\right]\sin\left[\left(-\frac{1}{16}\varepsilon^4+\cdots\cdots\right)t\right]$$

$$=O(\varepsilon^4 t). \qquad (A2.90)$$

以上通过一个简单的例子说明了导数展开法的具体步骤。其实，对于象(A2.45)这样的线性方程，我们完全可以不必展开未知函数，直接引入多时间尺度变量，只把导数项展开求解即可，这样使求解大为简化。在方程(A2.43)中使用导数展开式(A2.71)，得

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial T^2}+2\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial T_0\partial T_1}+\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2}{\partial T_1^2}+2\frac{\partial^2}{\partial T_0\partial T_2}\right)+\cdots\cdots\right]x+x$$

$$=-2\varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial T_0}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1}+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial T_2}+\cdots\cdots\right)x.$$

令ε的同次幂系数相等，得到

$$\frac{\partial^2 x}{\partial T_0}+x=0, \qquad (A2.91)$$

$$2\frac{\partial^2 x}{\partial T_0\partial T_1}=-2\frac{\partial x}{\partial T_0}, \qquad (A2.92)$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial T_1^2}+2\frac{\partial^2 x}{\partial T_0\partial T_2}=-2\frac{\partial x}{\partial T_1}. \qquad (A2.93)$$

（A2.91）的通解是

$$x=A(T_1,T_2)e^{iT_0}+cc. \tag{A2.94}$$

把它代入方程（A2.92），得到

$$\left(\frac{\partial A_1}{\partial T_1}+A\right)e^{iT_0}+cc=0. \tag{A2.95}$$

因为（A2.95）对一切 T_0 均成立，故其系数必须为零，

$$\frac{\partial A}{\partial T_1}+A=0, \tag{A2.96}$$

或者

$$A=a(T_2)e^{-T_1}. \tag{A2.97}$$

把（A2.94）式代入方程（A2.93），可得

$$\left(\frac{\partial^2 A}{\partial T_1^2}+2i\frac{\partial A}{\partial T_2}+2\frac{\partial A}{\partial T_1}\right)e^{iT_0}+cc=0. \tag{A2.98}$$

于是有

$$\left(\frac{\partial^2 A}{\partial T_1^2}+2i\frac{\partial A}{\partial T_2}+2\frac{\partial A}{\partial T_1}\right)e^{iT_0}=0. \tag{A2.99}$$

将A的表达式（A2.97）式代入（A2.99），则可定出$a(T_2)$，即：

$$2i\frac{\partial a}{\partial T_2}-a=0,$$

或者

$$a=a_0e^{-iT_2/2}, \tag{A2.100}$$

式中 a_0 是常数。解（A2.94）变为

$$x=a_0e^{-T_1}e^{i(T_0-T_2/2)}+cc,$$

改用变数 t 表示时，

$$x=ae^{-\varepsilon t}\cos\left(t-\frac{1}{2}\varepsilon^2t+\varphi\right), \tag{A2.101}$$

式中 $a_0=(1/2)a\exp(i\varphi)$，这与结果（A2.89）一样。

A2.3.3 二元展开法 仍以求解方程（A2.45）为例说明。引入两个不同时间尺度的变量 ξ 和 η：

$$\xi=\varepsilon t,$$
$$\eta=(1+\varepsilon^2\alpha_2+\varepsilon^3\alpha_3+\cdots\cdots)t,$$

则对时间求导数变成：

$$\frac{d}{dt}=\varepsilon\frac{\partial}{\partial\xi}+(1+\varepsilon^2\alpha_2+\varepsilon^3\alpha_3+\cdots\cdots)\frac{\partial}{\partial\eta},$$

把它代入方程（A2.45），得

$$(1+\varepsilon^2\alpha_2+\cdots\cdots)^2\frac{\partial^2x}{\partial\eta^2}+2\varepsilon(1+\varepsilon^2\alpha_2+\cdots\cdots)\frac{\partial^2x}{\partial\xi\partial\eta}+\varepsilon^2\frac{\partial^2x}{\partial\xi^2}+x$$

$$=-2\varepsilon(1+\varepsilon^2\alpha_2+\cdots\cdots)\frac{\partial x}{\partial\eta}-2\varepsilon^2\frac{\partial x}{\partial\xi}, \tag{A2.102}$$

其次，设

$$x(t;\varepsilon)\equiv\tilde{x}(\xi,\eta;\varepsilon)=x_0(\xi,\eta)+\varepsilon x_1(\xi,\eta)+\varepsilon^2x_2(\xi,\eta)+\cdots\cdots \tag{A2.103}$$

把（A2.103）式代入方程（A2.102），令 ε 的同次幂系数相等，得

$$\frac{\partial^2 x_0}{\partial\eta^2}+x_0=0, \tag{A2.104}$$

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial\eta^2}+x_1+2\frac{\partial^2 x_0}{\partial\xi\partial\eta}=-2\frac{\partial x_0}{\partial\eta}, \tag{A2.105}$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial\eta^2}+x_2+2a_2\frac{\partial^2 x_0}{\partial\eta^2}+2\frac{\partial^2 x_1}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 x_0}{\partial\xi^2}=-2\frac{\partial x_1}{\partial\eta}-2\frac{\partial x_0}{\partial\xi}. \tag{A2.106}$$

方程（A2.104）的通解是

$$x_0=A_0(\xi)e^{i\eta}+cc, \tag{A2.107}$$

其中$A_0(\xi)$是待定函数。有了此解后，（A2.105）式变为

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial\eta^2}+x_1=-2i\left(\frac{dA_0}{d\xi}+A_0\right)e^{i\eta}+cc. \tag{A2.108}$$

消去方程（A2.108）中产生久期项的项，得

$$\frac{dA_0}{d\xi}+A_0=0. \tag{A2.109}$$

由此解出 A_0 为

$$A_0(\xi)=a_0e^{-\xi}, \tag{A2.110}$$

其中 a_0 是常数。此时，（A2.108）的解为

$$x_1=A_1(\xi)e^{i\eta}+cc. \tag{A2.111}$$

为了确定$A_1(\xi)$，再把x_0和 x_1 的表达式（A2.107）和（A2.111）及（A2.110）一起代入方程（A2.106），得到

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial\eta^2}+x_2=\left[-2i\left(\frac{dA_1}{d\xi}+A_1\right)+(2a_2+1)a_0e^{-\xi}\right]e^{i\eta}+cc. \tag{A2.112}$$

容易看出，方程（A2.112）右端的非齐次项将在 x_2 的解中产生久期项，消去久期项的条件要求：

$$\frac{dA_1}{d\xi}+A_1=-\frac{1}{2}i(2a_2+1)a_0e^{-\xi}. \tag{A2.113}$$

解之可得

$$A_1=a_1e^{-\xi}-\frac{1}{2}i(2a_2+1)a_0\xi e^{\xi}. \tag{A2.114}$$

把上面的结果代入（A2.111）式并且与（A2.107）式比较，可知

$$\frac{x_1}{x_0}=\frac{\left[a_1e^{-\xi}-\frac{1}{2}i(2a_2+1)a_0\xi e^{-\xi}\right]e^{i\eta}+cc}{a_0e^{-\xi}e^{i\eta}+cc}.$$

可见当 $\xi\to\infty$ 时，欲使 x_1/x_0 有界，必须要求：

$$a_2=-\frac{1}{2}.$$

最后我们借助变量t，则解（A2.103）可表示为

$$x=x_0+\varepsilon x_1+O(\varepsilon^2)=2(a_0+\varepsilon a_1)e^{-\xi}\cos\eta+O(\varepsilon^2)$$

$$=ae^{-\varepsilon t}\cos\left(t-\frac{1}{2}\varepsilon^2 t+\varphi\right)+O(\varepsilon^2).$$

式中$a_0+\varepsilon a_1=(1/2)a\exp(i\varphi)$.这一结果与导数展开法的结果完全一样。

A2.3.4 普遍的多尺度方法 在这类普遍的方法中，新的时间变量与t的关系一般可以是非线性的。在这里我们仍以方程（A2.45）为例进行讨论。

首先引进一个新变量$\tau=\varepsilon t$，这时原方程变换为

$$\varepsilon^2\left(\frac{d^2x}{d\tau^2}+2\frac{dx}{d\tau}\right)+x=0. \tag{A2.115}$$

为了得到一个一致成立的展开式，可令

$$\xi=\tau,$$

$$\eta=\frac{g_{-1}(\tau)}{\varepsilon}+g_0(\tau)+\varepsilon g_1(\tau)+\cdots\cdots,\quad g_i(0)=0, \tag{A2.116}$$

式中函数关系g_i是在分析过程中确定的。对τ求导数的公式变换为

$$\frac{d}{d\tau}=\frac{\partial}{\partial\xi}+\left[\frac{g'_{-1}(\xi)}{\varepsilon}+g'_0(\xi)+\varepsilon g'_1(\xi)+\cdots\cdots\right]\frac{\partial}{\partial\eta}, \tag{A2.117}$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2}=\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+2\left[\frac{g'_{-1}(\xi)}{\varepsilon}+g'_0(\xi)+\cdots\cdots\right]\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}$$

$$+\left[\frac{g''_{-1}(\xi)}{\varepsilon}+g''_0(\xi)+\cdots\cdots\right]\frac{\partial}{\partial\eta}$$

$$+\left[\frac{g'_{-1}(\xi)}{\varepsilon}+g_0(\xi)+\varepsilon g'_1(\xi)+\cdots\cdots\right]\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}. \tag{A2.118}$$

设x的一致成立的展开式为

$$x=x_0(\xi,\eta)+\varepsilon x_1(\xi,\eta)+\varepsilon^2x_2(\xi,\eta)+\cdots\cdots. \tag{A2.119}$$

把（A2.117）、(A2.118）和（A2.119）式代入方程（A2.115)，按ε的幂次合并同类项后，令ε的同次幂系数为零，我们得到

$$g'^2_{-1}\frac{\partial^2x_0}{\partial\eta^2}+x_0=0, \tag{A2.120}$$

$$g'_{-1}\frac{\partial^2x_1}{\partial\eta^2}+x_1+2g'_{-1}g'_0\frac{\partial^2x_0}{\partial\eta^2}+g''_{-1}\frac{\partial x_0}{\partial\eta}$$

$$+2g'_{-1}\frac{\partial^2x_0}{\partial\xi\partial\eta}+2g'_{-1}\frac{\partial x_0}{\partial\eta}=0. \tag{A2.121}$$

（A2.120）的通解是

$$x_0=A_0(\xi)\exp\left(i\frac{\eta}{g'_{-1}}\right)+cc. \tag{A2.122}$$

把x_0的表达式代入（A2.121），得到

$$g'^2_{-1}\frac{\partial^2x_1}{\partial\eta^2}+x_1=-\left[-\left(\frac{2g'_0}{g'_1}+i\frac{g''_{-1}}{g'_{-1}}+2i\right)A_0\right.$$

$$\left.+2ig'_{-1}\left(\frac{A_0}{g'_{-1}}\right)'+2\frac{g''_{-1}}{g'^2_{-1}}A_0\eta\right]\exp\left(i\frac{\eta}{g'_{-1}}\right)+cc. \tag{A2.123}$$

（A2.123）式的右端项将导致久期项，为了消去久期项，必须要求：

$$\left(-\frac{2g_0'}{-g_{-1}'}+i\frac{g_{-1}''}{g_{-1}'}+2i\right)A_0+2ig_{-1}'\left(\frac{A_0}{g_{-1}'}\right)'+2\frac{g_{-1}''}{g_{-1}'^2}\eta A_0=0. \tag{A2.124}$$

由于该式应对任意η均成立，所以最后一项应当为零，但对非平凡解$A_0\neq0$，必要求

$$g_{-1}''=0 \text{ 或 } g_{-1}=c\xi, \tag{A2.125}$$

式中c是任意常数，不失一般性可取为1。此时（A2.124）式变为

$$A_0'+(1+ig_0')A_0=0,$$

其解为

$$A_0=a_0e^{-\xi-ig_0(\xi)}. \tag{A2.126}$$

式中a_0是常数。A_0，g_{-1}已知后，可得

$$x_0=a_0e^{-\tau}e^{i(\tau/\varepsilon)}+cc. \tag{A2.127}$$

方程（A2.127）表明，g_0已消掉，故解与g_0的值无关。因此不失一般性，可以令g_0等于零。于是A_0变为：

$$A_0=a_0e^{-\xi}. \tag{A2.128}$$

作为（A2.124）的结果，方程（A2.123）变为

$$g_{-1}'^2\frac{\partial^2x_1}{\partial\eta^2}+x_1=0.$$

其解为

$$x_1=A_1(\xi)e^{i\eta}+cc. \tag{A2.129}$$

为了定出A_1，必须讨论二阶问题。用$g_{-1}=\xi,g_0=0$，并将（A2.117）、（A2.118）、（A2.119）式代入（A2.115）式，令ε^2项的系数为零，则可得到确定x_2的方程：

$$\frac{\partial^2x_2}{\partial\eta^2}+x_2+2\frac{\partial^2x_1}{\partial\xi\partial\eta}+2\frac{\partial x_1}{\partial\eta}+2g_1'\frac{\partial^2x_0}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2x_0}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial x_0}{\partial\xi}=0. \tag{A2.130}$$

将x_0、x_1的表达式代入方程（A2.130），得

$$\frac{\partial^2x_2}{\partial\eta^2}+x_2=-[2i(A_1'+A_1)-(2g_1'+1)a_0e^{-\xi}]e^{i\eta}+cc. \tag{A2.131}$$

消去（A2.131）中产生久期项的项，得

$$(A_1'+A_1)=-\frac{1}{2}i(2g_1'+1)a_0e^{-\xi},$$

其解是

$$A_1=a_1e^{-\xi}-\frac{1}{2}ia_0(2g_1+\xi)e^{-\xi}, \tag{A2.132}$$

式中a_1是常数。方程（A2.132）表明，当$\xi\to\infty$时，要使x_1/x_0有界，只有使

$$g_1=-\frac{1}{2}\xi. \tag{A2.133}$$

于是，借助$t=\tau/\varepsilon$，方程（A2.45）的一阶近似解为

$$\begin{aligned}x&=x_0+\varepsilon x_1+O(\varepsilon^2)\\&=ae^{-\varepsilon t}\cos\left(t-\frac{1}{2}\varepsilon^2t+\varphi\right)+O(\varepsilon^2),\end{aligned} \tag{A2.134}$$

其中$a_0+\varepsilon a_1=(1/2)a\exp(i\varphi)$。我们又一次得到了用导数展开法和二元展开法得到的结果。

参 考 文 献

1.2 节

Defant, Albert, 1961. *Physical Oceanography,* Vol. 1. Pergamon Press, 728 pp.

Fuglister, F. C. 1963. *Gulf Stream* '60. Progress in Oceanography I, Pergamon Press, 265–383.

Kochanski, A. 1955. Cross sections of the mean zonal flow and temperature along 80°W. *J. Meteorol.* **12,** 95–106.

Lorenz, E. N. 1967. *The Nature and Theory of the General Circulation of the Atmosphere.* World Meteorological Organization, 218, Geneva, Switzerland.

Palmén, E. and Newton, C. W. 1969. *Atmospheric Circulation Systems.* Academic Press, 603 pp.

Pickard, George L. 1975. *Descriptive Physical Oceanography.* Pergamon Press, 214 pp.

Sverdrup, H. U., Johnson, M. W., and Fleming, R. H. 1942. *The Oceans.* Prentice–Hall, 1087 pp.

1.3 节

U. S. Standard Atmosphere. 1962. N. A. S. A., U. S. Government Printing Office, Washington, D. C.

1.4 节

Batchelor, G. K. 1967. *An Introduction to Fluid Dynamics.* Cambridge University Press, 615 pp. Chapters 1, 2, 3.

Bryan, Kirk and Cox, Michael D. 1972. An approximate equation of state for numerical models of ocean circulation. *J. Physical Ocean.* **2,** 510–514.

Holton, J. R. 1972. *An Introduction to Dynamic Meteorology.*Academic Press. 319 pp.

2.5 节

Ertel, H. 1972. Ein neuer hydrodynamischer Wirbesatz. *Meteorolol. Z.* **59,** 277–281.

2.7 节

Taylor, G. I. 1923. Experiments on the motion of solid bodies in rotating fluids. *Proc. Roy. Soc. A* **104.** 213–218.

3.1 节

Rossby, C. G., et al. 1939. Relation between variations in the intensity of the zonal circulation of the atmosphere and the displacements of the semi-permanent centers of action. *J. Marine Res.* **2,** 38–55.

Stommel, H. 1948. The westward intensification of winddriven ocean currents. *Trans. Amer. Geoph.* Union **29,** 202–206.

3.22 节

Longuet Higgins, M. S. 1964. On group velocity and energy flux in planetary wave motions. *Deep-Sea Research* **11,** 35–42.

3.24 节

Jeffreys, H. A. and Jeffreys, B. S. 1962. *Methods of Mathematical Physics.* Cambridge University Press.

Rossby, C. G. 1945. On the propagation of frequencies and energy in certain types of oceanic and atmospheric waves. *J. Meteor.* **2,** 187–204.

3.25 节

Flierl, G. R. 1977. Simple applications of McWilliams's "A note on a consistent quasi–geostrophic model in a multiply connected domain," *Dynamics of Atmospheres and Oceans* **1,** 443–454.

Greenspan, H. P. 1968. *The Theory of Rotating Fluids.* Cambridge University Press, 327 pp.

Longuet–Higgins, M. S. 1964. Planetary waves on a rotating sphere. *Proc. Royal Soc. A* **279,** 446–473.

Pedlosky, J. 1965. A study of the time dependent ocean circulation. *J. Atmos. Sci.* **22,** 267–272.

3.26 节

Gill, A. E. 1974. The stability of planetary waves on an infinite beta–plane. *Geophysical Fluid Dyna–*

mics **6**, 29–47.

Longuet -Higgins, M. S. and Gill, A. E. 1967. Resonant interactions between planetary waves. *Proc. Roy. Soc. A* **299**, 120–140.

Lorenz, E. N. 1972. Barotropic instability of Rossby wave motion. *J. Atmos. Sci.* **29**, 258–269.

3.27 节

Charney, J. G. 1971. *Geostrophic Turbulence. J. Atmos. Sci.* **28**, 1087–1095.

Fjortoft, R. 1953. On the changes in the spectral distribution of kinetic energy for a two-dimensional, non-divergent flow. *Tellus* **5**, 225–237.

Rhines, P. B. 1975. Waves and turbulence on a beta-plane. *J. Fluid Mech.* **69**, 417–433.

4.2 节

Schlichting, H. 1968. *Boundary Layer Theory*. McGraw-Hill, 745 pp., Chapter XIX.

Sutton, O. G. 1949. *Atmospheric Turbulence*. Methuen and Co., 107 pp.

Taylor, G. I. 1915. Eddy motion in the atmosphere. *Philosophical Trans. Royal Soc. A* **CCXV**, 1–26.

4.3 节

Ekman, V. W. 1905. On the influence of the earth's rotation on ocean currents. *Arkiv. Matem., Astr. Fysik*, Stockholm **2** (11).

4.4 节

Cole, J. D. 1968. *Perturbation Methods in Applied Mathematics*. Blaisdell, 260 pp.

Van Dyke, M. 1964. *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*. Academic Press, 229 pp.

4.5 节

Cole, J. D. 1968. *Perturbation Methods in Applied Mathematics*. Blaisdell, 260 pp.

4.7 节

Greenspan, H. P. and Howard, L. N. 1963. On a time dependent motion of a rotating fluid. *J. Fluid Mech.* **22**, 449–462.

4.11 节

Charney, J. G. and Eliassen, A. 1949. A numerical method for predicting the perturbations of the middlelatitude westerlies. *Tellus* **1**, 38–54.

4.13 节

Stewartson, K. 1957. On almost rigid rotations. *J. Fluid Mech.* **3**, 17–26.

5.1 节

Defant, Albert. 1961. *Physical Oceanography*. Vol. 1. Pergamon Press, 728 pp.

Stommel, H. 1960. *The Gulf Stream*, University of California Press.

Stommel, H. and Yoshida, K. 1972. *Kuroshio: Its Physical Aspects*. University of Tokyo Press

5.3 节

Leetmaa, A., Niiler, P., and Stommel, H. 1977. Does the Sverdrup relation account for the mid-Atlantic circulation? *J. Marine Res.* **35**, 1–10.

Sverdrup, H. U. 1947. Wind-driven currents in a baroclinic ocean; with application to the equatorial currents of the eastern Pacific. *Proc. Nat. Acad. Sci.* **33**, 318–326.

Welander, P. 1959. On the vertically integrated mass transport in the oceans. In *The Atmosphere and the Sea in Motion*. Ed., B. Bolin. Rockefeller Institute Press, 75–101.

5.4 节

Munk, W. H. 1950. On the wind-driven ocean circulation. *J. Meteor.* **7**, 79–93.

Munk, W. H. and Carrier, G. F. 1950. The wind-driven circulation in ocean basins of various shapes. *Tellus* **2**, 158–167.

Pedlosky, J. and Greenspan, H. P. 1967. A simple laboratory model for the oceanic circulation. *J. Fluid Mech.* **27**, 291–304.

5.5 节

Stommel, H. 1948. The westward intensification of windriven ocean currents. *Trans. Amer. Geophys. Union* **99**, 202–206.

5.6 节

Charney, J. G. 1955. The Gulf Stream as an inertial boundary layer. *Proc. Nat. Acad. Sci.* **41**, 731–740.

Greenspan, H. P. 1962. A criterion for the existence of inertial boundary layers in oceanic circulation. *Proc. Nat. Acad. Sci.* **48**, 2034–2039.

5.7 节

Moore, D. W. 1963. Rossby waves in ocean circulation. *Deep-Sea Res.* **10**, 735–748.

5.8 节

Pedlosky, J. 1965. A note on the western intensification of the oceanic circulation. *J. Marine Res.* **23**, 207–209.

5.10 节

Fofonoff, N. P. 1954. Steady flow in a frictionless homogeneous ocean. *J. Marine Res.* **13**. 254–262.

5.11 节

Beardsley, R. C. and Robbins, K. 1975. The "sliced cylinder" laboratory model of the wind-driven ocean circulation. Part 1. Steady forcing and topographic Rossby wave instability. *J. Fluid Mech.* **69**, 27–40.

Bryan, K. 1963. A numerical investigation of a non-linear model of a wind-driven ocean. *J. Atmos. Sci.* **20**, 594–606.

Veronis, G. 1966. Wind-driven ocean circulation–Part 2. Numerical solutions of the non-linear problem. *Deep-Sea Res.* **13**, 31–55.

5.12 节

Pedlosky, J. 1968. An overlooked aspect of the wind-driven oceanic circulation. *J. Fluid Mech.* **32**. 809–821.

5.13 节

Schulman, E. E. 1975. A study of topographic effects. In *Numerical Models of Ocean Circulation*. Nat. Acad. Sci. 147–165.

6.2 节

Batchelor, G. K. 1967. *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press (Appendix 2).

Phillips, N. A. 1963. Geostrophic motion. *Reviews of Geophysics* **1**, 123–176.

6.3 节

Burger, A. 1958. Scale considerations of planetary motions of the atmosphere. *Tellus* **10**, 195–205.

Charney, J. G. 1947. *On the Scale of Atmospheric Motions*. Geofys. Publikasjoner, Norske Videnskaps–Akad Oslo 17.

Charney, J. G. and Drazin, P. G. 1961. Propagation of planetary scale disturbances from the lower into the upper atmosphere. *J. Geophys. Res.* **66**, 83–109.

6.10 节

Lorenz, E. 1955 Available potential energy and the maintenance of the general circulation. *Tellus* **7**, 157–167.

6.12 节

Chapman, S. and Lindzen, R. S. 1970. *Atmospheric Tides*. Gordon and Breach, 200 pp. Chapter 3.

Kundu, P. K., Allen, J. S., and Smith, R. L. 1975. Model decomposition of the velociety field near the Oregon coast. *J. Phys. Oceanog*. **5**. 683–704.

6.13 节

Holton, J. R. 1975. *The dynamic meteorology of the stratosphere and mesosphere. Amer. Meteo. Soc.*, 216 pp.

Smagorinsky, J. 1953. The dynamical influences of large scale heat sources and sinks on the quasi-stationary mean motions of the atmosphere. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.* **79**, 342–366.

6.14 节

Andrews, D. G. and McIntyre, M. E. 1976. Planetary waves in horizontal and vertical shear: The generalized Eliassen–Palm relation and the mean zonal acceleration. *J. Atmos. Sci.* **33**, 2031–2048.

Benney, D. J. and Bergeron R. F. 1969. A new class of nonlinear waves in parallel flows. *Studies Appl. Math.* **48**, 181–204.

Charney, J. G. and Drazin, P. G. 1961. Propagation of planetary scale disturbances from the lower into upper atmosphere. *J. Geophys. Res.* **66**, 83–109.

Eliassen, A. and Palm, E. 1961. On the transfer of energy in stationary mountain waves. *Geofys. Publ.* **22**, 1–23.

Smagorinsky, J. 1953. The dynamical influences of large scale heat sources and sinks on the quasi-stationary mean motions of the atmosphere. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.* **79**, 342–366.

6.15 节

Rhines, P. 1970. Edge–, botton–, and Rossby waves in a rotating stratified fluid. *Geophys. Fluid Dyn.* **1**, 273–302.

6.16 节

Phillips, N. A. 1951. A simple three–dimensional model for the study of large–scale extratropical flow patterns. *J. Meteor.* **8**, 381–394.

6.19 节

Sverdrup, H. U. 1947. Wind–driven currents in a baroclinic ocean; with application to the equatorial currents of the eastern Pacific. *Proc. Nat. Acad. Sci.* **33**, 318–326.

6.21 节

Bryan, K. and Cox, M. D. 1968. A non-linear model of an ocean driven by wind and differential heating. Parts I and II. *J. Atmos. Sci.* **25**, 945–978.

Carslaw, H. S. and Jaeger, J. C. 1959. *Conduction of Heat in Solids*, Oxford Press, 510 pp.

Needler, G. T. 1967. A model for thermohaline circulation in an ocean of finite depth. *J. Marine Res.* **25**, 329–342.

Robinson, A. R. and Stommel, H. 1959. The oceanic thermocline and the associated thermohaline circulation. *Tellus* **11**, 295–308.

Robinson, A. R. and Welander, P. 1963. Thermal circulation on a rotating sphere; With application to the oceanic thermocline. *J. Marine Res.* **21**, 25–38.

Welander, P. 1971a. Some exact solutions to the equations describing an ideal-fluid thermocline. *J. Mar. Res.* **29**, 60–68.

Welander, P. 1971b. The thermocline problem. *Philos. Trans. Royal Soc. Lond. A* **270**, 69–73.

7.1 节

Charney, J. G. 1947. The dynamics of long waves in a baroclinic westerly current. *J. Meteor.* **4**, 135–163.

Eady, E. T. 1949. Long waves and cyclone waves. *Tellus* **1**, 33–52.

7.3 节

Charney, J. G. and Stern, M. 1962 On the stability of internal baroclinic jets in a rotating atmosphere. *J. Atmos. Sci.* **19**, 159–172.

7.4 节

Charney, J. G. and Pedlosky, J. 1963. On the trapping of unstable planetary waves in the atmosphere. *J. Geophys. Res.* **68**, 6441–6442.

Pedlosky, J. 1964. The stability of currents in the atmosphere and the oceans. Part I. *J. Atmos. Sci.* **27**, 201–219.

7.5 节

Howard, L. N. 1961. Note on a paper of John Miles. *J. Fluid Mech.* **10**, 509–512.

Pedlosky, J. 1964. The stability of currents in the atmosphere and the oceans. Part I. J. Atmos. Sci. 27, 201–219.

7.6 节

Charney, J. G. 1947. The dynamics of long waves in a baroclinic westerly current. *J. Meteor.* **4**, 135–163.

Eady, E. T. 1949. Long waves and cyclone waves. *Tellus* **1**, 33–52.

Pedlosky, J. 1971. Geophysical fluid dynamics. In *Mathematical Problems in the Geophysical Sciences*. Ed., W. H. Reid. Amer. Math. Soc. 1–60.

7.7 节

Eady, E. T. 1949. Long waves and cyclone waves. *Tellus* **1**, 33–52.

Pedlosky, J. 1964. An initial value problem in the theory of baroclinic instability. *Tellus* **16**, 12–17.

7.8 节

Abramowitz, M. and Stegun, I. A. 1964. *Handbook of Mathematical Functions*. National Bureau of Standards. Chapter 13.

Bretherton, F. P. 1966. Critical layer instability in baroclinic flows. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.* **92**, 325–334.

Burger, A. P. 1962. On the non-existence of critical wave lengths in a continuous baroclinic stability problem. *J. Atmos. Sci.* **19**, 31–38.

Charney, J. G. 1947. The dynamics of long waves in a baroclinic westerly current. *J. Meteoro.* **4**, 135–163.

Garcia, R. V. and Norscini, R. 1970. A contribution to the baroclinic instability problem. *Tellus* **22**, 239–250.

Gill, A. E. and Green, J. S. A. 1974. Energy partition in the large-scale ocean circulation and the production of mid-ocean eddies. *Deep-Sea Res.* **21**, 497–528.

Green, J. S. A. 1960. A problem in baroclinic instability. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.* **86**. 237–251.

Hildebrand, F. B. 1963. *Advanced Calculus for Applications*. Prentice-Hall, 646 pp. Chapter 4.

Kuo, H. L. 1952. Three dimensional disturbances in a baroclinic zonal current. *J. Meteor.* **9**, 260–278.

Kuo, H. L. 1973. Dynamics of quasi-geostrophic flows and instability theory. In *Advances in Applied Mechanics* **13**, 247–330.

Lin, C. C. 1955. *The Theory of Hydrodynamic Instability*. Cambridge Univ. Press, 155 pp. Chapter 8.

Miles, J. W. 1964a. A note on Charney's model of zonal wind instability. *J. Atmos. Sci.* **21**, 451–452.

1964b. Baroclinic instability of the zonal wind. *Rev. of Geophys.* **2**, 155–176.

1964c. Baroclinic instability of the zonal wind. Parts I, II, *J. Atmos. Sci.* **21**, 550–556. 603–609.

Phillips, N. A. (1963) Geostrophic Motion, *Rev. of Geophysics* **1**, 123–176.

7.9 节

Held, I. M. 1975. Momentum transport by quasi-geostrophic eddies. *J. Atmos. Sci.* **32**, 1494–1497.

Phillips, N. A. 1954. Energy transformations and meridional circulations associated with simple baroclinic waves in a two-level, quasi-geostrophic model. *Tellus* **6**, 273–286.

7.10 节

Pedlosky, J. 1963. Baroclinic instability in two-layer systems. *Tellus* **15**, 20–25.

1964. The stability of currents in the atmosphere and the oceans. Part I. *J. Atmos. Sci.* **27**, 201–219.

7.11 节

Phillips, N. A. 1954. Energy transformations and meridional circulations associated with simple baroclinic waves in a two-level, quasi-geostrophic model. Tellus 6, 273–286.

7.12 节

Barcilon, V. 1964. Role of Ekman layers in the stability of the symmetric regime in a rotating annulus. *J. Atmos. Sci.* **21**, 291–299.

7.13 节

Gill, A. E., Green, J. S. A., and Simmons, A. J. 1974. Energy partition in the large-scale ocean circulation and the production of mid-coean eddies. *Deep-Sea Res.* **21**, 497–528.

Robinson, A. R. and McWilliams, J. C. 1974. The baroclinic instability of the open ocean. *J. Phys. Oceanog.* **4**, 281–294.

7.14 节

Dickinson, R. E. and Clare, F. J. 1973. Numerical study of the unstable modes of a hyperbolic-tangent barotropic shear flow. *J. Atmos. Sci.* **30**, 1035–1049.

Howard, L. N. and Drazin, P. G. 1964. On instability of parallel flow of inviscid fluid in a rotating system with variable Coriolis parameter. *J. Math. Phys.* **43**, 83–99.

Kuo, H. L. 1949. Dynamic instability of two-dimensional nondivergent flow in a barotropic atmosphere. *J. Meteor.* **6**, 105–122.

7.15 节

Brown, J. A., Jr. 1969. A numerical investigation of hydrodynamic instability and energy conversions in the quasigeostrophic atmosphere. Parts I, II. *J. Atmos. Sci.* **26**, 352–365, 366–375.

Charney, J. G. 1951. On baroclinic instability and the maintenance of the kinetic energy of the westerlies. In *Proc. 9th Gen. Assembly, UGGI (Assoc. Meteor.) Brussels*. 47–63.

Green, J. S. A. 1970. Transfer properties of the largescale eddies and the general circulation of the atmosphere. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.* **96**, 157–185.

Jeffreys, H. 1933. The function of cyclones in the general circulation. In *Proces-Verbaux de l'Association de Meteorologie, UGGI(Lisbon)*, Part II. 219–230. Reprinted in *Theory of Thermal Convection*. Ed., B. Saltzman, Dover, 1962.

Lorenz, E. N. 1967. *The Nature and Theory of the General Circulation of the Atmosphere*. World Meteorological Organization 218, Geneva, Switzerland.

Pedlosky, J. 1964. The stability of currents in the atmosphere and the ocean: Part II. *J. Atmos. Sci.* **21**, 342–353.

Schmitz, W. J., Jr. 1976. On the circulation in the western North Atlantic. *J. Marine Res.* **35**, 21–28.

Starr, V. P. 1953. Note concerning the nature of the large scale eddies in the atmosphere. *Tellus* **5**, 494–498.

7.16 节

Drazin, P. G. 1970. Non-linear bavoclinic instability of a continuous zonal flow. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.* **96**, 667–676.

Hart, J. E. 1973. On the behavior of largeamplitudde baroclinic waves. *J. Atmos. Sci.* **30**, 1017–1034.

Lorenz, E. N. 1963. The mechanics of vacillation. *J. Atmos. Sci.* **20**, 448–464.

Pedlosky, J. 1970. Finite amplitude baroclinic waves. *J. Atmos. Sci.* **27**, 15–30.

——1971. Finite amplitude baroclinic waves with small dissipation. *J. Atmos. Sci.* **28**, 587–597.

——1972. Limit cycles and unstable baroclinic waves. *J. Atmos. Sci.* **29**, 53–63.

——1972. Finite amplitude baroclinic wave packets. *J. Atmos. Sci.* **29**, 680–686.

Phillips, N. A. 1954. Energy transformations and meridional circulations associated with simple baroclinic waves in a two-level. quasi-geostrophic model. *Tellus* **6**, 273–286.

Smith, R. K. and Reilly, J. M. 1977. On a theory of Amplitude Vacillation in Baroclinic Waves: Some Numerical Solutions. *J. Atmos. Sci.* **34**, 1256–1260.

8.1 节

Hoskins, B. J. 1975. The geostrophic momentum approximation and the semi-geostrophic approximation. *J. Atmos. Sci.* **32**, 233–242.

8.2 节

Cutchin, D. L. and Smith, R. L. 1973. Continental shelf waves: low frequency variations in sealevel and currents over the Oregon continental shelf. *J. Phys. Oceanog.* **3**, 73–82.

Leblond, P. H. and Mysak, L. A. 1977. Trapped coastal waves and their role in shelf dynamics. In *The Sea*. Wiley-Interscience. Vol. 6, Chapter 10, 459-495.

Mysak, L. A. 1967. On the theory of continental shelf waves. *J. Mar Res.* **25**, 205-227.

Robinson, A. R. 1964. Continental shelf waves and the response of sea level to weather systems. *J. Geophys. Res.* **69**, 367-368.

8.3 节

Allen, J. S. 1973. Upwelling and coastal jets in a continuously stratified ocean. *J. Phys. Oceanog.* **3**, 245-257.

Barcilon, V. and Pedlosky, J. 1966. Linear theory of rotating stratified fluid motions. *J. Fluid Mech.* **29**, 1-16.

——1966. A unified linear theory of homogeneous and stratified rotating fluids. *J. Fluid Mech.* **29**, 609-621.

Pedlosky, J. 1974. On coastal jets and upwelling in bounded basins. *J. Phys. Oceanog.* **4**, 3-18.

8.4 节

Bergeron, T. 1928. Über die dreidimensional verknüpfend Wetteranalyse I. *Geofys. Publikasjoner* **5**, 1-11.

Hoskins, B. J. 1971. Atmospheric frontogenesis models: some solutions. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.* **97**, 139-153.

Hoskins, B. J. and Bretherton, F. P. 1972. Atmospheric frontogenesis models: Mathematical formulation and solution. *J. Atmos. Sci.* **29**, 11-37.

Petterssen, S. 1956. *Weather Analysis and Forecasting*. Vol. 1. *Motion and Motion Systems*. McGraw Hill, 422 pp. Chapter 11.

Sommerfeld, A. 1949. *Partial Differential Equations in Physics*. Academic Press, 329 pp.

Stone, P. H. 1966. Frontogenesis by horizontal wind deformation fields. *J. Atmos. Sci.* **23**, 455-465.

Voorhis, A. D. 1969. The horizontal extent and persistence of thermal fronts in the Sargasso Sea. *Deep-Sea Res.* **16**, (supplement), 331-337.

Williams, R. T. 1967. Atmospheric frontogenesis: a numerical experiment. *J. Atmos. Sci.* **24**, 627-641

8.5 节

Cane, M. A. and Sarachik, E. S. 1976. Forced baroclinic ocean motions: I. The linear equatorial unbounded case. *J. Mar. Res.* **34**, 629-665.

Cane, M. A. and Saracnik, E. S. 1977. Forced baroclinic ocean motions, II The linear equatorial bounded case. *J. Mar. Res.* **35**, 395-432.

Holton, J. R. 1975. *The Dynamic Meteorology of the Stratosphere and Mesosphere*. Amer. Meteor. Soc., 216 pp.

Luyten, J. R. and Swallow, J. C. 1976. Equatorial undercurrents. *Deep-Sea Res.* **23**, 1005-1007.

Moore, D. W. 1968. Planetary gravity waves in an equatorial ocean. Ph. D. Thesis. Harvard University, Cambridge, Massachusetts.

Moore, D. W. and Philander, S. G. H. 1977. Modeling of the tropical oceanic circulation. In *The Sea*. Eds., E. D. Goldberg et al. Wiley-Interscience. Vol. 6, Chapter 8.

Wallace, J. M. 1971. General circulation of the tropical lower stratosphere. *Rev. Geophys. Space Phys.* **11**, 191-222.

Wunsch, C. 1977. Response of an equatorial ocean to a periodic monsoon. *J. Phys. Oceanog.* **7**, 497-511.